Ricardo **Helou** Doca
Gualter José Biscuola
Newton Villas Bôas

TÓPICOS DE FÍSICA

1

Mecânica
Inclui Hidrodinâmica

São Paulo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Doca, Ricardo Helou
Tópicos de física : volume 1 / Ricardo Helou Doca, Gualter José Biscuola, Newton Villas Bôas. — 21. ed. — São Paulo : Saraiva, 2012.

Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia
ISBN 978-85-02-17810-6 (aluno)
ISBN 978-85-02-17811-3 (professor)

1. Física (Ensino médio) 2. Física (Ensino médio) – Problemas, exercícios etc. I. Biscuola, Gualter José. II. Bôas, Newton Villas. III. Título.

12-10554 CDD-530.07

Índices para catálogo sistemático:
1. Física: Ensino médio 530.07

Gerente editorial M. Esther Nejm
Editor Maria Ângela de Camargo
Editores assistentes Marcelo de Hollanda Wolff, Marcos Soel
Assistente editorial Denise Favaretto, Carla Daniela Araujo
Coordenador de revisão Camila Christi Gazzani
Revisores Lucia Scoss Nicolai (enc.), Cárita Negromonte, Raquel Alves Taveira, Salvine Maciel, William Silva
Assistente de produção editorial Rachel Lopes Corradini
Coordenador de iconografia Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica Enio Rodrigo Lopes
Licenciamento de textos Marina Murphy Diniz
Gerente de artes Ricardo Borges
Coordenador de artes Vagner Castro dos Santos
Produtor de artes Narjara Lara
Design Marcos Puntel
Capa All Type com foto de Andrea Danti/Glow Images
Diagramação Setup
Ilustrações CJT/Zapt, Luciano da S. Teixeira, Luis Augusto Ribeiro, Luis Fernando R. Tucillo, Mario Yoshida, Setup
Tratamento de imagens Bernard Fuzetti
Impressão e acabamento

Impresso no Brasil – 2012
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

www.editorasaraiva.com.br

Rua Henrique Schaumann, 270 – Cerqueira César – São Paulo/SP – 05413-909
Fone: (11) 3613 3000 – Fax: (11) 3611 3308
Televendas: (11) 3616 3666 – Fax Vendas: (11) 3611 3268
Atendimento ao professor: (11) 3613 3030 – Grande São Paulo
0800 0117875 – Demais localidades
atendprof.didatico@editorasaraiva.com.br

Ao estudante

Nesta quinta versão de ***Tópicos de Física***, celebramos 30 anos da primeira publicação da obra. Isso nos enche de satistafação e orgulho por termos, ao longo desse tempo, contribuído em grande medida para o ensino de Física no Brasil.

Tópicos é uma obra viva, em permanente processo de renovação e aprimoramento. Pretendemos nesta edição, mais uma vez, oferecer um material contemporâneo e abrangente, capaz de satisfazer aos cursos de ensino médio mais exigentes.

Nesta versão, procuramos dar à obra um caráter interdisciplinar, contextualizado e instigante. Para isso buscamos, sempre que possível, propor questionamentos que ultrapassem os limites da Física e textos relacionados à história e aos avanços desta ciência, que é um edifício em permanente construção. Estão presentes também conteúdos relacionados ao dia a dia e informações sobre as conquistas tecnológicas, tudo para que ***Tópicos de Física*** seja sempre uma coleção atualizada e ainda mais atraente.

Optamos pela distribuição clássica dos conteúdos, e dividimos o material em três volumes.

Volume 1: Mecânica;

Volume 2: Termologia, Ondulatória e Óptica geométrica;

Volume 3: Eletricidade, Física moderna e Análise dimensional.

Cada volume compõe-se de *Partes*, que equivalem aos grandes setores de interesse da Física. Estas, por sua vez, são constituídas de *Tópicos*, que abordam determinado assunto teórica e operacionalmente. Em cada Tópico a matéria está divida em *Blocos*, que agregam itens relacionados entre si.

Nos *Blocos* a compreensão da teoria é favorecida pela inclusão de um grande número de exemplos práticos, ilustrações e fotos legendadas.

A maioria dos *Tópicos* é contemplada com as seções *Faça você mesmo, Leitura e Descubra mais*.

A seção *Faça você mesmo* propõe que você realize pequenos experimentos com recursos caseiros e, a partir disso, possa compreender melhor certos conceitos e fenômenos estudados. A seção *Leitura* permite que você entre em contato com relatos e questionamentos científicos e vislumbre outros conhecimentos que fazem fronteira com a Física.

A seção *Descubra mais* apresenta perguntas curiosas com a intenção de despertar em você uma atitude de busca pela resposta por meio de pesquisa em livros, revistas, sites e outras fontes.

Em cada *Tópico* há quatro grupos de exercícios com diferentes níveis de dificuldade:

Exercícios nível 1 – requerem, de forma simples, conhecimento apenas dos conceitos essenciais. Esses exercícios estão logo após a apresentação da teoria de cada *Bloco*.

Exercícios nível 2 – além dos aspectos conceituais, valorizam a descrição quantitativa dos fenômenos e contextos. Intercalados aos *exercícios nível 1* e *nível 2* há alguns *Exercícios resolvidos (ER)*, que servem de ponto de partida para o encaminhamento de questões semelhantes. Os *exercícios nível 2* estão logo após os *exercícios nível 1*.

Exercícios nível 3 – em sua maioria são exercícios de vestibulares, nos quais inserimos elementos de complementação. Aparecem logo após a apresentação da teoria do último *Bloco* de cada *Tópico*.

Para raciocinar um pouco mais – comparecendo nesta edição em maior número, são exercícios com formulações mais difíceis, recomendados àqueles que se dispuserem a alcançar maior grau de aprofundamento no conhecimento de Física. Encontram-se logo após os *exercícios nível 3*.

Esperamos que, ao utilizar ***Tópicos de Física***, você amplie sua percepção de mundo e torne mais flexível seu raciocínio formal. Desejamos também que você adquira uma consistente visão dessa fascinante disciplina, o que, certamente, contribuirá para seu ingresso nas mais concorridas instituições de ensino superior do país.

Os autores

Sumário

Thinkstock/ Getty Images

Introdução

Introdução à Física

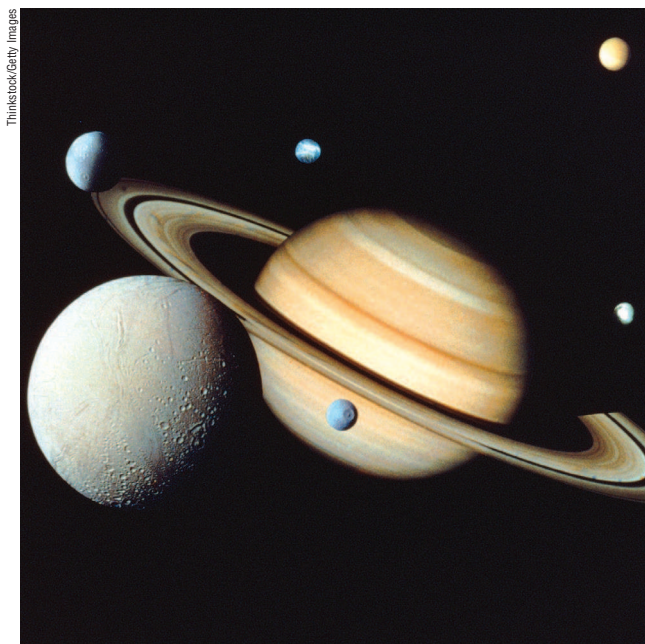
1. A Física na natureza e na tecnologia

A Física é uma das ciências que estudam a natureza. Tudo o que acontece na natureza chama-se **fenômeno natural**: o simples fato de uma camisa molhada secar no varal é um fenômeno natural, assim como a queda de uma laranja que se desprendeu de seu galho.

O estudo da Física é dividido em cinco grandes partes: Mecânica, Termologia, Ondulatória, Óptica e Eletricidade. Nesta coleção, acrescentamos, no volume 3, Física Moderna e Análise Dimensional.

Veja alguns exemplos de fenômenos naturais estudados pela Física.

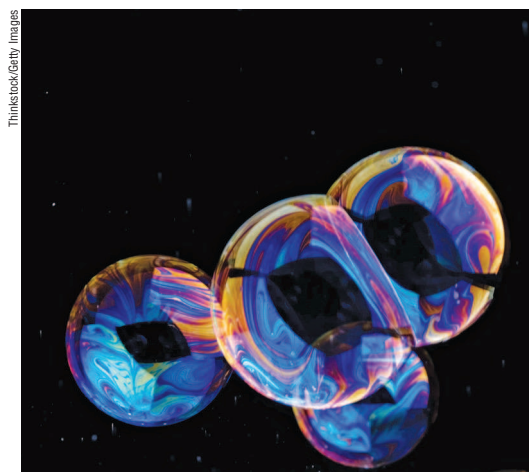
- O movimento orbital de satélites, planetas e outros corpos celestes é estudado em **Mecânica**.

Thinkstock/Getty Images

Representação artística de Saturno e algumas de suas luas (com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia).

- A solidificação da água (formação do gelo) e a obtenção de baixas temperaturas (numa geladeira, por exemplo) são estudadas em **Termologia**.

Cristina Xavier

- As micro-ondas usadas num forno (ou em transmissões via satélite) e até a coloração das bolhas de água e sabão são estudadas em **Ondulatória**.

Thinkstock/Getty Images

- A **Óptica** é a parte da Física que, entre outras aplicações, explica a formação do arco-íris e ainda nos dá o conhecimento necessário para que possamos desenvolver aparelhos como o microscópio óptico.

Thinkstock/Getty Images

- A causa de descargas elétricas na atmosfera (raios) é estudada em **Eletricidade**. Em cartões magnéticos, bilhetes de metrô e fitas de áudio e vídeo, informações são gravadas e reproduzidas devido a conhecimentos de **Eletricidade** e **Magnetismo**.

Thinkstock/Getty Images

Cristina Xavier

- A fusão nuclear, presente tanto na liberação de energia pelo Sol como na explosão de uma bomba de hidrogênio, é um processo estudado em **Física Moderna**.

Thinkstock/Getty Images

Também é a Física que nos permite entender, por exemplo, a flutuação de um navio, a coloração azul do céu, o sentido das brisas litorâneas, as vantagens da panela de pressão e da garrafa térmica, os motores a explosão, as miragens, o cintilar das estrelas, a bússola, o funcionamento de motores elétricos, alto-falantes, microfones e cápsulas fonocaptoras, a geração de energia elétrica nas usinas e tantas outras coisas.

O progresso das diversas ciências fez com que elas passassem a interagir cada vez mais umas com as outras. Por isso, você precisa saber que o estudo da Física é muito importante não apenas para quem vai seguir alguma carreira na área das chamadas Ciências Exatas, como a Engenharia, a Geologia, a Química e outras. A Física é fundamental na Biologia e, consequentemente, na Medicina. Basta lembrar, por exemplo, da transmissão dos impulsos nervosos (sinais elétricos) através dos neurônios, da ressonância magnética, da importância e dos perigos dos raios X, da ultrassonografia, da endoscopia, das cirurgias a *laser* e da tomografia por emissão de pósitron (PET), do inglês *positron emission tomography*.

A Física também é muito importante na Odontologia. Sabe-se, por exemplo, que os materiais usados na restauração dos dentes devem ter coeficientes de dilatação iguais ou quase iguais ao do próprio dente,

ou seja, devem dilatar-se como o material dentário, evitando assim a queda da obturação ou danos causados ao material do próprio dente. Além disso, um profissional dessa área precisa saber dos cuidados que se deve ter ao usar raios X.

Na Música, a Física também está presente. Afinar um violão, por exemplo, significa fazer com que suas cordas vibrem em frequências bem definidas, ou seja, executem determinado número de vibrações por segundo.

Até no Direito a Física tem importância. A análise da trajetória de uma bala de revólver, por exemplo, que pode levar à solução de um crime, requer conhecimentos físicos.

Talvez você já tenha encontrado alguém que pense que as estrelas são pontos brilhantes grudados em uma abóbada chamada céu, ou uma pessoa que duvide que o ser humano pisou na superfície da Lua. Provavelmente, você também já ouviu alguém dizer que os objetos, dentro de um satélite em órbita, não caem porque lá não existe gravidade.

O acesso a conhecimentos básicos de Física vai torná-lo capaz de esclarecer todos esses fatos, e muitos outros, a você mesmo e a essas pessoas.

2. Medição

Suponha que você queira saber quantos litros de água cabem em um garrafão. Para isso, você pode enchê-lo completamente com água e, depois, despejá-la em garrafas com capacidade de 1 litro. Vamos supor que toda a água do garrafão tenha dado para encher cinco garrafas por completo. Dizemos, então, que a capacidade do garrafão, isto é, o volume que ele pode conter, é igual a 5 litros. Nesse procedimento, você fez uma **medição**, ou seja, mediu o volume interno do garrafão. Note que, para medir esse volume, você precisou usar outro volume, que foi tomado como **unidade de medida**: o litro.

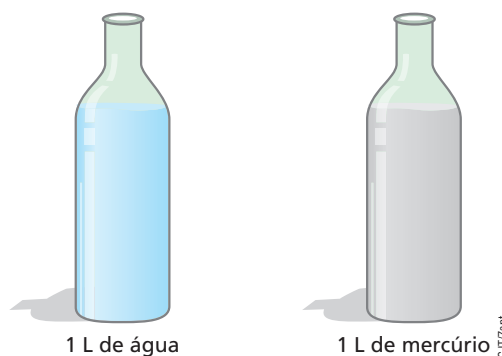
Do mesmo modo, para medir o comprimento de uma corda, você precisa de outro comprimento tomado como unidade: o metro, por exemplo. Assim, você pode determinar quantos metros o comprimento da corda contém.

Tudo aquilo que pode ser medido chama-se **grandeza**. Podemos, então, dizer que:

> **Medir** uma grandeza significa encontrar um número que indique quantas vezes ela contém uma unidade de medida.

Uma primeira noção de massa

Sem muito rigor, podemos dizer que a massa de um corpo é uma grandeza física associada à quantidade de matéria nele existente. Você provavelmente já sabe que os corpos são constituídos de átomos e que num átomo existem partículas denominadas prótons, nêutrons e elétrons. Como a quantidade de matéria existente em um elétron é muito pequena, quando comparada com a de um próton ou com a de um nêutron, dizemos que a massa de um átomo é praticamente igual à soma das massas de seus nêutrons e de seus prótons. Do mesmo modo, a massa de um corpo, como uma pedra, por exemplo, é praticamente igual à soma das massas de todos os seus prótons e nêutrons.

É fundamental que você não confunda massa com volume. Considere, por exemplo, 1 litro de água e 1 litro do metal líquido chamado mercúrio.

Observando a ilustração acima, note que o volume de água é igual a 1 litro e o de mercúrio também. A massa de mercúrio, entretanto, é quase 14 vezes a massa de água. Isso quer dizer que 1 litro de mercúrio tem um total de prótons + nêutrons quase 14 vezes a quantidade de prótons + nêutrons existente em 1 litro de água.

Um breve histórico do metro

O metro já foi definido de vários modos diferentes e cada vez mais sofisticados. Inicialmente, foi definido como um décimo milionésimo $\left(\frac{1}{10^7}\right)$ do arco que vai do polo Norte ao equador, ao longo do meridiano de Paris. Assim, a circunferência máxima do planeta, supondo-o esférico, mede $4 \cdot 10^7$ m.

Em 1889, foi construído um modelo do padrão de comprimento que passou a ser um padrão internacional, adotado por todos os países: uma barra de platina-irídio sobre a qual foram feitas duas marcas. A distância entre essas duas marcas corresponde ao metro padrão, à temperatura de 0 °C.

Atualmente, o metro é definido de modo muito mais preciso: 1 metro é o comprimento percorrido pela luz no vácuo durante $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo.

Leitura

Jarda, pé e polegada

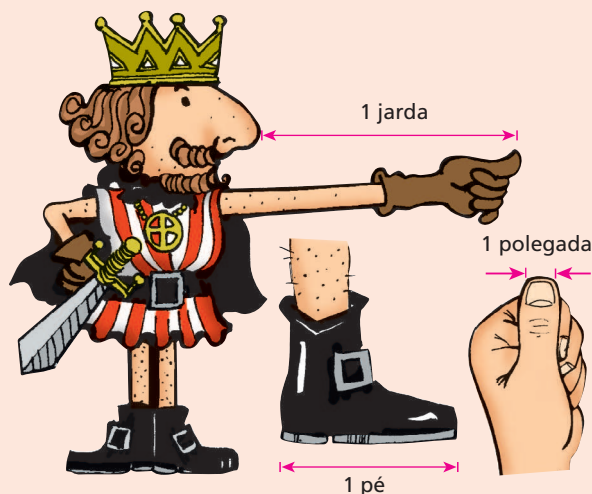
Antigamente, cada país definia suas próprias unidades de medida, mas isso trazia dificuldades no intercâmbio entre eles. Além disso, as unidades eram definidas quase sempre com falta de rigor e até mesmo de bom senso. Imagine o problema que teríamos hoje, quando o intercâmbio é muito maior, se cada país continuasse agindo dessa forma.

Na Inglaterra, por exemplo, eram usadas as seguintes unidades de comprimento:

- **Jarda**: definida como a distância entre o nariz do rei e a extremidade de seu polegar;
- **Pé**: correspondia ao comprimento do pé do rei;
- **Polegada**: equivalia à largura do polegar do rei.

Note o problema: quando o rei era substituído, as unidades mudavam!

Esse problema existia não só com as unidades de comprimento, mas também com as unidades de várias outras grandezas.

Hoje, a situação é diferente. Existe um conjunto de unidades muito bem definidas, oficialmente adotado por todos os países: é o **Sistema Internacional de Unidades**, também conhecido pela abreviatura SI. Nesse sistema, a unidade de comprimento é o **metro (m)**, a unidade de massa é o **quilograma (kg)** e a unidade de tempo é o **segundo (s)**. No transcorrer deste curso de Física, você conhecerá as unidades do SI para medir as demais grandezas (velocidade, força, energia, temperatura, dentre outras).

Algumas unidades dos países de língua inglesa e sua relação com o SI

Aquelas estranhas unidades inglesas que você viu anteriormente, e mais algumas outras, ainda são usadas principalmente pelos países de língua inglesa; porém, hoje elas têm uma relação bem definida com o sistema métrico:

- 1 polegada = 2,54 cm
- 1 jarda = 91,44 cm
- 1 pé = 30,48 cm
- 1 milha marítima = 1852 m
- 1 milha terrestre = 1609 m

Mesmo no Brasil, essas unidades são bastante usadas. De fato, na aviação, as altitudes são medidas em pés; os diâmetros dos canos das redes hidráulicas são muitas vezes expressos em polegadas, o mesmo ocorrendo com os diâmetros das barras de ferro usadas na construção civil; também as telas dos televisores têm suas dimensões dadas em polegadas.

Representação de cano de PVC rígido, para rosca, conhecido comercialmente por "cano de $\frac{3}{4}$ de polegada".

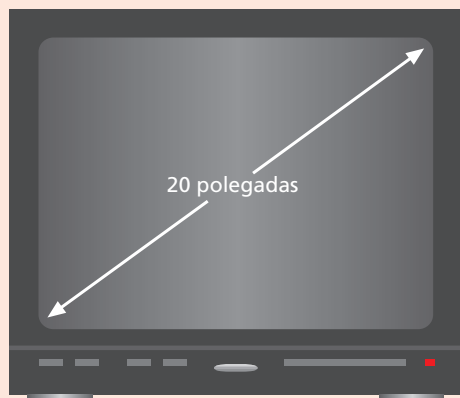



Ilustração de um televisor de 20 polegadas.

Prefixos que acompanham unidades de medida

Como você já sabe, a unidade oficial para medir comprimentos é o metro. Entretanto, não é cômodo medir nessa unidade comprimentos muito maiores ou muito menores que ele. Por isso, você precisa aprender a lidar com múltiplos e submúltiplos do metro.

Por exemplo, é mais adequado:

- medir o comprimento de um palito de fósforo em centímetros que em metros;
- medir a espessura de um vidro de janela em milímetros que em metros;
- dar a distância entre duas cidades em quilômetros que em metros.

Com relação à massa de um corpo, o problema se repete.

O grama (g) é uma unidade usada para medir massa. Nem sempre, porém, é adequado usar essa unidade:

- não é comum pedir 3 000 gramas de carne ao açougueiro; em vez disso, pedimos 3 quilogramas;
- na composição do comprimido de um medicamento, é mais adequado, de modo geral, usar o miligrama que o grama.

Note que, nos exemplos dados até aqui, apareceram as palavras **centi**, **mili** e **quilo**, acompanhando as unidades metro e grama. Essas palavras (e também várias outras que você verá a seguir) antepostas a uma unidade de medida são denominadas **prefixos**. Cada prefixo corresponde a uma potência de 10. Por isso, quando usamos um prefixo acompanhando unidades de comprimento, massa, tempo, entre outras, obtemos múltiplos ou submúltiplos dessas unidades.

Os prefixos mais usados estão na tabela a seguir.

Veja alguns exemplos:

$1\ kg = 1 \cdot 10^3\ g = 1\,000\ g$
(1 quilograma é igual a 1 000 gramas)

$1\ mm = 1 \cdot 10^{-3}\ m = 0{,}001\ m$
(1 milímetro é igual a 1 milésimo do metro)

$1\ mg = 1 \cdot 10^{-3}\ g = 0{,}001\ g$
(1 miligrama é igual a 1 milésimo do grama)

$1\ Gm = 1 \cdot 10^9\ m = 1\,000\,000\,000\ m$
(1 gigametro é igual a 1 bilhão de metros)

$1\ cm = 1 \cdot 10^{-2}\ m = 0{,}01\ m$
(1 centímetro é igual a 1 centésimo do metro)

$1\ m = 100\ cm$
$1\ cm = 10\ mm$
$1\ m = 1\,000\ mm$
$1\ km = 1\,000\ m$

Nome do prefixo	Símbolo do prefixo	Potência de 10	Significado do prefixo na forma decimal
giga	G	10^9	1 000 000 000 (bilhão)
mega	M	10^6	1 000 000 (milhão)
quilo	k	10^3	1 000 (mil)
hecto	h	10^2	100 (cem)
deca	da	10^1	10 (dez)
deci	d	10^{-1}	0,1 (décimo)
centi	c	10^{-2}	0,01 (centésimo)
mili	m	10^{-3}	0,001 (milésimo)
micro	µ	10^{-6}	0,000001 (milionésimo)
nano	n	10^{-9}	0,000000001 (bilionésimo)
pico	p	10^{-12}	0,000000000001 (trilionésimo)

Notas:

- O símbolo µ é a letra **mu** (lê-se **mi**) do alfabeto grego.
- O prefixo **quilo** é simbolizado por um **k minúsculo**, diferentemente do que podemos ver com frequência em açougues, feiras, mercearias, supermercados e placas de sinalização de trânsito.

Dois extremos

Para medir distâncias extremamente grandes ou extremamente pequenas, além do uso dos prefixos, também são definidas algumas unidades especiais.

Na Astronomia, por exemplo, usa-se uma unidade de comprimento denominada **ano-luz**, que é a distância percorrida pela luz, no vácuo, durante 1 ano terrestre:

$$1\ \text{ano-luz} = 9{,}46 \cdot 10^{12}\ km$$

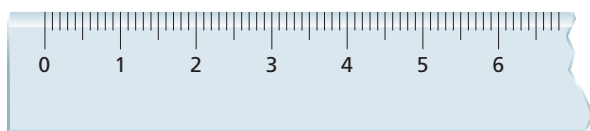
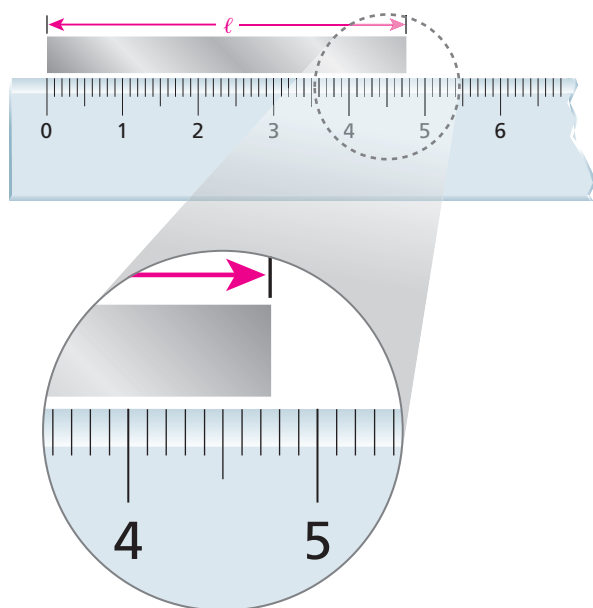
Essa unidade é útil principalmente para medir distâncias entre estrelas.

Já no caso de medições das dimensões de um átomo e de outros comprimentos extremamente pequenos, usa-se uma unidade denominada **angström**, cujo símbolo é **Å**:

$$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ m$$

3. Algarismos significativos

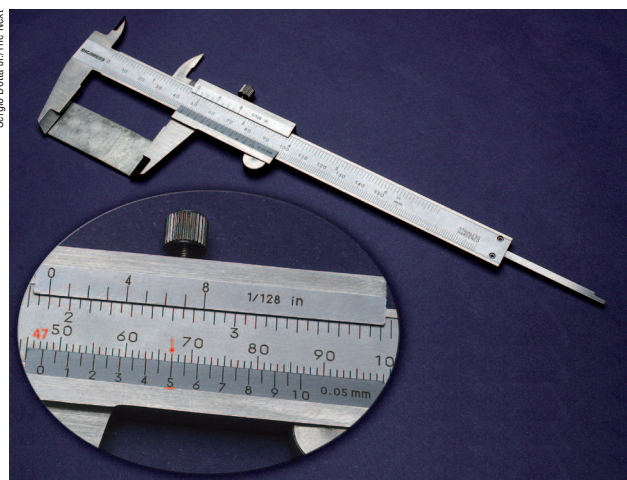
Conceito

Considere uma régua comum, daquelas graduadas em milímetros. Essa régua tem precisão até o milímetro, o que significa dizer que sua menor subdivisão corresponde a 1 milímetro.

Admita agora que, utilizando essa régua, uma pessoa vá realizar a medição do comprimento de uma pequena haste metálica. Para tanto, a origem da escala deverá ser colocada coincidindo com uma das extremidades da haste. Em seguida, realiza-se a leitura.

Vamos supor que o valor apresentado para o comprimento ℓ da haste seja $\ell = 4{,}7569$ cm. De acordo com a figura acima, é muito fácil perceber que, dispondo de um instrumento como essa régua, a pessoa não tem condições de avaliar o comprimento da haste com tamanha precisão. De fato, nem todos os algarismos incluídos na medida $\ell = 4{,}7569$ cm são significativos, isto é, alguns dos algarismos componentes desse resultado foram colocados sem nenhum critério e, por isso, são desprovidos de qualquer significado.

Levando-se em conta a régua usada pela pessoa como instrumento de medida, podemos concluir que a ela só é permitido avaliar até o décimo de milímetro, pois não dispõe de meios para avaliar centésimos ou milésimos de milímetro.

Na medida apresentada, o algarismo 4 está **correto**, pois corresponde à quantidade de centímetros inteiros que o comprimento da haste abrangeu; o algarismo 4 é significativo. O algarismo 7 também está **correto**, pois corresponde à quantidade de milímetros inteiros que o comprimento da haste abrangeu, além dos 4 cm; o algarismo 7 também é significativo. O algarismo 5 corresponde a décimos de milímetro e foi **avaliado**, isto é, a pessoa subdividiu mentalmente em 10 partes iguais o milímetro compreendido entre 4,7 cm e 4,8 cm e julgou que o comprimento da haste abrangeu 5 dessas partes. O algarismo 5, por ter sido avaliado, é **duvidoso** – de fato, outra pessoa que tivesse realizado a mesma medição poderia julgar que o número de décimos de milímetro é 4 ou talvez 6 –, porém, como o algarismo 5 **pôde** ser avaliado, ainda é significativo.

Os algarismos que seguem o 5 (6 e 9), no entanto, não devem estar presentes na medida porque não é possível lê-los nem sequer avaliá-los. O algarismo 6 corresponde a centésimos de milímetro, e o 9, a milésimos. A pessoa que utiliza uma régua graduada em milímetros para fazer uma medição como essa não dispõe de recursos para tal avaliação. Nesse caso, os algarismos 6 e 9 não são dotados de significado e, portanto, não são significativos. Só seria possível aumentar a quantidade de algarismos significativos se o comprimento da haste fosse medido usando um instrumento de maior precisão. É o caso, por exemplo, de um paquímetro, que permite a leitura correta dos décimos de milímetro e a avaliação dos centésimos de milímetro.

Sérgio Dotta Jr./The Next

Podemos dizer, então, que a precisão de uma medida está associada à quantidade de algarismos significativos nela presentes.

Resumindo, a medida descrita no exemplo é composta de três algarismos significativos: o 4, o 7 e o 5, sendo os dois primeiros corretos e o terceiro, avaliado.

Algarismos significativos, em uma medida, são aqueles que sabemos estarem corretos e mais um, e apenas um, avaliado (duvidoso).

Assim, dizemos que a medida do comprimento da haste metálica é $\ell = 4{,}75$ cm.

Vamos, agora, converter a medida $\ell = 4{,}75$ cm em quilômetros. Obtemos: $\ell = 0{,}0000475$ km. Se inicialmente a medida dada em cm apresentava três algarismos significativos, agora, expressa em km, com quantos ficou?

Como a precisão da medida não foi alterada, pois nenhum outro instrumento foi usado para obtê-la, a quantidade de algarismos significativos continua igual a três.

Os zeros à esquerda do 4 servem apenas para posicionar a vírgula que mudou de lugar em virtude da nova unidade em que a medida de ℓ está expressa. Assim, os zeros que precedem o 4 não são algarismos significativos.

Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não constituem algarismos significativos.

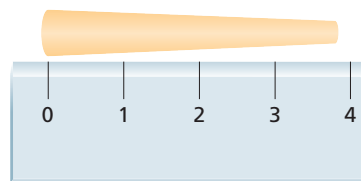
Considere agora um estudante que, dispondo de uma balança graduada em décimos de quilograma, realize a medição da massa **m** de um material qualquer. Admitamos que o valor encontrado para a massa tenha sido m = 2,30 kg.

Quantos algarismos significativos compõem a medida de **m**?

A medida de **m** é composta de três algarismos significativos. O algarismo 2 é correto e o mesmo ocorre com relação ao 3. O algarismo 0 (zero) foi avaliado e é, também, significativo. Você deve estar se perguntando: zero é ou não algarismo significativo? Depende. Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero não são significativos, porém:

Zeros à direita do primeiro algarismo diferente de zero constituem algarismos significativos, desde que estejam enquadrados na definição apresentada.

Nota:

- Observe a figura:

A figura ilustra a medição do comprimento de um pedaço de giz, usando-se uma régua graduada em centímetros, sem subdivisões em milímetros.

Podemos ler apenas a quantidade de centímetros, que é 3 (algarismo correto), mas devemos também avaliar o número de décimos de centímetros, que é cerca de 8 (algarismo duvidoso). Assim, podemos expressar o comprimento do pedaço de giz: 3,8 cm. Note que qualquer outro algarismo escrito após o 8 seria um "chute", sem nenhum significado.

Algarismos significativos nas operações com medidas

Vamos observar como podemos determinar os algarismos significativos em resultados de adições, subtrações, multiplicações e divisões.

- **Em adições e subtrações:**

Na adição e na subtração de grandezas, devemos deixar a resposta com o menor número de casas decimais que apareceram nas parcelas.

Exemplo 1:

Somar 2,4 kg com 3,28 kg:

$$\begin{array}{r} 2{,}4 \\ +\ 3{,}28 \\ \hline 5{,}68 \end{array}$$

2,4 ⟵ **uma** casa decimal

+ 3,28 ⟵ duas casas decimais

Deixando o resultado com apenas uma casa decimal (menor número de casas) e arredondando o 6 para 7 (porque 8 é maior que 5), obtemos:

$$2{,}4 \text{ kg} + 3{,}28 \text{ kg} = 5{,}7 \text{ kg}$$

Exemplo 2:

Subtrair 2,23 m de 5,673 m:

$$\begin{array}{r} 5{,}673 \\ -\ 2{,}23 \\ \hline 3{,}443 \end{array}$$

5,673 ← três casas decimais

– 2,23 ← **duas** casas decimais

Deixando o resultado com apenas duas casas decimais e mantendo a segunda igual a 4 (porque 3 é menor que 5), obtemos:

$$5{,}673\ \text{m} - 2{,}23\ \text{m} = 3{,}44\ \text{m}$$

Nota:

- Se for 5 o próximo algarismo depois do algarismo a ser arredondado, então este deverá ser arredondado para cima.

• Em multiplicações e divisões:

Na multiplicação e na divisão de grandezas, sugerimos deixar o resultado com o número de algarismos significativos do fator que tiver menos algarismos significativos, podendo-se tolerar até um a mais.

Exemplo 1:

Calcular a área de um retângulo de 3,2 m de largura por 4,293 m de comprimento:

$$\underbrace{4{,}293\ \text{m}}_{\text{quatro algarismos significativos}} \cdot \underbrace{3{,}2\ \text{m}}_{\text{dois algarismos significativos}} \Rightarrow 13{,}7376\ \text{m}^2$$

O resultado deve ser dado com o menor número de algarismos significativos dos fatores, que é 2. Assim, arredondando o 3 para 4 (porque 7 é maior que 5), obtemos 14 m^2. Normalmente, tolera-se um algarismo significativo a mais que o mínimo; nesse caso, teríamos o resultado 13,7 m^2.

Exemplo 2:

Determinar o comprimento de um terreno retangular de 20,2 m de largura, cuja área é igual a 450 m^2:

$$\underbrace{450\ \text{m}^2}_{\text{três algarismos significativos}} : \underbrace{20{,}2\ \text{m}}_{\text{três algarismos significativos}} = 22{,}277228\ \text{m (calculadora)}$$

Devemos deixar o resultado com três algarismos significativos, ou seja, 22,3 m.

Nota:

- A principal finalidade deste item não é exigir o rigoroso respeito aos algarismos significativos em todos os cálculos, mas evitar abusos na quantidade de algarismos presentes nos resultados obtidos. O resultado da divisão de 450 m^2 por 20,2 m não pode ter tanta precisão como os 22,277228 m fornecidos pela calculadora.

4. Grandeza escalar

Uma grandeza é dita **escalar** quando fica totalmente determinada por um **número** e por uma **unidade de medida**.

A área é um exemplo de grandeza escalar. Quando dizemos que um terreno tem 300 m^2, sua área está completamente determinada pelo número 300 e pela unidade de medida m^2 (metro quadrado).

Outro exemplo de grandeza escalar é a temperatura. De fato, temperaturas como 32 °C, 0 °C e –8 °C ficam completamente determinadas pelos números 32, 0 e –8, e pela unidade de medida °C (grau Celsius).

São escalares, também, o comprimento, o volume, o tempo, a massa e a energia, dentre outras.

Quando uma grandeza escalar tem sinal algébrico, podendo assumir valores positivos ou negativos, o número, **sem sinal**, acompanhado da unidade de medida, recebe o nome de **módulo** ou **valor absoluto** da grandeza.

Nota:

- Posteriormente, lidaremos com outra categoria de grandezas: as **vetoriais**. Como veremos, a completa determinação dessas grandezas requer uma orientação espacial, além de um número e de uma unidade de medida.

Introdução à Mecânica

1. Mecânica

Mecânica é a parte da Física que estuda o movimento e o repouso dos corpos, sem levar em conta os movimentos microscópicos que acontecem no interior deles, como oscilações de núcleos atômicos e movimentos de elétrons. Assim, a Mecânica estuda, por exemplo, o movimento de um avião, mas não trata do movimento de agitação de seus átomos e moléculas.

Desde a Antiguidade, o ser humano preocupa-se em explicar os fenômenos que ocorrem na natureza. O movimento dos corpos foi o alvo das primeiras atenções. A Mecânica é a mais antiga das partes da Física, mas não se sabe ao certo quando começou seu desenvolvimento.

Podemos citar Aristóteles, Arquimedes, Ptolomeu, Copérnico, Galileu, Kepler, Newton e Einstein como alguns dos grandes expoentes na evolução da Mecânica.

2. As partes da Mecânica

Por conveniência didática, o estudo da Mecânica é dividido em três partes: Cinemática; Dinâmica; Estática.

- A **Cinemática** é a parte da Mecânica que trata do repouso e do movimento apenas descrevendo-os, isto é, sem preocupar-se com as causas que determinam o estado de repouso ou as características do estado de movimento. As grandezas físicas fundamentais de que a Cinemática se vale são o **comprimento** e o **tempo**.

Iniciamos a Cinemática pela determinação da **posição** de uma partícula. A variação ou não da posição com o tempo leva à definição de uma nova grandeza, denominada **velocidade**. A variação ou não da velocidade, por sua vez, implica a definição de outra grandeza, que é a **aceleração**.

O curso de Cinemática apresentará dois enfoques distintos: cinemática escalar e cinemática vetorial.

Cinemática escalar: em que os movimentos são descritos por meio de grandezas (posição, velocidade e aceleração) definidas escalarmente;

Cinemática vetorial: em que os movimentos são descritos por meio de grandezas (posição, velocidade e aceleração) definidas vetorialmente.

- A **Dinâmica** é a parte da Mecânica que investiga as causas que determinam e modificam as características dos movimentos dos corpos. É, sem dúvida, a essência da Mecânica, pois é na Dinâmica que são estabelecidas as relações entre movimento, massa e força. As grandezas fundamentais para o desenvolvimento dessa parte são, usualmente, o **comprimento**, o **tempo** e a **massa**.

  Grosso modo, pode-se dizer que a Dinâmica explica aquilo que a Cinemática apenas descreve.

- A **Estática** é a parte da Mecânica que estuda especificamente as condições para que ocorra o repouso dos corpos, denominado equilíbrio estático. É, na verdade, uma análise mais aprofundada de uma situação de equilíbrio estudada na Dinâmica.

Leitura

A Cinemática e a Dinâmica

Para exemplificar a diferença entre a Cinemática e a Dinâmica, vamos citar duas das três grandes descobertas do astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), fantásticas tanto pela maneira como aconteceram quanto pelos poucos recursos da época.

Dispondo de observações e medições feitas por outros dois astrônomos, o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) e o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), Kepler concluiu que os planetas do Sistema Solar descrevem órbitas elípticas em torno do Sol e que este ocupa um dos focos das elipses.

Entretanto, Kepler não explicou (nem tinha como) por que as órbitas têm esse formato. Ele simplesmente as **descreveu**, ou seja, tratou os movimentos planetários segundo a Cinemática.

Kepler descobriu também que a divisão do cubo do semieixo maior da elipse (R^3) pelo quadrado do ano, ou seja, do tempo T para completar uma volta em torno do Sol (T^2), dava o mesmo resultado para todos os planetas então conhecidos.

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{constante}$$

Ilustrações com tamanhos e distâncias fora de escala.

O curioso é que ele chegou a essa conclusão simplesmente manipulando os números de que dispunha, fazendo realmente tentativas.

Mais uma vez, Kepler tratou os movimentos planetários segundo a Cinemática: descobriu um fato referente a esses movimentos, mas não explicou o porquê desse fato.

Posteriormente, o físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727), usando leis que ele mesmo descobriu e recursos de cálculo que ele próprio inventou, justificou as descobertas de Kepler: explicou por que as órbitas são elípticas e por que R^3/T^2 é uma constante. Além disso, provou que as órbitas também podem ter outras formas e que aquilo que Kepler descobriu para os planetas do Sistema Solar vale também para o movimento orbital de qualquer astro.

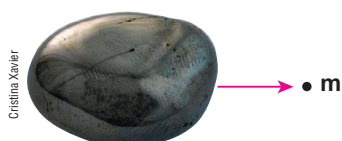
Podemos dizer, então, que Newton tratou os movimentos dos astros segundo a Dinâmica.

Cinemática e dinâmica: descrição e explicação

Thinkstock/Getty Images

Os veículos podem estar em movimento retilíneo ou curvilíneo. Em dado momento, alguns estão mais velozes e outros mais lentos, ou até parados. Alguns podem estar ganhando velocidade, enquanto outros podem estar perdendo. A descrição de tudo isso é objeto de estudo da Cinemática. O que possibilita, do ponto de vista físico, que tudo isso aconteça é objeto de estudo da Dinâmica.

3. O modelo de ponto material

No estudo de vários fenômenos físicos, pode não ser importante o fato de os corpos terem dimensões, mas pode ser importante o fato de terem massa. Nesses casos, podemos usar o modelo de **ponto material**, ou **partícula**, para representar o corpo, o que significa considerá-lo um ponto geométrico no qual supomos concentrada toda sua massa.

Corpo de massa m

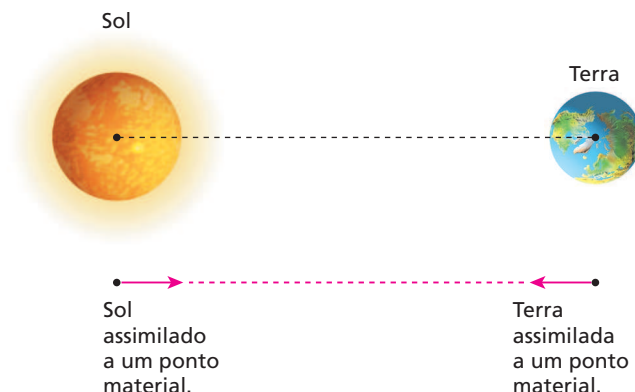
Se as dimensões do corpo forem irrelevantes na situação em estudo, ele poderá ser tratado como um ponto material, também chamado de partícula.

Quando, porém, as dimensões do corpo influenciam o fenômeno que se está estudando, o modelo de ponto material não mais se aplica, e o corpo é chamado de **corpo extenso**.

Antes de exemplificar a aplicação do modelo, adiantamos que é muito comum um mesmo corpo admitir o modelo de ponto material num fenômeno e não o admitir em outro. Além disso, a permissão para o uso do modelo citado não é determinada pelas dimensões do corpo, mas pelo fato de essas dimensões serem ou não importantes na situação em estudo.

Veja alguns exemplos:

Exemplo 1:

Veremos, em Dinâmica, que matéria atrai matéria e que isso se dá de acordo com determinada lei. Existe uma atração, por exemplo, entre o Sol e a Terra.

As setas representam as forças de atração entre o Sol e a Terra. Ilustração com distância e tamanhos fora de escala e cores-fantasia.

No cálculo da intensidade da força com que o Sol e a Terra se atraem, não importam as dimensões de ambos, e sim suas massas. Por isso, nesse cálculo, tanto o Sol quanto a Terra podem ser considerados pontos materiais. Entretanto, quando estudamos a rotação da Terra e suas consequências, temos de tratá-la como um corpo extenso. De fato, coisas diferentes acontecem nas diversas regiões da Terra, em virtude da rotação, por exemplo, quando numa região é dia, em outra é noite. Evidentemente, essas diferenças não poderão ser notadas se representarmos a Terra por um único ponto.

Exemplo 2:

Sabemos que, se empurrarmos uma porta com a mão longe do eixo das dobradiças, é mais fácil abri-la ou fechá-la do que se a empurrarmos com a mão mais perto desse eixo. Assim, as dimensões da porta interessam nessa operação, razão pela qual é preciso considerá-la como um corpo extenso e não como um ponto material.

Exemplo 3:

Considere um peixe movendo-se nas águas de um rio. Se quisermos determinar o tempo que ele leva para percorrer 1 km rio acima, podemos, então, considerá-lo um ponto material.

Parte I

Boyer Roger Viollet/Getty Images

Cinemática

Art Images Archive/Glow Images

Galileu Galilei (1564-1642)

Tópico 1

Bases da Cinemática escalar

Bloco 1

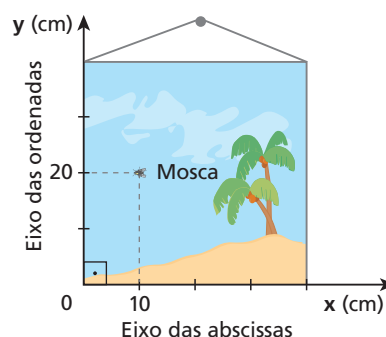
1. Referencial

Certamente, você já percebeu a importância de saber em que lugar estão os objetos da sua casa, como suas roupas e seu material escolar, por exemplo.

Para ser possível descrever o movimento de um corpo, também é necessário saber dizer **onde ele está**, ou seja, conhecer sua **posição**, que sempre é dada em relação a algum outro corpo denominado **referencial**.

> **Referencial** é um corpo (ou um conjunto de corpos) em relação ao qual são definidas as posições de outros corpos.

A definição dessas posições pode ser feita por meio de um sistema de eixos cartesianos ortogonais. A posição de um corpo fica dada pelas coordenadas lidas nesses eixos, sendo expressas em unidades de comprimento.

Considere, por exemplo, uma mosca pousada em um quadro suspenso em uma parede, conforme a figura.

Tomando o próprio quadro como referencial, podemos dar a posição da mosca dizendo que ela está a 10 cm do lado esquerdo e a 20 cm do lado inferior. Se, porém, associarmos ao quadro um sistema de eixos cartesianos Oxy, a posição da mosca em relação ao quadro ficará definida pela abscissa $x = 10$ cm e pela ordenada $y = 20$ cm.

O céu com duas luas?

Tetsuo Segui

É claro que não!

O obturador de uma máquina fotográfica fixada em um tripé foi aberto em determinado horário, registrando uma imagem da Lua. Minutos depois, foi aberto novamente, e outra imagem da Lua ficou registrada no **mesmo** fotograma do filme. Tomando os prédios como **referenciais**, percebemos que, no movimento aparente da Lua, ela mudou de posição.

É oportuno recordar agora algumas **unidades de medida de comprimento**.

A principal unidade de comprimento é o **metro** (**m**), pelo fato de pertencer ao Sistema Internacional de Unidades (SI).

Outras unidades de comprimento frequentemente utilizadas são:

- quilômetro (km): $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}$;
- centímetro (cm): $1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m}$;
- milímetro (mm): $1 \text{ mm} = 0{,}001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$.

2. Tempo

Aceitamos o tempo como um conceito primitivo, isto é, entendemos ou concebemos seu significado sem que necessite ser definido, sem que alguém precise dizer o que ele é.

Associamos o tempo à sucessão de acontecimentos. Nós o sentimos, por exemplo, no envelhecimento dos seres vivos à nossa volta, nas mudanças de regimes políticos, no surgimento de novos estilos musicais, no avanço tecnológico etc.

Medimos o tempo por meio da contagem das repetições de qualquer fenômeno periódico. Podemos medi-lo, por exemplo, contando o número de voltas completas que a Terra efetua em torno do Sol (contagem dos anos), ou o número de rotações que a Terra efetua em torno de seu próprio eixo (contagem dos dias), ou o número de oscilações de um pêndulo, ou ainda o número de voltas de um ponteiro de relógio.

Nota:

- O **segundo (s)** é a unidade de medida de tempo do Sistema Internacional de Unidades (SI). Outras unidades de tempo frequentemente utilizadas são:

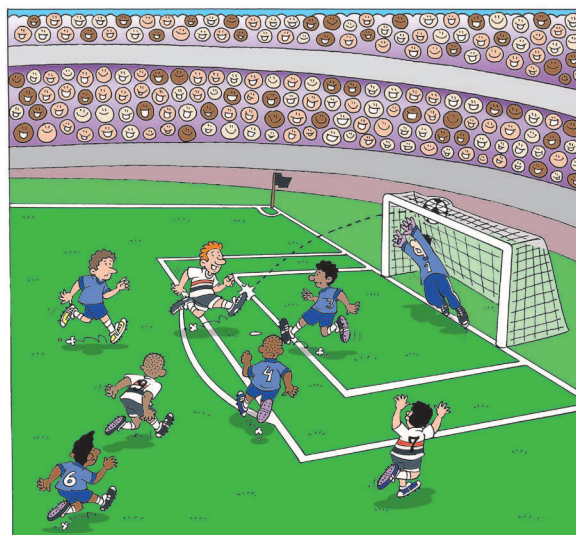
  minuto (min): $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$;

  hora (h): $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$;

  dia: $1 \text{ dia} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$.

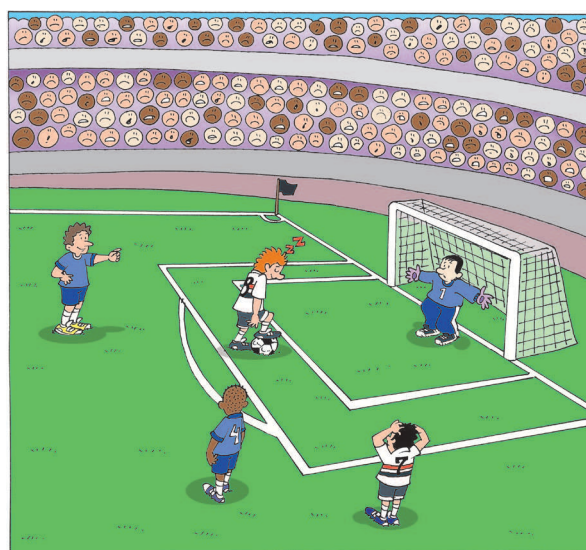
Instante e intervalo de tempo

Fundamentalmente, há dois tipos de perguntas cujas respostas envolvem a grandeza tempo. O primeiro tipo de pergunta pode ser exemplificado assim:

A quantos minutos do primeiro tempo o atacante Nilo marcou o primeiro gol no jogo (fictício) entre as equipes do Alexandria Futebol Clube e do Esporte Clube Assuã?

Essa pergunta solicita a "localização" no tempo de uma ocorrência, de um momento. Esse momento é denominado **instante**.

O instante é determinado por uma quantidade, que simbolizaremos por **t**. Essa quantidade representa quantas unidades de tempo já se passaram desde um instante inicial escolhido arbitrariamente, como $t_0 = 0$, chamado **origem dos tempos**. Assim, no jogo a que nos referimos, $t_0 = 0$ significa o instante em que o jogo se iniciou, ocasião em que o árbitro acionou seu cronômetro. Nessa partida, o primeiro gol de Nilo ocorreu no instante $t_1 = 20$ minutos, o que significa que se passaram 20 minutos desde a origem dos tempos $t_0 = 0$ até o momento do gol.

O segundo tipo de pergunta pode ser exemplificado assim:

Quanto tempo a torcida do Alexandria teve de esperar, desde a marcação do primeiro gol, para que seu atacante Nilo marcasse o segundo?

Observe que essa pergunta solicita um tempo decorrido, ou seja, uma duração, uma sucessão de instantes entre certo instante t_1 e outro instante t_2.

A essa sucessão de instantes damos o nome de **intervalo de tempo** e o representamos por $\mathbf{\Delta t}$ (lê-se delta t). O cálculo de Δt é feito subtraindo-se t_1 (ocorrido antes) de t_2 (ocorrido depois):

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

O primeiro gol de Nilo foi marcado aos 20 minutos do primeiro tempo (t_1 = 20 min), e o segundo, aos 37 minutos do primeiro tempo (t_2 = 37 min). Calculemos, então, o intervalo de tempo decorrido entre os dois gols:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 37 \text{ min} - 20 \text{ min}$$

$$\Delta t = 17 \text{ min}$$

Leitura

Método do carbono 14 para a determinação de idades (datação)

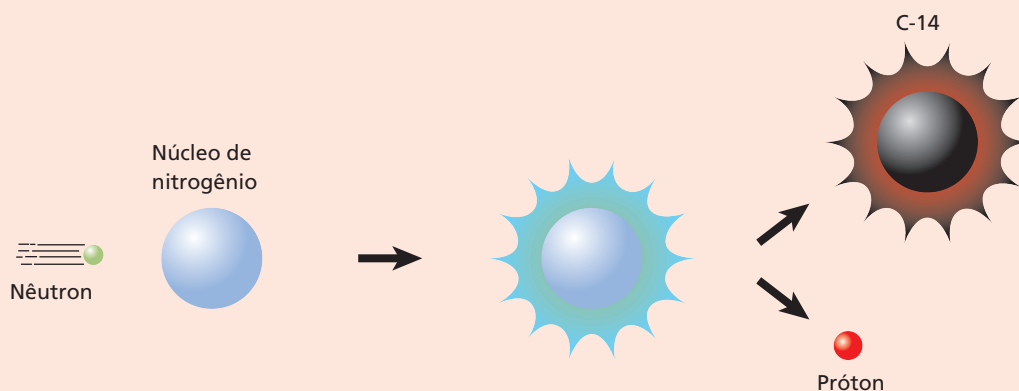
Para você determinar a "idade" de um pacote de café em pó, por exemplo, basta ler a data de fabricação impressa na embalagem. Com a mesma facilidade, você descobre a idade de uma pessoa: basta conhecer sua data de nascimento. Como você determinaria, no entanto, a idade de um fóssil, como a ossada de um animal já extinto, por exemplo? É disso que vamos tratar nesta leitura.

Quase todo o carbono existente na Natureza (pouco menos de 99%) é o chamado carbono 12, cujo núcleo atômico é constituído de 6 prótons e 6 nêutrons. Além dele, há uma pequena quantidade (pouco mais de 1%) de carbono 13 (núcleo com 6 prótons e 7 nêutrons) e uma pequeníssima quantidade de **carbono 14** (núcleo com 6 prótons e 8 nêutrons). Em cada bilhão de átomos de carbono, apenas dez são de carbono 14.

Átomos de um mesmo elemento químico, cujos núcleos têm o mesmo número de prótons e diferentes números de nêutrons, são denominados **isótopos** desse elemento. Assim, o carbono 12, o carbono 13 e o carbono 14 são isótopos do carbono.

Dizemos que o núcleo de um átomo é estável quando ele não se modifica espontaneamente com o passar do tempo: os núcleos do carbono 12 e do carbono 13, por exemplo, são estáveis.

Um núcleo atômico é **instável** ou **radiativo** quando se modifica espontaneamente com o passar do tempo, transformando-se em um núcleo de outro elemento químico. A isso damos o nome de **desintegração radiativa**, fenômeno que acontece com o carbono 14 e com vários outros elementos. Portanto, dos três isótopos do carbono, apenas o carbono 14, que vamos representar por C-14, é radiativo.

A atmosfera terrestre é permanentemente bombardeada pela radiação cósmica proveniente do Sol e de outros corpos celestes. Nessa radiação, que é altamente energética, estão presentes ondas eletromagnéticas, elétrons, prótons, partículas alfa (partículas constituídas de 2 prótons e 2 nêutrons) etc. Quando núcleos estáveis de átomos presentes na atmosfera são atingidos pela radiação cósmica, entre outras ocorrências, há uma liberação de nêutrons de alta energia. Núcleos estáveis de nitrogênio, ao serem bombardeados por esses nêutrons, transformam-se em núcleos radiativos de C-14:

Como se aprende em Química, o gás carbônico (CO_2) é formado a partir do carbono e do oxigênio. Assim, de todo gás carbônico presente na atmosfera, uma pequeníssima quantidade tem o C-14. Na fotossíntese, as plantas e as algas absorvem gás carbônico e, com isso, passam a conter o C-14.

Folha de uma planta

Ao se alimentarem dessas plantas e algas, os animais também passam a ter C-14 em seus tecidos.

Embora núcleos de C-14 estejam se desintegrando e, com isso, deixando de ser C-14, há uma reposição natural, pois, na atmosfera, eles sempre são produzidos. Consequentemente, o percentual desse isótopo, tanto na atmosfera como nos seres vivos, é praticamente constante: dez átomos de C-14 em cada bilhão de átomos de carbono (acredita-se que essa constância seja verdadeira de 70 000 anos atrás até hoje).

Entretanto, quando um ser vivo morre, o percentual de C-14 existente nele passa a diminuir com o tempo, já que deixa de haver reposição. O conhecimento desse percentual permite determinar a idade de fósseis, múmias e papéis antigos, entre outros materiais orgânicos.

No Brasil, o Laboratório de Geocronologia da USP e o Laboratório do Instituto de Física da UFBA fazem datação pelo C-14.

SPL/Latinstock

Datação de osso pelo método de C-14.

Vamos, agora, nos preparar para um cálculo de idade.

A **meia-vida** do C-14, isto é, o tempo para que certa quantidade de núcleos desse isótopo se reduza à metade, por desintegração radiativa, é de 5 730 anos. Vamos representar por $\mathbf{n_0}$ a quantidade de núcleos de C-14 existente em um ser vivo ao morrer e por **n** a quantidade desses núcleos **t** anos após a morte. Vale a seguinte expressão:

$$\ell n\left(\frac{n}{n_0}\right) = -\frac{0{,}693\ t}{\text{meia-vida}} = -\frac{0{,}693\ t}{5\,730},$$

em que $\boldsymbol{\ell n}$ é o símbolo de uma função matemática denominada logaritmo neperiano.

Para determinar o logaritmo neperiano de um número, precisamos de uma calculadora científica.

Suponhamos, por exemplo, que foi encontrado o esqueleto de um mamute numa escavação, com o percentual de C-14 reduzido a 15% em relação a um ser vivo, ou seja, $n = 0{,}15\ n_0$ ou $\frac{n}{n_0} = 0{,}15$. Então:

$$\ell n\ 0{,}15 = -\frac{0{,}693\ t}{5730}$$

Usando a calculadora, obtemos: $\ell n\ 0{,}15 = -1{,}897$

Logo:

$$-1{,}897 = -\frac{0{,}693\ t}{5730} \rightarrow t \cong 15\,700 \text{ anos}$$

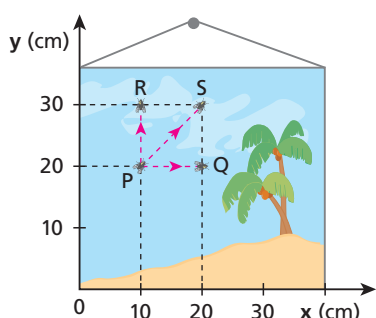
Portanto, a idade do esqueleto encontrado é de aproximadamente 15 700 anos.

O C-14 é adequado para a datação de material orgânico com idade entre 500 e 50 000 anos. Há, entretanto, outros elementos radiativos adequados a outras faixas de idade e aptos não só para a datação de material orgânico, mas também para rochas e até mesmo para vinhos.

Para a datação de rochas, são úteis o K-40 (isótopo radiativo do potássio, com meia-vida igual a 1,3 bilhão de anos) e o U-238 (isótopo radiativo do urânio, com meia-vida igual a 4,5 bilhões de anos). Para a datação do vinho, é útil o trítio (isótopo radiativo do hidrogênio, com meia-vida igual a 12,5 anos).

3. Movimento e repouso

Dizemos que uma partícula se encontra em movimento quando ela muda de posição com o passar do tempo; caso contrário, encontra-se em repouso. Os conceitos de movimento e de repouso são apresentados a partir do conceito de posição. Como a posição é estabelecida em relação a um referencial, concluímos que movimento e repouso também são conceitos relativos a um referencial.

Vamos considerar novamente o exemplo do quadro suspenso em uma parede, apresentado no início desse tópico. Associemos a ele um sistema de eixos cartesianos ortogonais Oxy, com os eixos graduados em centímetros.

Suponha que uma mosca esteja pousada no ponto **P**, cuja posição é dada por x = 10 cm e por y = 20 cm. Se, durante certo intervalo de tempo, a mosca permanece em **P**, ou seja, se ela não muda de posição, dizemos que ela está em repouso em relação ao quadro. Observe que, nesse caso, nenhuma das coordenadas de posição da mosca variou, nem **x** nem **y**.

Entretanto, se em certo intervalo de tempo a mosca muda, por exemplo, de **P** para **Q** ou de **P** para **R** ou, ainda, de **P** para **S**, dizemos que ela está em movimento em relação ao quadro durante esse intervalo. Note que mudar de posição pode significar variar somente **x** ou somente **y** ou **x** e **y** simultaneamente.

Destacamos que:

> Um ponto material está em **movimento** em relação a um referencial quando sua posição varia com o tempo em relação a esse referencial.
>
> Um ponto material está em **repouso** em relação a um referencial quando sua posição não varia com o tempo em relação a esse referencial.

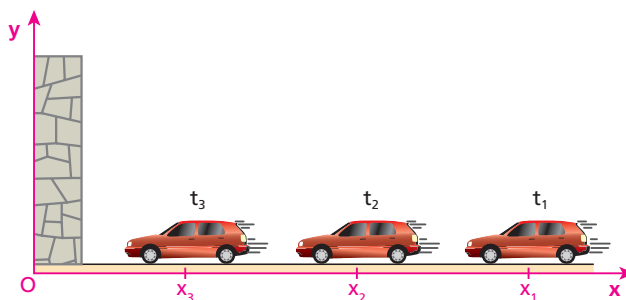
Um mesmo corpo pode estar em movimento em relação a um referencial e em repouso em relação a outro. Nossas casas, por exemplo, estão em repouso em relação à superfície da Terra, pois não mudam de posição em relação ao solo. Em relação ao Sol, entretanto, elas estão em movimento, pois, juntamente com a Terra, mudam de posição em relação ao Sol.

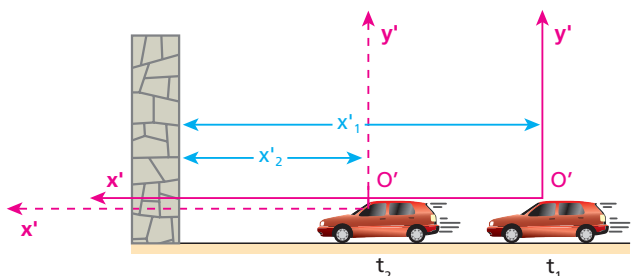
Thinkstock/Getty Images

Na fotografia, o avião situado na parte inferior está sendo abastecido pelo outro em pleno voo. Em relação à Terra, os dois aviões estão em **movimento**, mas, entre si, estão em **repouso** para que o abastecimento seja realizado.

Simetria dos conceitos de repouso e movimento

Se um corpo **A** está em movimento (ou em repouso) em relação a um corpo **B**, então **B** também está em movimento (ou em repouso) em relação a **A**. Isso equivale a dizer que os conceitos de movimento e repouso são **simétricos**.

Considere, por exemplo, um automóvel dirigindo-se frontalmente a um muro. Tomando o muro como referencial e associando a ele um sistema cartesiano Oxy, observamos que a posição do automóvel varia com o tempo, pois sua abscissa **x** está variando. Portanto, **o automóvel está em movimento em relação ao muro**.

Nos instantes t_1, t_2 e t_3, as abscissas do automóvel valem x_1, x_2 e x_3, respectivamente.

Tomando, agora, o automóvel como referencial e associando a ele um sistema cartesiano O’x’y’, observamos que a posição do muro também varia, pois sua abscissa x’ está variando. Portanto, **o muro está em movimento em relação ao automóvel**.

Nos instantes t_1 e t_2, as abscissas do muro valem x'_1 e x'_2, respectivamente.

Peter Walton/Grupo Keystone

Tomando como referencial a arquibancada ou a pista e as paisagens ao seu redor, esse carro está em movimento em um sentido. Tomando o carro como referencial, a arquibancada, a pista e as paisagens também estão em movimento, porém em sentido oposto.

Por que é que...

Quando você está sentado, distraído, no seu carro parado, e o carro ao lado começa a andar, você nunca sabe se é o seu ou o outro e você mete assustado o pé no freio?

Veja, 7 jun. 1995.

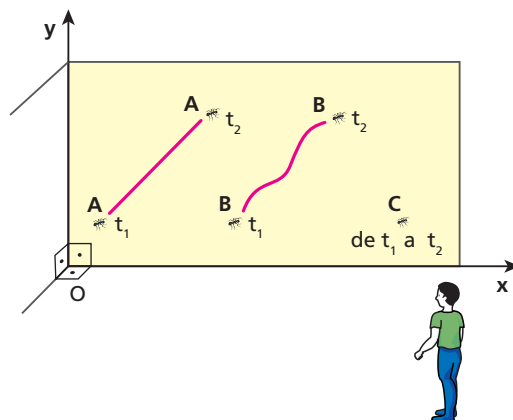
Isso acontece porque os conceitos de repouso e movimento, além de serem relativos a um referencial, também são simétricos. Vamos supor, por exemplo, um automóvel dirigindo-se frontalmente a um muro, e que seu velocímetro esteja marcando 120 km/h. Tomando o muro como referencial, é o automóvel que se move a 120 km/h. Porém, se tomarmos o automóvel como referencial, o muro é que se moverá de encontro a ele, a 120 km/h. Muitas vezes, as pessoas estranham isso porque estão habituadas a usar sempre o solo como referencial. Porém, quando se distraem, passam a aceitar com maior naturalidade o caráter relativo e simétrico dos conceitos de movimento e repouso.

Voltemos à questão proposta. Em relação ao solo, meu carro está em repouso. Se o carro ao lado do meu está se movimentando em relação ao solo, ele também está se movimentando em relação ao meu carro. Assim, por simetria, meu carro também se move em relação a ele. Embora meu carro esteja em repouso em relação ao solo, ao olhar para o carro ao lado estou em movimento, porque ele passa a ser meu referencial e isso me dá a **sensação** de também estar em movimento em relação ao solo. Por isso, piso no freio.

4. Trajetória

Quando um ponto material se movimenta em relação a certo referencial, ele ocupa diferentes pontos à medida que o tempo passa, descrevendo, assim, uma linha, que pode ser reta ou curva.

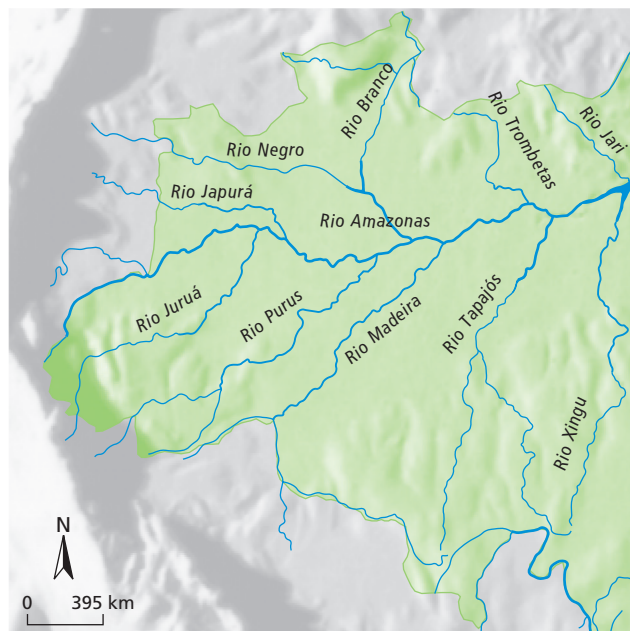
Trajetória de um ponto material em movimento é a linha que ele descreve em relação a um referencial. Caso o ponto material encontre-se em repouso, sua trajetória reduz-se a um ponto.

Imagine, por exemplo, que três formigas **A**, **B** e **C** se mantiveram em uma mesma parede durante certo intervalo de tempo, de t_1 a t_2. A figura a seguir mostra os lugares onde elas estiveram nesse intervalo de tempo.

Concluímos que a trajetória descrita em relação à parede foi retilínea para a formiga **A**, curvilínea para a formiga **B** e reduziu-se a um ponto para a formiga **C**, que não se moveu em relação à parede.

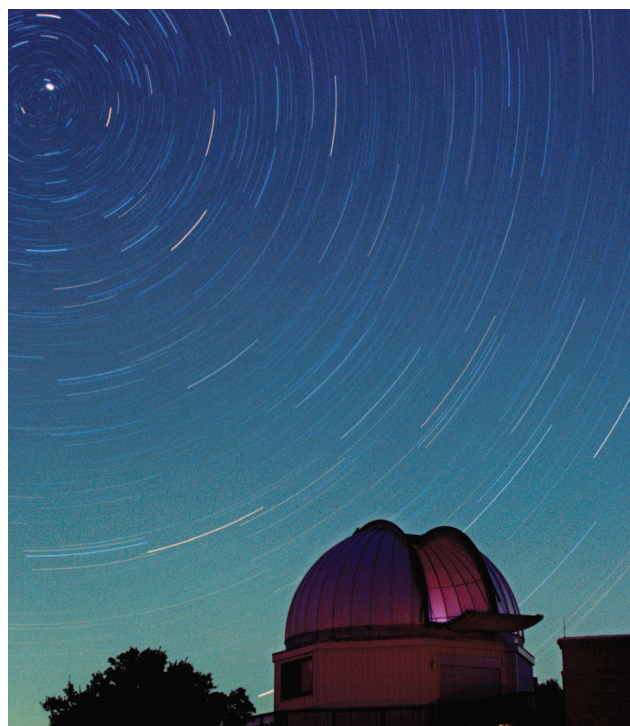
Thinkstock/Getty Images

Rastros produzidos no ar revelam as formas das trajetórias dos cinco aviões: podemos perceber que são praticamente retilíneas dentro dos limites da fotografia.

Imagestate/Diomedia

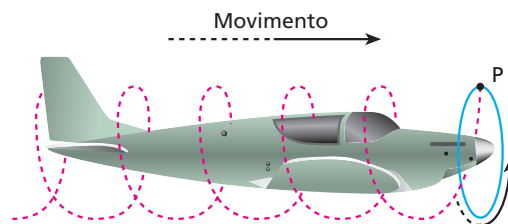
As trajetórias dos veículos que percorrem esse trecho da rodovia são curvilíneas.

Adaptado de: Ísola, Leda & Caldini, Vera. *Atlas Geográfico Saraiva*. São Paulo: Saraiva, 2004.

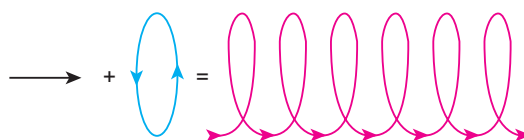
Nesse fragmento de um mapa do Brasil, vemos linhas representando alguns rios. Essas linhas indicam as sinuosas trajetórias descritas pela água, ou seja, os lugares por onde ela passa ao escoar ao longo dos rios.

Frank Zullo/Photo Researchers/Diomedia

Uma câmara fotográfica montada sobre um tripé ficou, durante várias horas da noite, voltada para o céu com o obturador aberto. Em virtude do movimento de rotação da Terra, os diversos astros se moveram em relação a ela, descrevendo as trajetórias observadas na fotografia. Se a câmara estivesse fixa em relação às estrelas, entretanto, as trajetórias seriam completamente diferentes, reduzindo-se praticamente a pontos.

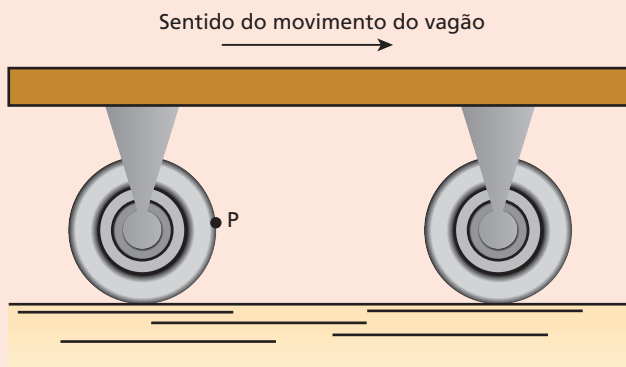
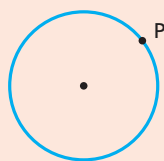
O conceito de trajetória também é relativo, isto é, está vinculado à apreciação de um referencial. Assim, a trajetória descrita por uma partícula, durante certo intervalo de tempo, pode variar de um referencial para outro. Considere, por exemplo, um avião em voo retilíneo e horizontal e um ponto **P**, situado em uma das extremidades da hélice. A trajetória desse ponto **P**, em relação ao avião, é uma circunferência.

A trajetória de **P** em relação ao avião é uma circunferência.

Em relação a um referencial solidário à Terra, entretanto, a trajetória desse mesmo ponto **P** é uma hélice cilíndrica.

A trajetória de **P** em relação à superfície da Terra é uma hélice cilíndrica.

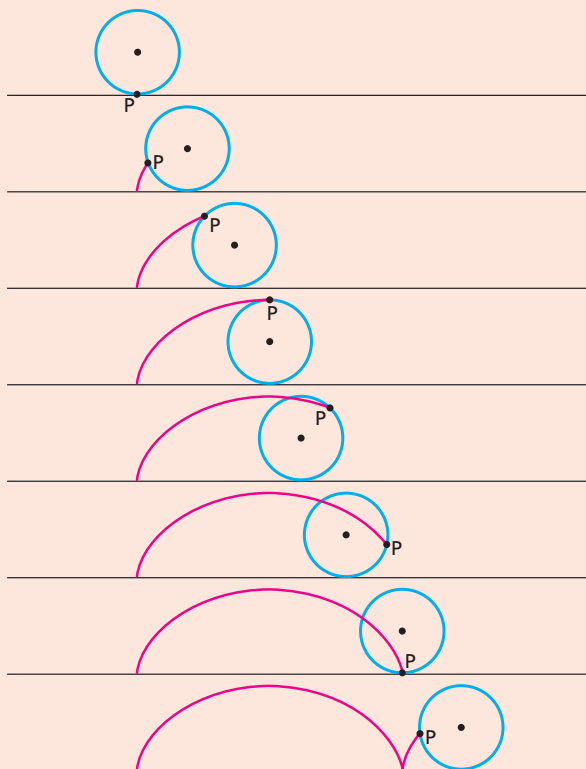
A hélice cilíndrica descrita é o resultado da composição de dois movimentos: um movimento circular e um movimento retilíneo horizontal, perpendicular ao plano do primeiro.

Leitura

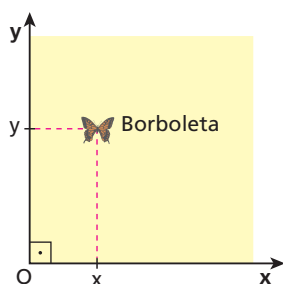
A cicloide

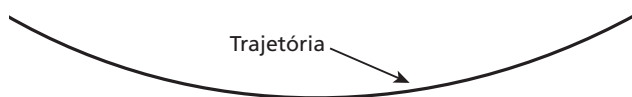
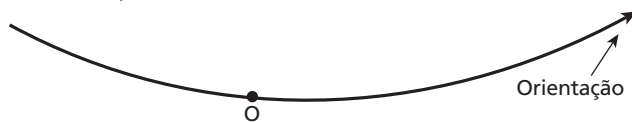
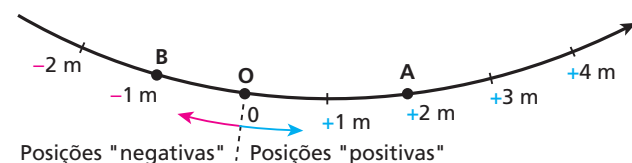
A figura a seguir representa um vagão em movimento em relação ao solo, seguindo trilhos retilíneos e horizontais, de modo que suas rodas rolam sem deslizar. Observe o ponto **P** indicado na periferia de uma delas.

A trajetória do ponto **P** em relação a um referencial no **vagão** é uma **circunferência**, pois, em relação ao vagão, o ponto **P** realiza apenas um movimento circular em torno do eixo da roda.

Trajetória do ponto **P** em relação ao vagão.

Vamos analisar, agora, a trajetória de **P** em relação a um referencial no **solo**. Em relação ao solo, o ponto **P** descreve um movimento circular em torno do eixo da roda e, **ao mesmo tempo**, realiza uma translação horizontal para a direita em virtude do movimento do vagão. A trajetória de **P** em relação ao solo é uma curva denominada **cicloide**, que se vê destacada em vermelho na figura a seguir. (A rigor, essa curva é a **cicloide simples**, pois existem cicloides com aspectos diferentes.)

Você acabou de ver mais um exemplo mostrando que a trajetória de um ponto depende do referencial.

No Tópico 5 da Parte II deste livro, voltaremos a falar da cicloide, apresentando uma interessantíssima propriedade dessa curva.

5. Espaço

Considere uma borboleta pousada em uma parede. A sua posição em relação à parede pode ser dada pelas coordenadas lidas em um sistema de eixos cartesianos ortogonais associados à parede, conforme mostra a figura.

Observe que a borboleta pode movimentar-se livremente pela parede e até mesmo sair dela. Não sabemos de antemão qual a trajetória que ela vai seguir, mas, se ela se movimentar no plano da parede, sempre poderemos dar a sua posição por meio de uma abscissa **x** e de uma ordenada **y**.

Já quando a trajetória a ser descrita por uma partícula for conhecida de antemão e tivermos acesso a ela, poderemos dar a posição da partícula em relação à própria trajetória, dispensando o sistema de eixos. Veja como isso é feito, supondo, por exemplo, que uma partícula vá descrever a seguinte trajetória:

Vamos adotar, sobre a trajetória, um ponto arbitrário **O**, em relação ao qual será dada a posição da partícula. Vamos, também, atribuir uma orientação a essa trajetória.

Em seguida, marcamos trechos de, por exemplo, 1 metro, a partir de **O**.

Desse modo, a posição do ponto **A** é dada por +2 m, o que significa que **A** se encontra a 2 m do ponto **O** de referência, medidos ao longo da trajetória, e na região das posições "positivas". Dizemos que o **espaço** do ponto **A** é +2 m e o representamos assim:

$$s_A = +2 \text{ m}$$

Já no ponto **B**, o espaço é −1 m, significando que o ponto **B** se encontra a 1 m de **O**, medido ao longo da trajetória, e na região das posições "negativas". Assim, temos:

$$s_B = -1 \text{ m}$$

Então, podemos dizer que:

> **Espaço** de uma partícula é a grandeza que determina sua posição em relação à trajetória, posição esta dada pelo comprimento do trecho de trajetória compreendido entre a partícula e o ponto **O**, acrescido de um sinal positivo ou negativo, conforme a região em que ela se encontra. O ponto **O** é denominado **origem dos espaços**. Note que a orientação da trajetória indica o sentido dos espaços crescentes.

Notas:

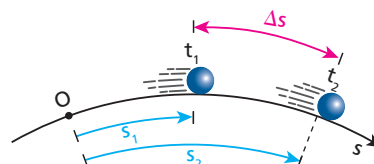
- As **unidades** das grandezas têm símbolos bem determinados. O Sistema Internacional de Unidades estabelece, por exemplo, que o símbolo do metro é **m** e o do quilograma é **kg**. As grandezas, entretanto, não têm símbolos oficiais. Assim, cada **grandeza** pode ser simbolizada por qualquer letra. Por isso, podemos encontrar a grandeza **espaço** simbolizada por **e**, **S**, **x**, **y**, dentre outras.
- Por uma questão de simplificação, frequentemente usaremos a expressão "sentido da trajetória" em vez de "sentido em que a trajetória está orientada".

Emerson Charles

Esta fotografia foi tirada no instante em que o automóvel estava no km 35 de uma rodovia. Então, seu espaço **s** era igual a 35 km, o que significa que ele estava a 35 km do km 0 (marco zero) da rodovia, medidos ao longo dela.

6. Variação de espaço e distância percorrida

Variação de espaço (ou deslocamento escalar)

Observe, na figura abaixo, uma partícula que se desloca do instante t_1, em que o espaço vale s_1, até o instante t_2, em que o espaço vale s_2.

A variação de espaço entre t_1 e t_2 é dada por:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

Observe que, das duas posições consideradas, uma é inicial e outra é final. Assim, a **variação de espaço** é o espaço na posição final menos o espaço na posição inicial.

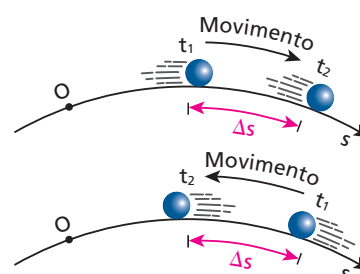
É importante notar que, se a posição inicial e a posição final coincidirem, teremos Δs igual a zero. Se a partícula mover-se no sentido da trajetória, s_2 será maior que s_1 e, portanto, Δs será **positivo**. Entretanto, se a partícula mover-se em sentido contrário ao da trajetória, s_2 será menor que s_1 e, assim, Δs será **negativo**.

Distância percorrida

Distância percorrida é uma grandeza que informa quanto a partícula efetivamente percorreu entre dois instantes, devendo ser calculada sempre em valor absoluto.

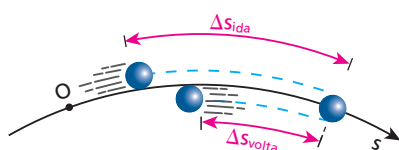
É preciso considerar dois casos:

1º caso: A partícula desloca-se sempre num mesmo sentido

Nesse caso, a distância percorrida é igual ao módulo da variação do espaço.

Na primeira figura, Δs é positivo. Na segunda, Δs é negativo. Entretanto, nas duas figuras, temos:

$$\text{Distância percorrida} = |\Delta s|$$

2º caso: A partícula inverte o sentido de seu movimento

Nesse caso, a distância percorrida é calculada somando-se os módulos da variação de espaço em cada sentido, isto é, o Δs na ida com o Δs na volta, ambos tomados em módulo:

$$\text{Distância percorrida} = |\Delta s_{ida}| + |\Delta s_{volta}|$$

7. Função horária do espaço

Chama-se **função horária do espaço** toda expressão que permite obter o valor do espaço num instante qualquer do movimento. Se, por exemplo, é dado que os espaços de uma partícula variam com o tempo conforme a expressão:

$$s = 2t + 10$$

válida no Sistema Internacional de Unidades (SI), podemos calcular o espaço em qualquer instante do movimento. Por exemplo:

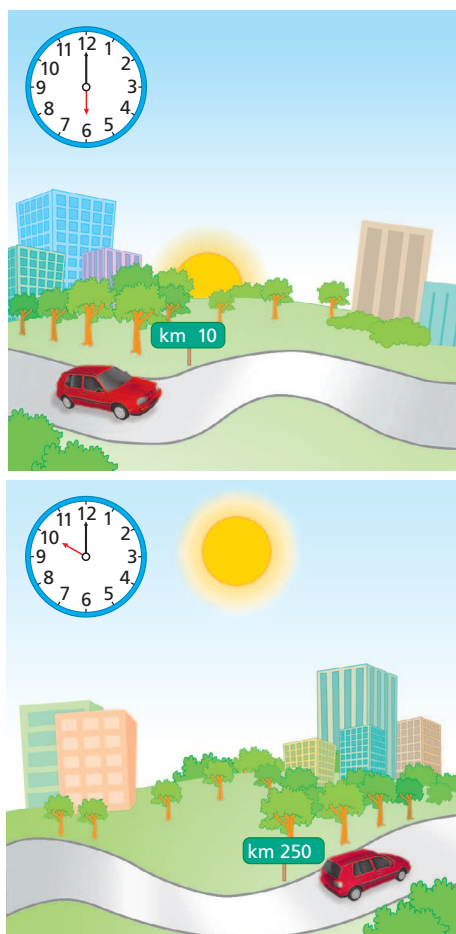
- para $t = 0 \Rightarrow s = 2(0) + 10 \Rightarrow s = 10$ m;
- para $t = 1$ s $\Rightarrow s = 2(1) + 10 \Rightarrow s = 12$ m;
- para $t = 2$ s $\Rightarrow s = 2(2) + 10 \Rightarrow s = 14$ m.

Essa expressão é a função horária do espaço para o movimento da partícula.

Observe que essa função nos permite determinar também em que instante o espaço assume um determinado valor. Se quisermos saber, por exemplo, o instante em que o espaço vale 60 m, faremos:

$$s = 60 \text{ m} \Rightarrow 60 = 2t + 10 \Rightarrow t = 25 \text{ s.}$$

8. Velocidade escalar média

Observe as figuras:

De acordo com as figuras, um automóvel partiu às 6 horas da manhã de uma cidade situada no km 10 de uma rodovia. Seguindo por essa rodovia, esse automóvel chegou às 10 horas da mesma manhã ao seu destino, que era outra cidade situada no km 250. Analisando esses dados, concluímos que a variação de espaço do automóvel foi de 240 km (Δs = 250 km − 10 km = = 240 km) num intervalo de tempo de 4 horas (Δt = 10 h − 6 h = 4 h). Assim, podemos afirmar que, em média, a variação de espaço foi de 60 km por hora. Essa grandeza é denominada **velocidade escalar média** e simbolizada por v_m.

Velocidade escalar média entre dois instantes é a variação de espaço ocorrida, em média, por unidade de tempo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No exemplo anterior, obtivemos $v_m = 60$ km/h. Isso não significa que o automóvel percorreu necessariamente 60 km em cada hora. Pode ser, por exemplo, que na primeira hora de viagem ele tenha percorrido 80 km, na segunda hora, 50 km, na terceira, 40 km e na quarta, 70 km. Por isso dizemos que, em média, ele percorreu 60 km em cada hora.

Com relação às **unidades de medida de velocidade**, note que elas correspondem sempre a um quociente de uma unidade de comprimento por uma de tempo. Assim, no SI, temos:

$$\text{unid (v)} = \frac{\text{unid (s)}}{\text{unid (t)}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Concluímos, então, que a unidade de velocidade, no SI, é o **metro por segundo** (**m/s**).

Frequentemente, usamos também a unidade **quilômetro por hora** (**km/h**) e vale a seguinte relação:

$$3{,}6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$$

De fato:

$$\frac{3{,}6 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{3{,}6 \cdot 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}$$

Quando o movimento se dá no sentido da trajetória, a velocidade escalar média é positiva, pois, nesse caso, também é positiva a variação de espaço Δs. Diz-se, então, que o movimento é **progressivo**, pois os espaços crescem com o tempo.

Thales Trigo

Um carrinho de brinquedo em movimento **progressivo** ao lado de uma fita métrica.

Já quando o movimento se dá em sentido oposto ao da trajetória, a velocidade escalar média é negativa, pois agora Δs também é negativo. Diz-se, então, que o movimento é **retrógrado**, uma vez que os espaços decrescem com o tempo.

Thales Trigo

Um carrinho de brinquedo em movimento **retrógrado** ao lado de uma fita métrica.

9. Velocidade escalar instantânea

Na apresentação do item anterior, um automóvel sofreu uma variação de espaço de 240 km durante um intervalo de tempo de 4 h, o que determinou uma velocidade escalar média de 60 km/h.

Observe que esse resultado não nos permite saber como foi o movimento em diferentes instantes daquele intervalo de 4 horas. De fato, dependendo das condições de tráfego e do comportamento do motorista, o automóvel pode ter corrido mais em certos instantes e menos em outros, mas nada sabemos. Isso quer dizer que o velocímetro do automóvel, isto é, o seu medidor de velocidade, certamente indicou valores diferentes em diferentes instantes. O valor indicado pelo velocímetro em certo instante é o valor absoluto da **velocidade escalar instantânea** do automóvel nesse instante. É essa velocidade que nos faz conhecer de fato o movimento no decorrer do tempo.

No Apêndice deste Tópico, você encontra a expressão matemática que define a velocidade escalar instantânea.

Thinkstock/Getty Images

Esta fotografia foi tirada num instante em que o velocímetro do automóvel indicava 60 km/h. Portanto, nesse instante, a velocidade escalar instantânea tinha módulo igual a 60 km/h. Não é possível conhecer, entretanto, o sinal dessa velocidade, porque não sabemos se o automóvel está se movendo no sentido dos espaços crescentes ou em sentido contrário.

Leitura

Grandes velocidades

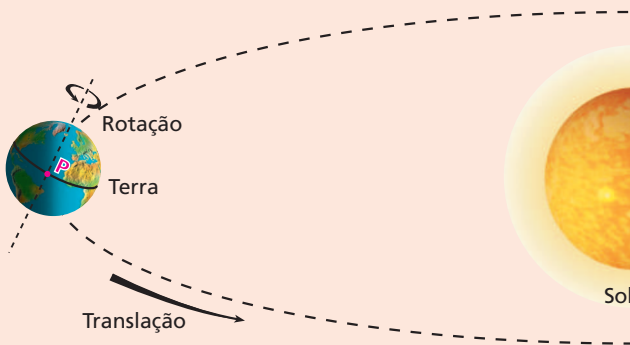



Ilustração com distâncias e tamanhos fora de escala.

No movimento de translação, a Terra desloca-se em torno do Sol com uma velocidade escalar média de 108 000 km/h. Uma pessoa **P**, situada no equador, gira em torno do eixo do planeta a quase 1 700 km/h.

A luz que o Sol nos envia viaja no vácuo a cerca de 300 000 km/s, que é, pelos conhecimentos atuais da Física, o limite de velocidade no Universo.

Os sons e os ruídos produzidos na superfície da Terra propagam-se no ar com velocidades próximas de 340 m/s.

Que velocidade!

Alain Marcay/PHOTONONSTOP/Diomedia

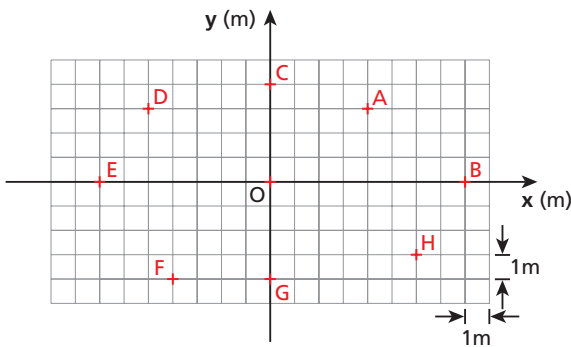
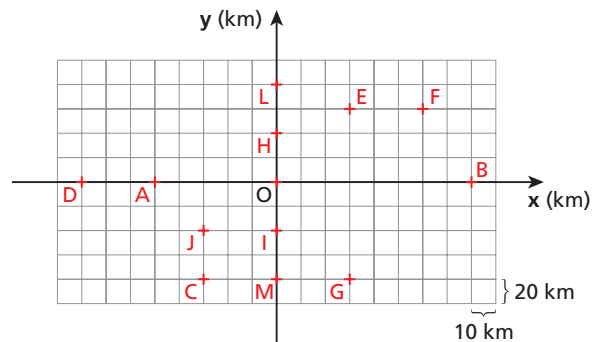
O TGV (*train à grande vitesse*) atingiu a velocidade recorde de 574,8 km/h em abril de 2007.

Thinkstock/Getty Images

O guepardo (ou chita), o mais veloz dos mamíferos, consegue atingir cerca de 110 km/h de velocidade (quase 31 m/s), enquanto um atleta olímpico, nos 100 metros rasos, corre, em média, a 10 m/s.

Exercícios

nível 1

1. Por meio de pares ordenados (x; y), determine as posições dos pontos **O**, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H** no plano defindo pelos eixos cartesianos ortogonais Ox e Oy, de origem **O**. Cada divisão do quadriculado representa 1 m.

2. Na figura a seguir, que representa um terreno plano, observe os pontos assinalados e a escala usada em cada eixo do sistema cartesiano:

Identifique, nessa figura, os pontos cujas posições são dadas pelos seguintes pares ordenados (x; y), com **x** e **y** em quilômetros.

a) (30; 60)

b) (0; 40)

c) (−50; 0)

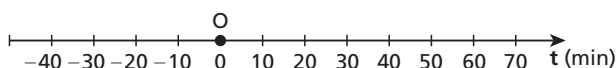
d) (0; −40)

e) (80; 0)

f) (−30; −40)

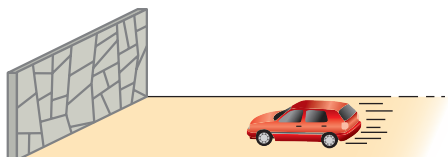
3. No exercício anterior, suponha que um automóvel percorra aquele terreno seguindo a reta dada pela função $y = 80 - 20x$, com **x** e **y** em quilômetros.
Determine a posição, (**x**; **y**) do automóvel quando ele:
a) cruza o eixo **y**;
b) cruza o eixo **x**;
c) tem abscissa **x** igual a 25 km.

4. Retorne ao exercício 2 e suponha que um helicóptero decole de **H** e pouse em **E**, depois decole de **E** e pouse em **F** e, finalmente, decole de **F** e pouse em **B**. Determine a variação de **x**, Δx, e a variação de **y**, Δy, dessa aeronave, nos percursos.
a) de **H** a **E**;
b) de **E** a **F**;
c) de **F** a **B**.
Dê as respostas na forma (Δx; Δy).

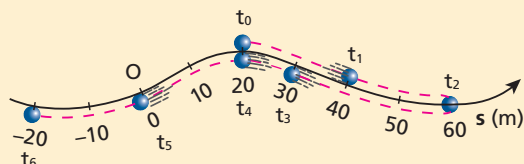
5. O tempo também pode ser representado em um eixo. A origem desse eixo significa o instante $t = 0$ em que foi iniciada uma contagem de tempo. Pode ser o início de um dia (zero hora), por exemplo, mas pode ser um momento qualquer em que um cronômetro foi acionado para começar a medir a duração de algum fenômeno. Após observar o eixo **t** representado a seguir, faça o que se pede.

a) Determine o intervalo de tempo entre os instantes 10 min e 60 min.
b) O que significa o instante – 20 min?
c) Determine o intervalo de tempo entre os instantes – 20 min e 30 min.

6. E.R. Enquanto o professor escreve na lousa:
a) o giz está em repouso ou em movimento em relação à lousa?
b) a lousa está em repouso ou em movimento em relação ao chão?
c) a lousa está em repouso ou em movimento em relação ao giz?

Resolução:
a) Enquanto o professor está escrevendo, o giz muda de posição em relação à lousa, estando, portanto, **em movimento** em relação a ela.
b) A lousa não muda de posição em relação ao chão, estando, portanto, **em repouso** em relação a ele.
c) Os conceitos de movimento e de repouso são simétricos, isto é, se um corpo está em movimento (ou repouso) em relação a outro, este também está em movimento (ou repouso) em relação ao primeiro. Assim, a lousa está em movimento em relação ao giz. De fato, se houver um inseto pousado no giz, por exemplo, o inseto verá a lousa passando por ele.

7. Um automóvel aproxima-se de um paredão, como ilustra a figura:

É **incorreto** afirmar que:
a) o automóvel está em movimento em relação ao paredão.
b) o paredão está em movimento em relação ao automóvel.
c) o paredão está em repouso em relação ao solo.
d) o motorista está em repouso em relação ao automóvel, mas em movimento em relação à superfície da Terra.
e) o paredão está em repouso em relação ao automóvel.

8. O centro da Terra descreve uma trajetória praticamente circular em torno do centro do Sol. A Lua também descreve uma trajetória praticamente circular em torno do centro da Terra.
Apresente uma evidência de que essas duas trajetórias não estão contidas em um mesmo plano.

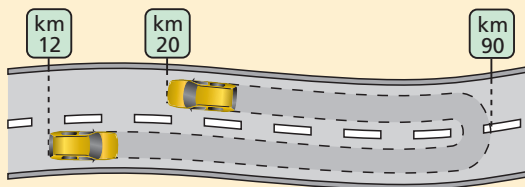
9. E.R. Na figura, temos uma trajetória orientada, onde **O** é a origem dos espaços. Uma partícula entra em movimento no instante t_0 e avança no sentido da trajetória até o instante t_2, quando para. Em seguida, passa a mover-se em sentido contrário ao da trajetória, passando pelo ponto de partida no instante t_4, pela origem dos espaços no instante t_5 e parando no instante t_6.

Para essa partícula, quanto valem os espaços s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 e s_6 respectivamente nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6?

Resolução:
Observando que o espaço informa a posição da partícula em relação à origem dos espaços e não necessariamente quanto ela percorreu, temos:

Em t_0: $s_0 = 20$ m
Em t_1: $s_1 = 40$ m
Em t_2: $s_2 = 60$ m
Em t_3: $s_3 = 30$ m
Em t_4: $s_4 = 20$ m
Em t_5: $s_5 = 0$
Em t_6: $s_6 = -20$ m

Nota:
• Não importa quanto a partícula percorreu, nem o sentido em que ela se move: o espaço informa onde ela **está**.

10. Em certo instante, um automóvel encontra-se no km 120 de uma rodovia. Em outras palavras, o espaço do automóvel nesse instante é igual a 120 km. Isso significa que:
a) o automóvel já percorreu 120 km certamente.
b) o automóvel está em movimento no referido instante, no sentido da trajetória.
c) o automóvel, nesse instante, está em repouso.
d) o automóvel encontra-se a 120 km do km 0, medidos ao longo da trajetória.
e) a distância do local em que o automóvel está até o km 0, medida em linha reta, é 120 km necessariamente.

11. E.R. Um automóvel parte do km 12 de uma rodovia e desloca-se sempre no mesmo sentido até o km 90. Aí chegando, retorna pela mesma rodovia até o km 20.

Calcule, para esse automóvel, a variação de espaço (Δs) e a distância percorrida (d):

a) na ida;
b) na volta;
c) na ida e na volta juntas.

Resolução:

a) Na ida, do km 12 ao km 90, temos:

$\Delta s = s_{final} - s_{inicial} = 90 - 12 \Rightarrow \boxed{\Delta s = 78 \text{ km}}$

$d = |\Delta s| \Rightarrow \boxed{d = 78 \text{ km}}$

b) Na volta, do km 90 ao km 20, temos:

$\Delta s = s_{final} - s_{inicial} = 20 - 90$

$\boxed{\Delta s = -70 \text{ km}}$

$d = |\Delta s| \Rightarrow \boxed{d = 70 \text{ km}}$

c) No movimento de ida e volta, temos:

$\Delta s = s_{final} - s_{inicial} = 20 - 12 \Rightarrow \boxed{\Delta s = 8 \text{ km}}$

$d = d_{ida} + d_{volta} = 78 + 70 \Rightarrow \boxed{d = 148 \text{ km}}$

12. Um caminhão parte do km 30 de uma rodovia, leva uma carga até o km 145 dessa mesma estrada e volta, em seguida, para o km 65. Determine:

a) a variação de espaço do caminhão entre o início e o final do percurso;
b) a distância percorrida pelo caminhão nesse percurso.

13. Com relação ao movimento de um ponto material numa trajetória orientada, são feitas três afirmações:

I. Se o movimento se dá no sentido da trajetória, a variação de espaço é positiva.
II. Se o movimento se dá em sentido oposto ao da trajetória, a variação de espaço é negativa.
III. No Sistema Internacional (SI), o espaço é medido em quilômetros.

Indique:

a) Se apenas as afirmações I e II forem corretas.
b) Se apenas as afirmações I e III forem corretas.
c) Se apenas as afirmações II e III forem corretas.
d) Se as três afirmações forem corretas.
e) Se as três afirmações forem incorretas.

14. A velocidade escalar média de um ônibus que se moveu sempre no mesmo sentido foi de 10 m/s, em certo intervalo de tempo. Isso significa que:

a) o ônibus percorreu necessariamente 10 metros em cada segundo.
b) o ônibus iniciou o movimento no espaço 10 m.
c) é possível que o ônibus tenha percorrido 10 metros em cada segundo.
d) certamente, o ônibus nunca parou durante o intervalo de tempo considerado.
e) o ônibus não pode ter percorrido 15 metros em algum segundo.

15. Dois automóveis, **A** e **B**, partem num mesmo instante de uma cidade **X** com destino a outra cidade **Y**, distante 420 km de **X**. O automóvel **A** faz o percurso em 5 horas e o **B**, em 6 horas. Pode-se afirmar que:

a) o automóvel **B** percorreu uma distância maior que a percorrida por **A**.
b) a velocidade escalar média de **B** é maior que a de **A**.
c) é possível que, em algum momento, **B** tenha sido mais veloz que **A**.
d) **A** esteve sempre na frente de **B**.
e) **A** e **B** não pararam nenhuma vez durante a viagem.

16. E.R. Um motociclista partiu do km 10 de uma rodovia às 8 horas da manhã (t_1) e chegou ao km 250 às 12 horas (t_2). Imediatamente, ele iniciou a viagem de volta, retornando ao km 10 às 14 horas (t_3). Calcule a velocidade escalar média do motociclista entre os instantes:

a) t_1 e t_2;
b) t_2 e t_3;
c) t_1 e t_3.

Resolução:

a) Entre t_1 e t_2, temos:

$\Delta s = s_2 - s_1 = 250 - 10 \Rightarrow \Delta s = 240 \text{ km}$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 12 - 8 \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ h}$

Então:

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{240}{4} \Rightarrow \boxed{v_m = 60 \text{ km/h}}$

Note que essa velocidade resultou positiva, pois o movimento ocorreu no sentido da trajetória.

b) Entre t_2 e t_3, temos:

$\Delta s = s_3 - s_2 = 10 - 250 \Rightarrow \Delta s = -240 \text{ km}$

$\Delta t = t_3 - t_2 = 14 - 12 \Rightarrow \Delta t = 2 \text{ h}$

Então:

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-240}{2} \Rightarrow \boxed{v_m = -120 \text{ km/h}}$

Observe que essa velocidade resultou negativa, pois o movimento ocorreu em sentido contrário ao da trajetória.

c) Entre t_1 e t_3, temos:

$\Delta s = s_3 - s_1 = 10 - 10 \Rightarrow \Delta s = 0$

$\Delta t = t_3 - t_1 = 14 - 8 \Rightarrow \Delta t = 6 \text{ h}$

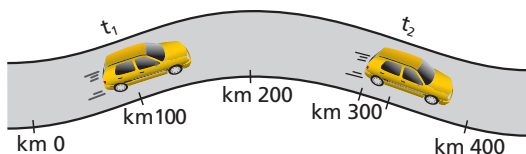
Assim:

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{6} \Rightarrow \boxed{v_m = 0}$

Nota:

- Esse resultado costuma decepcionar as pessoas que esperam da Física uma utilidade prática. De fato, não é esse cálculo que interessa fazer na prática, mas sim outro, que é o quociente da distância percorrida realmente pelo motociclista (480 km: 240 km na ida mais 240 km na volta) pelo intervalo de tempo (6 h).
  Entretanto, o tratamento matemático que estamos destinando ao estudo do movimento é útil e facilita a resolução de muitos problemas reais. Além disso, esse resultado, estranho do ponto de vista prático, tem uma interpretação: uma grandeza que é positiva durante um intervalo de tempo e negativa num outro intervalo pode ter valor médio nulo no intervalo de tempo total.

TF1-019-044_5P_P1T1.indd 34 16/08/12 17:15

17. Um automóvel inicia uma viagem no km 100 de uma rodovia às 10 horas da manhã (t_1), chegando ao km 340 às 14 horas (t_2).

Calcule a velocidade escalar média do automóvel.

18. Um automóvel parte do km 73 da Via Anhanguera às 6 h 45 min e chega ao km 59 às 6 h 55 min. Calcule a velocidade escalar média do automóvel nesse percurso, em km/h.

19. Pedro caminhou 117,45 m durante 2,25 min. Paulo, com velocidade escalar média igual a 0,81 m/s, caminhou durante 2 min 25 s. Calcule:
a) a velocidade escalar média de Pedro, em m/s;
b) a distância percorrida por Paulo, em m.

20. O motorista de uma transportadora recebe seu caminhão e sua respectiva carga com a incumbência de levá-la a um local distante 340 km por rodovia, tendo 6 h de prazo. Após ter percorrido 130 km em 2 h 15 min, teve um pneu estourado, que levou 45 min para ser trocado. Qual deve ser a velocidade média a ser desenvolvida no restante do percurso para a carga chegar no horário?

21. Uma velocidade de 36 km/h corresponde a quantos metros por segundo? E 15 m/s correspondem a quantos quilômetros por hora?

22. Faça uma comparação entre os valores das seguintes velocidades: $V_A = 5$ m/s, $V_B = 18$ km/h e $V_C = 300$ m/min.

23. Um coelho e um jabuti apostaram uma corrida em um percurso de 800 m, partindo emparelhados e no mesmo instante (sete horas da manhã de um dia nublado). Suponha que o jabuti e o coelho corram com velocidades constantes, respectivamente iguais a 1,6 m/min e 24 km/h.

Após percorrer 200 m, o coelho, estimulado pela má *performance* de seu oponente, parou para tirar uma soneca. Quando acordou, retomou imediatamente a corrida e, ao chegar ao final do percurso, teve uma desconcertante surpresa: o jabuti já estava lá comemorando a vitória.
a) Determine quanto tempo (Δt_s) durou a soneca do coelho.
b) O que se pode afirmar sobre a velocidade escalar média do coelho ao longo de todo o percurso?

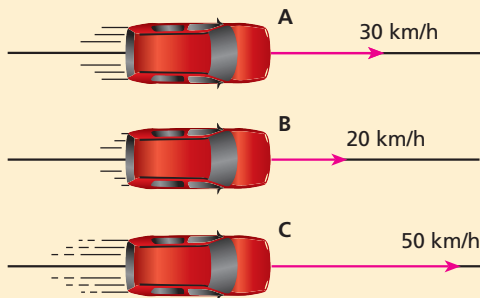
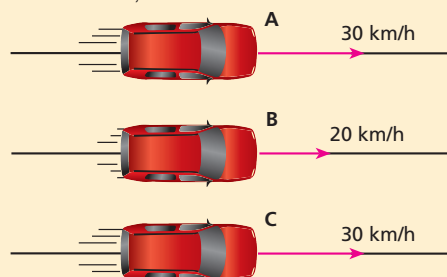
24. (PUC-MG) Numa avenida longa, os sinais de tráfego são sincronizados de tal forma que os carros, trafegando a determinada velocidade, encontram sempre os sinais abertos (onda verde). Considerando-se que a distância entre sinais sucessivos é de 175 m e que o intervalo de tempo entre a abertura de um sinal e a abertura do sinal seguinte é de 9,0 s, a velocidade média com que os veículos devem trafegar nessa avenida para encontrar os sinais sempre abertos é:
a) 60 km/h. b) 50 km/h. c) 70 km/h. d) 40 km/h.

25. (UFRN – mod.) Uma das teorias para explicar o aparecimento do ser humano no continente americano propõe que ele, vindo da Ásia, entrou na América pelo Estreito de Bering e foi migrando para o sul até atingir a Patagônia, como indicado no mapa a seguir. Datações arqueológicas sugerem que foram necessários cerca de 10 000 anos para que essa migração se realizasse.
O comprimento AB, mostrado ao lado do mapa, corresponde à distância de 5 000 km nesse mesmo mapa.
Com base nesses dados, pode-se **estimar** que a velocidade escalar média de ocupação do continente americano pelo ser humano, ao longo da rota desenhada, foi de **aproximadamente**:
a) 0,5 km/ano.
b) 8 km/ano.
c) 24 km/ano.
d) 2 km/ano.

Exercícios — nível 2

26. E.R. Considere três veículos **A**, **B** e **C**. Se **A** está em movimento em relação a **B**, e **B** está em movimento em relação a **C**:
a) é possível que **A** esteja em movimento em relação a **C**?
b) podemos garantir que **A** está em movimento em relação a **C**?

Resolução:

a) É possível. Confirmemos isso por meio do seguinte exemplo: Os veículos **A**, **B** e **C** movem-se no mesmo sentido sobre retas paralelas, com **A** a 30 km/h, **B** a 20 km/h e **C** a 50 km/h.

O veículo **A** corre mais que o veículo **B**. Então, **A** está em **movimento** em relação a **B**.
O veículo **B** corre menos que o veículo **C**. Então, **B** também está em **movimento** em relação a **C**.
O veículo **A** corre menos que o **C**. Então **A** também está em movimento em relação a **C**.
b) Não podemos. E isso pode ser constatado por meio do exemplo a seguir, em que consideramos novamente três veículos **A**, **B** e **C** movendo-se no mesmo sentido sobre retas paralelas, com **A** a 30 km/h, **B** a 20 km/h e **C** a 30 km/h.

O veículo **A** corre mais que o **B**. Então, **A** está em **movimento** em relação a **B**.
O veículo **B** corre menos que o **C**. Então, **B** está em **movimento** em relação a **C**.
Entretanto, **A** corre tanto quanto **C**, e, por isso, **A** está em **repouso** em relação a **C**.

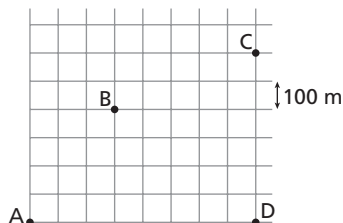
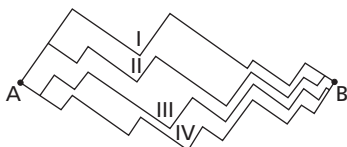
27. Se o veículo **A** está em repouso em relação ao veículo **B**, e **B** está em repouso em relação a outro veículo **C**, podemos afirmar com certeza que **A** está em repouso em relação a **C**?

28. A respeito dos conceitos de movimento e repouso, indique a alternativa **falsa**:
a) O Sol está em movimento em relação à Terra.
b) É possível que um móvel esteja em movimento em relação a um referencial e em repouso em relação a outro.
c) Se um móvel está em movimento em relação a um sistema de referência, então ele estará em movimento em relação a qualquer outro referencial.
d) Se um corpo **A** está em repouso em relação a outro **B**, então o corpo **B** estará também em repouso em relação a **A**.
e) É possível um corpo **A** estar em movimento em relação a dois outros corpos **B** e **C**, e **B** estar em repouso em relação a **C**.

29. De um aeromodelo, voando em linha reta e horizontal com velocidade constante **V**, escapa um parafuso, que cai e chega à pista algum tempo depois. Durante esse tempo, o movimento do aeromodelo não sofreu **nenhuma** alteração. Adote para o parafuso o modelo de partícula e considere os seguintes referenciais:

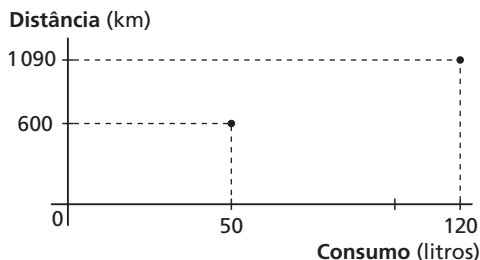
R_1: fuselagem do aeromodelo
R_2: pista

a) Quais são os valores v_1 e v_2 da velocidade do parafuso, quando escapou, em relação ao referenciais R_1 e R_2, respectivamente?
b) É dado que, durante a queda, o parafuso continua com velocidade v_2 **na horizontal**, percorrendo distâncias **D** iguais em intervalos de tempo Δt também iguais. Sabe-se também que, **na vertical**, no decorrer de cada um desses Δt o parafuso percorre primeiro uma distância **d**, e depois, distâncias 3d, 5d, 7d etc. A partir dessas informações, **construa** a trajetória do parafuso em relação ao referencial R_2. A curva que você vai obter é um arco de parábola.
c) Determine a trajetória do parafuso em relação ao referencial R_1.

30. (UFC-CE) A figura abaixo mostra o mapa de uma cidade em que as ruas retilíneas se cruzam perpendicularmente e cada quarteirão mede 100 m. Você caminha pelas ruas a partir de sua casa, na esquina **A**, até a casa de sua avó, na esquina **B**. Dali segue até sua escola, situada na esquina **C**. A menor distância que você caminha e a distância em linha reta entre sua casa e a escola são, respectivamente:
a) 1 800 m e 1 400 m.
b) 1 600 m e 1 200 m.
c) 1 400 m e 1 000 m.
d) 1 200 m e 800 m.
e) 1 000 m e 600 m.

31. (UFPI) A figura ao lado representa quatro percursos ligando as cidades **A** e **B**.

Analise a figura e indique a alternativa correta.
a) O caminho I é menor que o II.
b) O caminho II é menor que o III.
c) O caminho III é menor que o IV.
d) O caminho II é menor que o IV.
e) Os caminhos I, II, III e IV são de igual tamanho.

32. Um avião percorre 1 920 km em 1 hora e 20 minutos. Considere a velocidade do som no ar igual a 340 m/s. Calcule a velocidade escalar média do avião nesse percurso, em m/s, e verifique se ele é ou não supersônico.

33. (Uerj) Uma estrada recém-asfaltada entre duas cidades é percorrida de carro, durante uma hora e meia, sem parada.
A extensão do percurso entre as cidades é de, aproximadamente:
a) 10^3 m. b) 10^4 m. c) 10^5 m. d) 10^6 m.

34. (UFC-CE) Um motorista lançou, no gráfico mostrado abaixo, a distância por ele percorrida (medida em km), em função do consumo de combustível (medido em litros) de seu veículo. Sobre o desempenho médio do veículo (definido pela razão distância percorrida/litro consumido) podemos afirmar:
01. foi melhor nos primeiros 600 km percorridos;
02. entre 600 km e 1 090 km percorridos, foi de 7 km/litro;
04. foi superior a 9 km/litro no percurso representado pelos 1 090 km mostrados no gráfico;
08. no percurso total, é a média aritmética dos desempenhos médios mencionados acima, nos itens 1 e 2.
Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

35. (UFF-RJ) Inaugurada em 1974, a Ponte Presidente Costa e Silva, mais conhecida como Ponte Rio-Niterói, foi projetada para receber pouco mais de 50 mil veículos por dia. Hoje, recebe cerca de 120 mil, de modo que na hora de maior movimento sempre ocorre grande congestionamento.
Considere que um estudante do Rio, vindo para a UFF, percorra os primeiros 7 km da ponte com uma velocidade escalar constante de 70 km/h e gaste 20 minutos para atravessar os 6 km restantes.

Fábio Valongo/AJB/Futura Press

Supondo-se que na volta ele gaste 10 minutos para atravessar toda a ponte, é correto afirmar que a velocidade escalar média na

vinda e a velocidade escalar média na volta têm módulos, em km/h, respectivamente, iguais a:

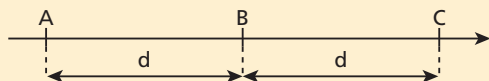
a) 30 e 78.
b) 44 e 78.
c) 30 e 130.
d) 44 e 130.
e) 88 e 78.

36. Uma pessoa viaja num automóvel cujo velocímetro está danificado. Desejando saber sua velocidade média em determinado percurso e sabendo que os postes da rede elétrica dispostos à margem da estrada distam 60 m um do outro, a pessoa começa a marcar o tempo no instante em que passa em frente a um certo poste (que chamaremos de 1º poste). A pessoa constata que transcorreram 45,6 s até passar pelo 20º poste.
Calcule em km/h a velocidade média nesses 45,6 s.

37. Em uma pista de boliche de comprimento **L** igual a 17,0 m, um jogador lançou a bola e 4,30 s após o lançamento ouviu o som emitido na colisão entre ela e os pinos.
Considerando a velocidade do som no ar igual a 340 m/s, calcule o módulo da velocidade média da bola, entre o instante do lançamento e o instante em que colidiu com os pinos.

38. E.R. Sobre uma reta orientada, são dados ordenadamente os pontos **A**, **B** e **C**, tais que AB = BC = d.
Um ponto material move-se nessa reta com velocidade escalar média v_1 de **A** a **B** e com velocidade escalar média v_2 de **B** a **C**. Determine a velocidade escalar média desse ponto material de **A** a **C**.

Resolução:

De **A** a **B**, temos:

$$v_1 = \frac{\Delta s_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{d}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{d}{v_1}$$

De **B** a **C**, temos:

$$v_2 = \frac{\Delta s_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{d}{\Delta t_{BC}} \Rightarrow \Delta t_{BC} = \frac{d}{v_2}$$

No percurso total de **A** a **C**, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s_{AC}}{\Delta t_{AC}} = \frac{2d}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC}} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}}$$

Assim, obtemos:

$$\boxed{v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}}$$

Nota:
- Na situação estudada neste exercício, a velocidade escalar média não é $\frac{v_1 + v_2}{2}$, como se poderia supor. Além disso, ela não depende das distâncias **d**.

39. (UFC-CE) Um automóvel é dirigido ao longo de uma estrada caracterizada por zonas alternadas de velocidades permitidas de 40 km/h e 60 km/h. Se o motorista mantém rigorosamente essas velocidades nas respectivas zonas, e se todas as zonas têm o mesmo comprimento, qual a velocidade média, em km/h, em um trecho correspondente a um número par de zonas?

40. (FCM-MG) Um professor, ao aplicar uma prova a seus 40 alunos, passou uma lista de presença. A distância média entre cada dois alunos é de 1,2 m e a lista gastou cerca de 13 minutos para ser assinada por todos. Qual foi a velocidade média dessa lista de presença?

Bloco 2

10. Aceleração escalar média e instantânea

Considere um automóvel movendo-se numa rodovia, sempre no sentido dos espaços crescentes, isto é, no sentido da orientação da trajetória.

Suponha que às 12 horas e 45 minutos seu velocímetro indique 20 km/h (velocidade escalar instantânea) e que às 12 horas e 50 minutos indique 100 km/h (velocidade escalar instantânea). O primeiro fato a ser notado é que a velocidade escalar instantânea do automóvel variou entre as duas leituras do velocímetro. Entre a primeira leitura e a segunda, temos um intervalo de tempo de 5 minutos. Durante esses 5 minutos, a velocidade escalar instantânea variou de 20 km/h para 100 km/h, ou seja, variou 80 km/h. Então, temos uma variação de velocidade instantânea de 80 km/h em 5 minutos. Isso significa que, em média, a velocidade escalar instantânea variou 16 km/h em cada minuto. Essa grandeza é a **aceleração escalar média**, que simbolizamos por α_m (lê-se alfa m). Assim:

Aceleração escalar média entre dois instantes é a variação de velocidade escalar instantânea ocorrida, em média, por unidade de tempo:

$$\alpha_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Neste ponto, podemos fazer observações parecidas com aquelas feitas no estudo da velocidade escalar. Quando dizemos, por exemplo, que a aceleração escalar média do automóvel citado é de 16 km/h por minuto, isso não significa que a velocidade escalar instantânea tenha, necessariamente, variado 16 km/h em cada minuto. Pode ser que, em algum minuto, a variação tenha sido maior que 16 km/h e, em outro, tenha sido menor. O que sabemos é que, em média, a variação foi de 16 km/h, em cada minuto.

A medida da taxa de variação da velocidade escalar com o tempo, feita num instante, é a **aceleração escalar instantânea**, que simbolizamos por α.

No Apêndice deste Tópico, você encontra a expressão matemática que define a aceleração escalar instantânea.

É importante salientar que o conceito de aceleração escalar diz respeito não apenas aos casos em que o corpo "ganha" velocidade, mas também aos casos em que ele "perde" velocidade.

Com relação às **unidades de medida de aceleração**, note que elas são sempre quocientes de uma unidade de velocidade por uma de tempo. No SI, temos:

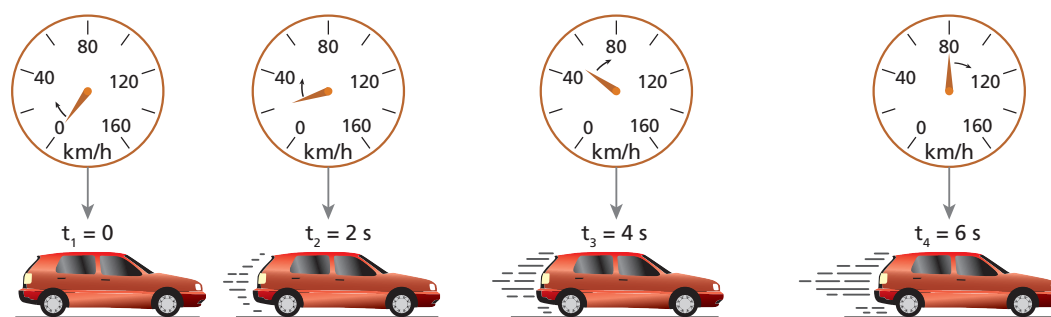
$$\text{unid } (\alpha) = \frac{\text{unid (v)}}{\text{unid (t)}} = \frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = \text{m/s}^2$$

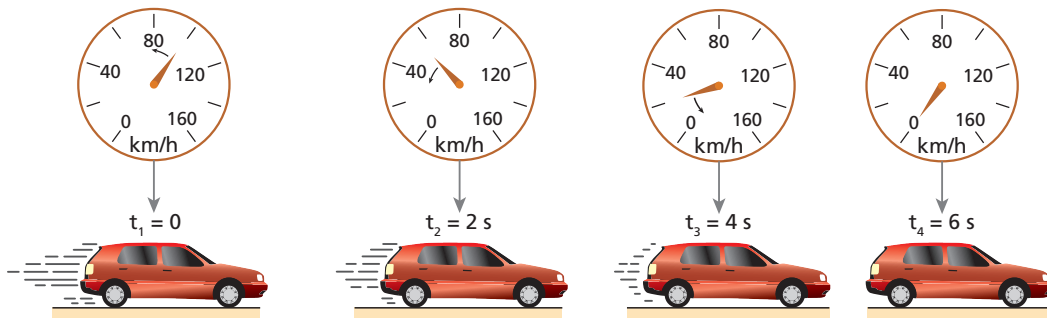
Concluímos, então, que a unidade de aceleração no SI é o **metro por segundo ao quadrado** ($\textbf{m/s}^2$).

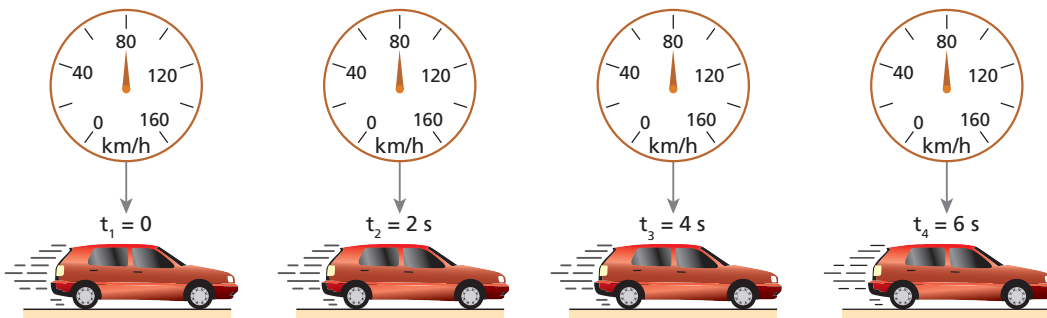
Thinkstock/Getty Images

Quando parte de uma estação, a velocidade escalar de um trem de metrô cresce cerca de 2 m/s em cada segundo, durante certo intervalo de tempo. Então, nesse intervalo, sua aceleração escalar é aproximadamente igual a 2 m/s^2.

11. Movimento acelerado, movimento retardado e movimento uniforme

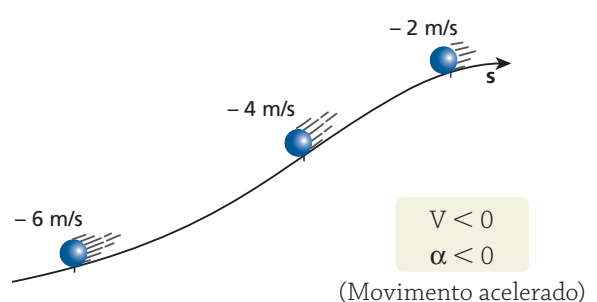
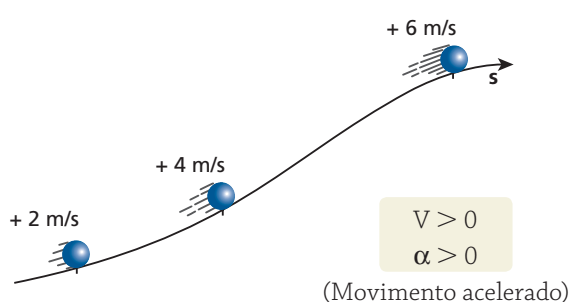
O movimento de uma partícula é dito variado quando sua velocidade escalar instantânea varia no decorrer do tempo. Se, em certo intervalo de tempo, a partícula mover-se cada vez mais rapidamente, isto é, se o módulo de sua velocidade escalar instantânea for sempre crescente, seu movimento variado será do tipo **acelerado**. Assim, o movimento de um automóvel, cujo velocímetro fornece as indicações ilustradas na figura a seguir, é acelerado.

Um movimento é **acelerado** quando o módulo da velocidade escalar instantânea é sempre crescente com o passar do tempo.

Já se uma partícula se mover cada vez mais lentamente durante certo intervalo de tempo, isto é, se o módulo de sua velocidade escalar instantânea for sempre decrescente, seu movimento variado será do tipo **retardado**. É o caso do movimento de um automóvel cujo velocímetro fornece os valores presentes na figura a seguir.

> Um movimento será **retardado** quando o módulo da velocidade escalar instantânea for sempre decrescente com o passar do tempo.

Se considerarmos, no entanto, o movimento em que a indicação do velocímetro é sempre a mesma durante certo intervalo de tempo, não teremos um movimento variado, mas **uniforme**. É o caso do movimento de um automóvel cujo velocímetro fornece, a todo instante, um valor constante, como o indicado na figura a seguir.

> Um movimento será **uniforme** quando a velocidade escalar instantânea for constante e diferente de zero com o passar do tempo.

Observe que, no **movimento uniforme**, **a aceleração escalar é constante e igual a zero**, não importando o valor da velocidade escalar.

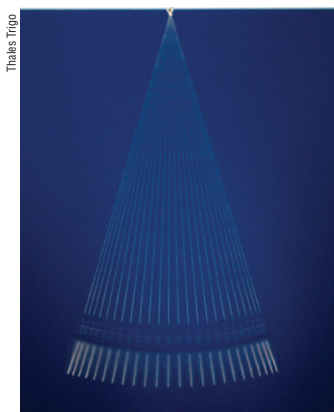
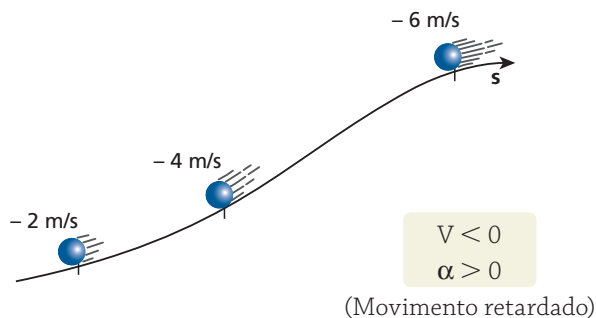
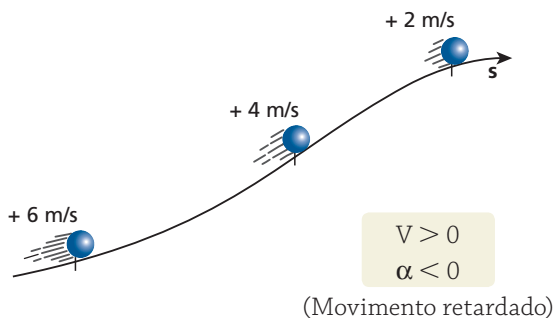
Notas:

- Num movimento **acelerado**, a velocidade escalar e a aceleração escalar têm o **mesmo sinal**, isto é, são ambas positivas ou ambas negativas, como mostram os exemplos a seguir.

• Num movimento **retardado**, a velocidade escalar e a aceleração escalar têm **sinais contrários**, como mostram os exemplos:

$V > 0$
$\alpha < 0$

(Movimento retardado)

$V < 0$
$\alpha > 0$

(Movimento retardado)

Fotografia estroboscópica de um pêndulo em movimento. Na descida, o movimento é acelerado e na subida, retardado.

Exercícios nível 1

41. A luz propaga-se no vácuo a uma velocidade escalar constante, de módulo extraordinariamente elevado: 300 000 km/s. Quanto vale a aceleração escalar da luz nessa propagação?

42. Uma pequena esfera, bastante densa, abandonada nas proximidades da superfície da Terra cai de encontro ao solo com aceleração praticamente constante de módulo aproximadamente igual a 10 m/s^2. Isso significa que, durante a queda:

a) a velocidade escalar da bolinha é constante e seu módulo é igual a 10 m/s.
b) a bolinha percorre sempre 10 metros em cada segundo.
c) a bolinha percorre, em cada segundo que passa, distâncias cada vez menores.
d) a bolinha demora 10 segundos para chegar ao solo.
e) a velocidade escalar da bolinha, tomada em módulo, cresce 10 m/s em cada segundo.

43. A tabela a seguir fornece a velocidade escalar instantânea de um automóvel em alguns instantes:

v (m/s)	40	60	40	20
t (s)	1	5	7	12

Determine a aceleração escalar média da partícula nos seguintes intervalos de tempo:

a) de t = 1 s a t = 5 s;
b) de t = 1 s a t = 7 s;
c) de t = 5 s a t = 7 s.

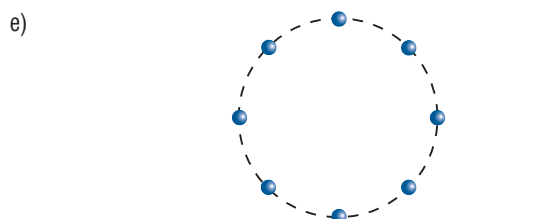
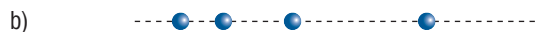
44. Responda se os movimentos das bolinhas são acelerados, retardados ou uniformes, sabendo que o intervalo de tempo entre duas posições consecutivas é sempre o mesmo e que, nos itens **a**, **b** e **c**, as bolinhas se movem para a direita.

a)

b)

c)

d)

e)

Exercícios nível 2

45. Com relação ao movimento variado, são feitas as seguintes afirmações:

01. No movimento acelerado, a velocidade escalar instantânea é sempre crescente com o tempo.
02. No movimento acelerado, o módulo da velocidade escalar instantânea é sempre crescente com o tempo.
04. No movimento retardado, a velocidade escalar instantânea é sempre decrescente com o tempo.
08. No movimento retardado, o módulo da velocidade escalar instantânea é sempre decrescente com o tempo.
16. Um movimento uniforme pode ter aceleração escalar diferente de zero.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

46. Em um teste automobilístico, a velocidade escalar instantânea do veículo variou de 0 a 108 km/h em um intervalo de tempo de 10 s. Calcule a aceleração escalar média do automóvel:

a) em $\frac{\text{km/h}}{5}$ b) em m/s^2

47. Durante um intervalo de tempo Δt_1, um veículo com aceleração escalar média α_1 igual a 3,0 m/s^2 teve sua velocidade escalar instantânea alterada de **0** a **v**. Imediatamente após, durante um intervalo de tempo Δt_2, a velocidade escalar instantânea desse veículo variou de **v** a 2v, com aceleração escalar média igual a 2,0 m/s^2.
Determine a aceleração escalar média do veículo, α_m, no intervalo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$.

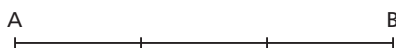
Descubra mais

1. **Em quanto é estimada a idade da Terra?**
2. **Em quanto é estimada a idade do Universo?**
3. **Como podem ser efetuados esses cálculos?**

Exercícios nível 3

48. Um corpo desloca-se numa trajetória orientada, sempre num mesmo sentido. Durante certo intervalo de tempo, o corpo vai de um ponto **M** até um ponto **N** com velocidade escalar média v_1. Durante um novo intervalo de tempo, igual ao anterior, ele vai do ponto **N** até um ponto **Q** com velocidade escalar média v_2.

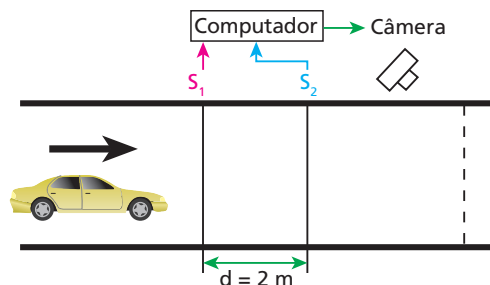
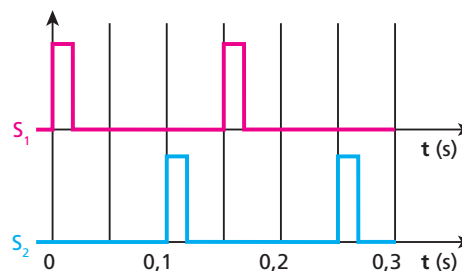
a) Determine, em função de v_1 e v_2, a velocidade escalar média do corpo no percurso de **M** a **Q**.
b) Sendo MQ o deslocamento escalar no percurso total, determine, em função de v_1, v_2 e MQ, o deslocamento escalar MN, de **M** a **N**.

49. Uma partícula desloca-se do ponto **A** até o ponto **B**.

Na primeira terça parte do percurso, sua velocidade escalar média vale v_1; na segunda terça parte, vale v_2, e na terceira, v_3. Determine a velocidade escalar média no percurso total de **A** até **B**.

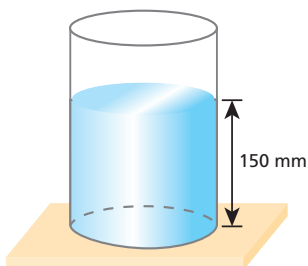
50. Há um bom tempo, para multar motoristas com velocidade superior a 90 km/h, um guarda rodoviário acionava seu cronômetro quando avistava o automóvel passando pelo marco **A** e fazia a leitura no cronômetro quando via o veículo passar pelo marco **B**, situado a 1 500 m de **A**. Um motorista passou por **A** a 144 km/h e manteve essa velocidade durante 10 segundos, quando percebeu a presença do guarda. Que velocidade média ele teve de manter em seguida para não ser multado?

51. (Fuvest-SP) Diante de uma agência do INSS, há uma fila de aproximadamente 100 m de comprimento, ao longo da qual se distribuem de maneira uniforme 200 pessoas. Aberta a porta, as pessoas entram, durante 30 s, com uma velocidade média de 1 m/s. Avalie:

a) o número de pessoas que entraram na agência;
b) o comprimento da fila que restou do lado de fora.

52. (Unicamp-SP) A figura a seguir mostra o esquema simplificado de um dispositivo colocado em uma rua para controle de velocidade de automóveis (dispositivo popularmente chamado de radar).

Os sensores S_1 e S_2 e a câmera estão ligados a um computador. Os sensores enviam um sinal ao computador sempre que são pressionados pelas rodas de um veículo. Se a velocidade do veículo está acima da permitida, o computador envia um sinal para que a câmera fotografe sua placa traseira no momento em que esta estiver sobre a linha tracejada. Para certo veículo, os sinais dos sensores foram os seguintes:

a) Determine a velocidade do veículo em km/h.
b) Calcule a distância entre os eixos do veículo.

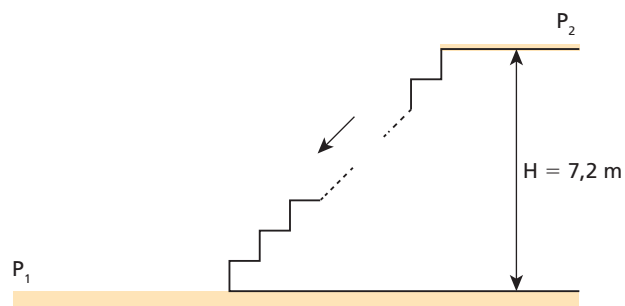
Para raciocinar um pouco mais

53. Num dia chuvoso, um vaso cilíndrico, inicialmente vazio, ficou exposto à chuva o dia todo. Cessada a chuva, verificou-se que o nível da água dentro do vaso estava a 150 mm de altura em relação ao fundo, conforme mostra a figura. Diz-se, então, que ocorreu uma chuva de 150 mm. Essa altura seria diferente se o vaso cilíndrico fosse mais largo, ou seja, se o diâmetro de sua embocadura fosse maior?

54. Um avião decola de Fernando de Noronha às 8 horas da manhã e chega a Rio Branco, no Acre, às 8 horas da mesma manhã! Sabendo que a distância entre essas localidades é de aproximadamente 3 990 km e que o Brasil tem quatro fusos horários, calcule a velocidade escalar média do avião em km/h.

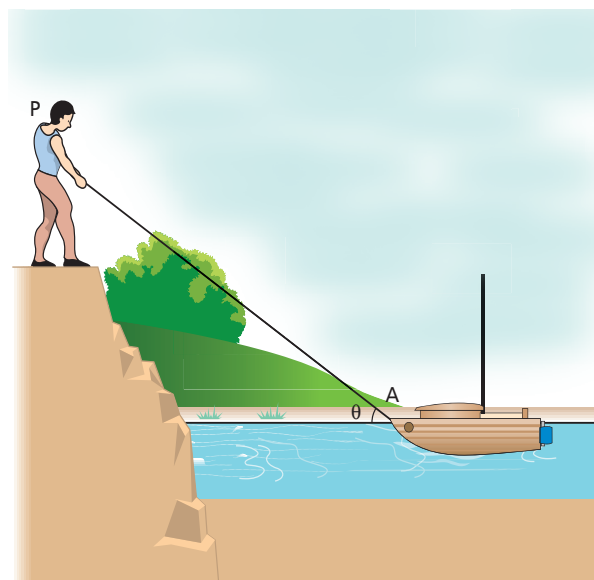
55. Rolan estava em repouso à beira de um trecho plano e horizontal de uma estrada quando começou a chover. Chovia, mas não ventava.

Em relação à estrada, as gotas de chuva chegavam com velocidade constante, de módulo igual a 8 m/s.
Rolan começou a correr em linha reta, atingindo uma velocidade de módulo também igual a 8 m/s, que ele manteve constante.

a) Em relação a Rolan, quando ainda estava em repouso, como era a trajetória de uma das gotas?
b) Trace a trajetória de uma das gotas em relação a Rolan correndo a 8 m/s (constante), para a direita desta página.

56. A figura representa uma larga escada rolante de um *shopping*, que opera para pessoas descerem do segundo andar (piso P_2) ao primeiro andar (piso P_1).
O desnível entre esses pisos é **H**, igual a 7,2 m.

No mesmo instante em que Maria toma a escada para descer do segundo andar ao primeiro, mantendo-se sempre no mesmo degrau, Carlão, que já está no primeiro andar, passa a subir correndo por essa escada e chega a P_2 no mesmo instante em que Maria chega P_1.

a) Compare, em relação aos pisos, o módulo V_c da velocidade média de Carlão na subida, com o módulo V_M da velocidade de Maria na descida.
b) Compare o módulo V'_C da velocidade média de Carlão em relação à escada, na subida, com o módulo V_M da velocidade de Maria em relação aos pisos.
c) Considerando cada degrau com 20 cm de altura, quantos degraus Carlão realmente subiu?

57. Um pescador **P** está sobre um barranco à beira de um lago, puxando seu barco por meio de uma corda amarrada em um ponto **A** do veículo, como está representado na figura:

Iguais comprimentos de corda são recolhidos em iguais intervalos de tempo, ou seja, a corda é puxada com velocidade escalar constante. Seja **V** o módulo dessa velocidade. Determine o módulo da velocidade do barco no instante em que a corda forma um ângulo **θ** com a superfície da água.
Sugestão: Leia o Apêndice deste Tópico.

Apêndice

Velocidade escalar instantânea

Para entender a expressão matemática da definição da velocidade escalar instantânea, considere o seguinte exemplo: uma partícula move-se em obediência à função horária $s = t^2$, válida no SI, e queremos determinar sua velocidade escalar instantânea no instante $t = 1$ s, **sem usar** a expressão $v = v_0 + \alpha\, t$, pois ela se refere a um movimento particular — o MUV —, e o que queremos é uma expressão **geral** para **v**. Para isso, vamos calcular a velocidade escalar média entre $t = 1$ s e, por exemplo, $t' = 2$ s:

$t = 1\text{ s} \Rightarrow s = 1\text{ m}$
$t' = 2\text{ s} \Rightarrow s' = 4\text{ m}$

$\Delta s = 3\text{ m}$
$\Delta t = 1\text{ s}$

Logo:

$$v_m = 3\text{ m/s}$$

Mantendo $t = 1$ s, calculemos v_m, fazendo $t' = 1{,}5$ s:

$t = 1\text{ s} \Rightarrow s = 1\text{ m}$
$t' = 1{,}5\text{ s} \Rightarrow s' = 2{,}25\text{ m}$

$\Delta s = 1{,}25\text{ m}$
$\Delta t = 0{,}5\text{ s}$
Logo:

$$v_m = 2{,}5\text{ m/s}$$

Mantendo $t = 1$ s, mas fazendo $t' = 1{,}1$ s, temos:

$t = 1\text{ s} \Rightarrow s = 1\text{ m}$
$t' = 1{,}1\text{ s} \Rightarrow s' = 1{,}21\text{ m}$

$\Delta s = 0{,}21\text{ m}$
$\Delta t = 0{,}1\text{ s}$
Logo:

$$v_m = 2{,}1\text{ m/s}$$

Agora, com $t = 1$ s e $t' = 1{,}01$ s:

$t = 1\text{ s} \Rightarrow s = 1\text{ m}$
$t' = 1{,}01\text{ s} \Rightarrow s' = 1{,}0201\text{ m}$

$\Delta s = 0{,}0201\text{ m}$
$\Delta t = 0{,}01\text{ s}$
Logo:

$$v_m = 2{,}01\text{ m/s}$$

Mais uma vez com $t = 1$ s, porém com $t' = 1{,}001$ s:

$t = 1\text{ s} \Rightarrow s = 1\text{ m}$
$t' = 1{,}001\text{ s} \Rightarrow s' = 1{,}002001\text{ m}$

$\Delta s = 0{,}002001\text{ m}$
$\Delta t = 0{,}001\text{ s}$
Logo:

$$v_m = 2{,}001\text{ m/s}$$

Observe que começamos os cálculos fazendo **t'** igual a 2 s e depois fomos considerando novos valores de **t'** cada vez mais próximos de **t**. Poderíamos continuar os cálculos usando valores de **t'** ainda mais próximos de **t**. Em linguagem matemática, dizemos que estamos fazendo **t'** tender a **t** ou **Δt tender a zero**. Quando fazemos isso, **s'** tende a **s** e Δs tende a zero. No entanto, o quociente $\Delta s/\Delta t$ tende a 2 m/s, como indicam os cálculos feitos. Assim, lembrando que quanto menor o intervalo de tempo menor é a variação que a velocidade pode sofrer, concluímos que esse valor 2 m/s corresponde à velocidade escalar no instante **t** igual a 1 s.

Em linguagem matemática, temos que:

Velocidade escalar instantânea v em certo instante **t** é o limite para o qual tende o quociente $\Delta s/\Delta t$, calculado entre **t** e **t'**, quando **t'** tende a **t**, ou seja, quando Δt tende a zero.
Simbolicamente:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Aceleração escalar instantânea

Repetindo o tratamento matemático dado à velocidade escalar instantânea, chegamos à seguinte definição:

Aceleração escalar instantânea α em certo instante **t** é o limite para o qual tende o quociente $\Delta v/\Delta t$, calculado entre **t** e **t'**, quando fazemos **t'** tender a **t**, ou seja, quando Δt tende a zero.
Simbolicamente:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Exercícios

58. E.R. A função horária do espaço para o movimento de um ponto material é: $s = 2t^2 - 1$ (SI)
Determine:
a) a função horária da velocidade escalar instantânea;
b) a velocidade escalar no instante 2 s.

Resolução:
a) Num instante genérico **t**, temos: $s = 2t^2 - 1$
Num instante **t'** (maior que **t**), temos: $s' = 2t'^2 - 1$
A velocidade escalar média entre **t** e **t'** é:

$$v_m = \frac{s' - s}{t' - t} = \frac{(2t'^2 - 1) - (2t^2 - 1)}{t' - t}$$

$$v_m = \frac{2t'^2 - 2t^2}{t' - t} = \frac{2(t' + t)(t' - t)}{(t' - t)}$$

$$v_m = 2(t' + t)$$

Fazendo **t'** tender a **t**, obtemos a velocidade escalar **v** num instante **t** qualquer:

$$v = 2(t + t) \Rightarrow \boxed{v = 4t} \text{ (SI)}$$

b) Fazendo t = 2 s na expressão v = 4t, vem:

$$v = 4(2) \Rightarrow \boxed{v = 8 \text{ m/s}}$$

59. Os espaços **s** de uma partícula variam com o tempo **t**, de acordo com a função:

$$s = 4t^2 - 2t \text{ (SI)}$$

Determine:
a) a função horária da velocidade escalar instantânea;
b) a velocidade escalar no instante 5 s.

60. E.R. A função horária do espaço referente ao movimento de uma partícula é $s = 5t^3 - 6t$, válida no SI. Determine:
a) a função horária da velocidade escalar instantânea;
b) a velocidade escalar no instante 2 s;
c) a função horária da aceleração escalar instantânea;
d) a aceleração escalar no instante 2 s.

Resolução:
a) Nos instantes genéricos **t** e **t'**, com **t'** maior que **t**, temos os espaços **s** e **s'**, respectivamente:

$$s = 5t^3 - 6t \quad \text{e} \quad s' = 5t'^3 - 6t'$$

Então:

$$v_m = \frac{s' - s}{t' - t} = \frac{(5t'^3 - 6t') - (5t^3 - 6t)}{t' - t}$$

$$v_m = \frac{5(t'^3 - t^3) - 6(t' - t)}{t' - t} =$$

$$= \frac{5(t' - t)(t'^2 + t't + t^2) - 6(t' - t)}{t' - t}$$

$$v_m = 5(t'^2 + t' t + t^2) - 6$$

Fazendo **t'** tender a **t**, obtemos:

$$v = 5(t^2 + t\,t + t^2) - 6 \Rightarrow \boxed{v = 15t^2 - 6} \text{ (SI)}$$

b) Para t = 2 s:

$$v = 15 \cdot 2^2 - 6 \Rightarrow \boxed{v = 54 \text{ m/s}}$$

c) Nos instantes genéricos **t** e **t'**, com **t'** maior que **t**, temos as velocidades escalares **v** e **v'**, respectivamente:

$$v = 15t^2 - 6 \text{ e } v' = 15t'^2 - 6$$

Então:

$$\alpha_m = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{(15t'^2 - 6) - (15t^2 - 6)}{t' - t}$$

$$\alpha_m = \frac{(15t'^2 - t^2)}{t' - t} = \frac{15(t' + t)(t' - t)}{t' - t} = 15(t' + t)$$

Fazendo **t'** tender a **t**, obtemos:

$$\alpha = 15(t + t) \Rightarrow \boxed{\alpha = 30t} \text{ (SI)}$$

d) Para t = 2 s:

$$\alpha = 30 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 60 \text{ m/s}^2}$$

Nota:
- A obtenção das funções horárias da velocidade e da aceleração escalares instantâneas, a partir da função horária do espaço, seria muito mais simples se fosse conhecida uma operação matemática denominada **derivada**. Por isso, para esse caso particular, vamos apresentá-la sem, entretanto, demonstrar o resultado.

Seja **f** uma função do tempo **t**. O limite de $\frac{\Delta f}{\Delta t}$, quando Δt tende a zero, chama-se **derivada** de **f** em relação ao tempo e é simbolizado por $\frac{df}{dt}$.

Assim, temos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{df}{dt}$$

Se **f** for função do tipo $f(t) = a \cdot t^n$, com **a** e **n** constantes, a derivada de **f** em relação a **t** será:

$$\frac{df}{dt} = a \cdot n \cdot t^{n-1}$$

Lembrando as definições da velocidade escalar instantânea e da aceleração escalar instantânea, podemos escrever:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{dv}{dt}$$

Vamos resolver novamente os itens **a** e **c** de modo muito mais prático, por meio da derivada:

$$s = 5t^3 - 6t^1 \text{ (SI)}$$

a) $v = \frac{ds}{dt} = 5 \cdot 3 \cdot t^{3-1} - 6 \cdot 1 \cdot t^{1-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow v = 15t^2 - 6t^0 = 15t^2 - 6$ (SI)

c) $\alpha = \frac{dv}{dt} = 15 \cdot 2 \cdot t^{2-1} - 6 \cdot 0 \cdot t^{0-1} \Rightarrow \alpha = 30t$ (SI)

Você pode fazer o mesmo com relação aos exercícios 58, 59 e 61.

61. A velocidade escalar instantânea de um móvel varia com o tempo, conforme a função $v = 5t^2 + 4$, válida no SI. Determine:
a) a função horária da aceleração escalar instantânea;
b) a aceleração escalar no instante 4 s.

TF1-019-044_5P_P1T1.indd 44 16/08/12 17:16

Tópico 2

Movimento uniforme

Bloco 1

1. Definição

Um movimento é denominado **uniforme** quando ocorre com uma velocidade escalar que não se modifica com o passar do tempo. É o que pode acontecer, por exemplo, com alguns automóveis modernos dotados de piloto automático.

Em condições de trânsito livre, mesmo um automóvel sem esse recurso pode manter-se em movimento praticamente uniforme durante algum tempo.

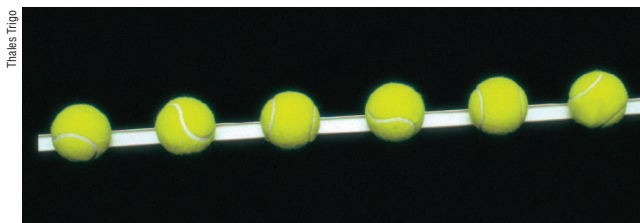
Na natureza, encontramos casos interessantes de movimentos uniformes, como a propagação da luz e do som em meios homogêneos ou o movimento de uma rocha numa região do Universo em que o campo gravitacional seja desprezível.

Movimento uniforme (MU) é aquele em que a velocidade escalar instantânea é constante e diferente de zero, de modo que o móvel sofre iguais variações de espaço em iguais intervalos de tempo.

Observe que, na definição apresentada, não foi feita nenhuma restrição à forma da trajetória, podendo ser retilínea ou curvilínea. Veja os exemplos seguintes:

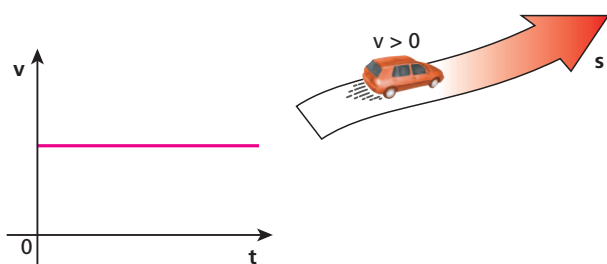
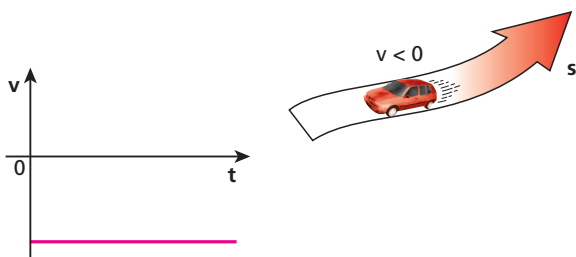
Muitos satélites artificiais realizam movimentos uniformes e circulares. Mais uma vez, pode-se observar que, em iguais intervalos de tempo, as distâncias percorridas são iguais. Evidentemente, esses satélites estão submetidos à gravidade terrestre. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.)

Uma rocha lançada em uma região do Universo de gravidade desprezível realiza um movimento uniforme e retilíneo. Observe que, em iguais intervalos de tempo, ela percorre distâncias iguais.

Thales Trigo

Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis em movimento uniforme ao lado de uma régua.

2. Representação gráfica da velocidade escalar instantânea em função do tempo

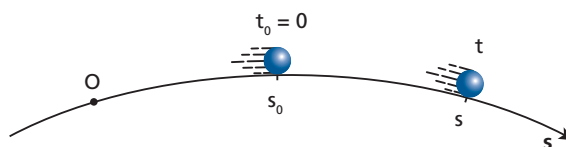
Em todos os instantes do intervalo de tempo em que um movimento é uniforme, a velocidade escalar instantânea é sempre a mesma.

Então, a representação gráfica dessa velocidade em função do tempo pode ser:

A velocidade escalar é constante e diferente de zero, o que nos leva à conclusão de que o movimento é uniforme.
A velocidade escalar é positiva e, por isso, concluímos que o movimento se dá no sentido da trajetória (movimento progressivo).

A velocidade escalar é constante e diferente de zero, portanto, o movimento é uniforme.
A velocidade escalar é negativa, então, o movimento se dá em sentido contrário ao da trajetória (movimento retrógrado).

Nota:

- No **repouso**, a velocidade escalar é constante e igual a zero. Nesse caso, a representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo é:

3. Função horária do espaço

Considere uma partícula em movimento uniforme descrevendo a trajetória representada a seguir:

Essa trajetória está orientada, sendo o ponto **O** a origem dos espaços. No instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos), a partícula estava em um ponto no qual o espaço era $\mathbf{s_0}$ (espaço inicial). Num instante qualquer **t**, a partícula está em um ponto de espaço **s**.

Observe que, num movimento uniforme, a velocidade escalar média (v_m) em qualquer intervalo de tempo coincide com a velocidade escalar instantânea (**v**) em qualquer instante, uma vez que esta última é constante.

Assim, podemos escrever, no intervalo de $\mathbf{t_0}$ a **t**:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{s - s_0}{t}$$

$$s - s_0 = v\,t \Rightarrow \boxed{s = s_0 + v\,t}$$

A expressão obtida é a **função horária dos espaços** para qualquer movimento uniforme.

Observe que, nessa expressão:

- $\mathbf{s_0}$ é o espaço em $t_0 = 0$, ou seja, o espaço inicial;
- **v** é a velocidade escalar;
- **s** é o espaço num instante **t** qualquer.

Observe, também, que a função obtida é do **primeiro grau** em **t**.

Em muitas situações, é mais conveniente escrever essa função da seguinte forma:

$$\boxed{\Delta s = v\,t}$$

em que Δs é o deslocamento escalar ocorrido desde o instante $t_0 = 0$ até o instante **t**.

Nota:

- Frequentemente, encontramos enunciados de questões em que a orientação da trajetória e a origem dos espaços não são dadas. Se tivermos de equacionar um movimento, nesses casos, **adotamos** uma orientação para a trajetória e **escolhemos** um ponto qualquer dela para ser a origem dos espaços.

Exercícios

nível 1

1. E.R. Dada a função horária s = 10 + 3t, válida no SI, isto é, com **s** em metros e **t** em segundos, determine:

a) se o movimento é uniforme ou variado;

b) o espaço inicial, a velocidade escalar e o sentido do movimento em relação à trajetória;

c) o espaço em t = 5 s e o instante em que s = 31 m.

Resolução:

a) O movimento é uniforme, porque a função horária s = 10 + 3t é do primeiro grau em **t**.

b) Temos: $s = 10 + 3t$ (SI)
e
$s = s_0 + v\,t$

Confrontando essas duas expressões termo a termo, vem:

$\boxed{s_0 = 10\text{ m}}$ (Espaço inicial)

$\boxed{v = 3\text{ m/s}}$ (Velocidade escalar)

O sentido do movimento é o mesmo da trajetória, pois a velocidade escalar é positiva (movimento progressivo).

c) Para t = 5 s, obtemos:

$$s = 10 + 3(5) \Rightarrow \boxed{s = 25\text{ m}}$$

Para s = 31 m, vem:

$$31 = 10 + 3t \Rightarrow 3t = 21 \Rightarrow \boxed{t = 7\text{ s}}$$

2. Nas seguintes funções horárias do espaço, identifique o espaço inicial s_0 e a velocidade escalar **v**:

a) s = 20 + 4t (SI);
b) s = 15 – 3t (cm; s);
c) s = 12t (km; h).

3. As tabelas a seguir fornecem informações referentes a movimentos uniformes. Determine, em cada caso, a velocidade escalar e os valores de **x** e **y**.

a)

s (m)	4	12	20	x	84
t (s)	0	1	2	7	y

b)

v (m/s)	15	15	x	15	y
t (s)	0	2	4	6	8

c)

s (m)	20	16	x	8	0
t (s)	0	2	4	6	y

4. (UFPE) Um caminhão se desloca com velocidade constante de 144 km/h. Suponha que o motorista cochile durante 1,0 s. Qual o espaço, em metros, percorrido pelo caminhão nesse intervalo de tempo se ele não colidir com algum obstáculo?

5. E.R. Um sinal luminoso é emitido da Terra, no instante $t_0 = 0$, dirigindo-se para a Lua, onde sofre reflexão num espelho, lá colocado por uma das missões Apolo, e retorna à Terra no instante **t**. Considerando igual a $3{,}84 \cdot 10^5$ km a distância da Terra à Lua e sendo de $3{,}00 \cdot 10^5$ km/s a velocidade de propagação da luz nessa viagem, calcule **t**.

Resolução:

Na ida da luz da Terra até a Lua, temos:

$\Delta s = 3{,}84 \cdot 10^5\text{ km} = 3{,}84 \cdot 10^8\text{ m}$

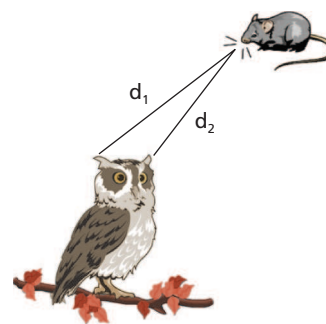
$v = 3{,}00 \cdot 10^5\text{ km/s} = 3{,}00 \cdot 10^8\text{ m/s}$

Como $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, vem: $\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{3{,}84 \cdot 10^8}{3{,}00 \cdot 10^8} \Rightarrow \Delta t = 1{,}28\text{ s}$

Na volta da luz, decorre o mesmo tempo. Assim:

$$t = 2\Delta t \Rightarrow \boxed{t = 2{,}56\text{ s}}$$

6. Na procura de cardumes, um pescador usa o **sonar** de seu barco, que emite um sinal de ultrassom. Esse sinal propaga-se pela água, incide em um cardume, onde sofre reflexão, retornando ao barco 0,30 s após a emissão. A que profundidade está o cardume, sabendo que a velocidade do ultrassom na água é igual a 1 480 m/s?

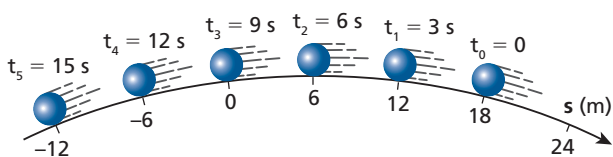
7. (UFRJ) A coruja é um animal de hábitos noturnos que precisa comer vários ratos por noite.
Um dos dados utilizados pelo cérebro da coruja para localizar um rato com precisão é o intervalo de tempo entre a chegada de um som emitido pelo rato a um dos ouvidos e a chegada desse mesmo som ao outro ouvido.
Imagine uma coruja e um rato, ambos em repouso; em dado instante, o rato emite um chiado. As distâncias da boca do rato aos ouvidos da coruja valem $d_1 = 12{,}780$ m e $d_2 = 12{,}746$ m.

Sabendo que a velocidade do som no ar é de 340 m/s, calcule o intervalo de tempo entre a chegada do chiado aos dois ouvidos.

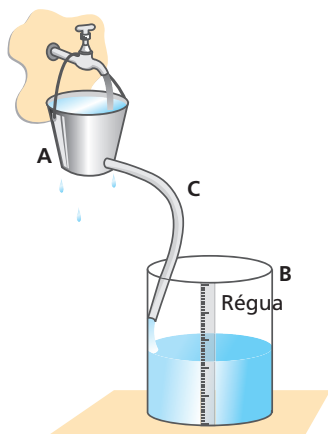
8. A velocidade de propagação da luz no vácuo é cerca de 300 000 km/s. Um ano-luz é a distância percorrida pela luz, no vácuo, durante um ano terrestre.

a) Um ano-luz corresponde a quantos quilômetros? (Considere 1 ano = 365 dias e apresente o resultado em notação científica, com duas casas decimais.)

b) No dia 24 de fevereiro de 1987, foi descoberta uma supernova (explosão estelar) pelo astrônomo canadense Ian Shelton, da Universidade de Toronto. Ela foi localizada na Grande Nuvem de Magalhães, visível apenas no hemisfério Sul. Segundo as notícias veiculadas pela imprensa, a distância da Terra até essa supernova é de aproximadamente 170 mil anos-luz. Há quanto tempo aconteceu a explosão que estamos vendo hoje?

Nota:
- Escrever um número em notação científica significa colocá-lo na forma A, BC... · 10^n, em que **A** é um algarismo diferente de zero e **n** é um expoente adequado.
  Exemplos: $931 = 9{,}31 \cdot 10^2$; $0{,}048 = 4{,}8 \cdot 10^{-2}$.

9. Estabeleça a função horária do espaço correspondente ao movimento uniforme que ocorre na trajetória a seguir:

10. A função horária dos espaços de um móvel é $s = 50 - 10t$ no SI.
a) Determine o instante em que o móvel passa pela origem dos espaços.
b) Supondo que a trajetória seja retilínea, esboce-a, mostrando as posições do móvel nos instantes 0 e 6 s.

11. No sistema esquematizado na figura, o recipiente **A** é mantido sempre cheio de água. Isso garante que a quantidade de água que entra no recipiente cilíndrico **B**, através do cano **C**, em cada segundo, seja sempre a mesma.
No recipiente **B**, inicialmente vazio, o nível da água vai subindo e sua altura pode ser lida em uma régua cujo zero coincide com o fundo. Sabe-se que a altura de **B** é 30 cm e que ele fica completamente cheio em 60 min.
a) O sistema descrito pode funcionar como cronômetro. Suponha que um juiz de futebol resolva usá-lo para cronometrar uma partida. Em $t_0 = 0$ (início do jogo), começa a entrar água em **B**. O primeiro tempo deverá ser encerrado ($t = 45$ min) quando o nível da água estiver a que altura?
b) A quantos minutos do primeiro tempo foi marcado o primeiro gol, sabendo-se que nesse momento a altura do nível da água era de 10 cm?

12. E.R. As funções horárias do espaço de duas partículas, **A** e **B**, que se movem numa mesma reta orientada, são dadas no SI por:

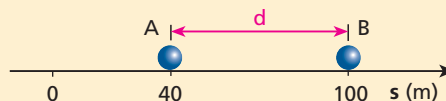
$$s_A = 4t \quad \text{e} \quad s_B = 120 - 2t$$

A origem dos espaços é a mesma para o estudo dos dois movimentos, o mesmo ocorrendo com a origem dos tempos.
Determine:
a) a distância que separa as partículas no instante $t = 10$ s;
b) o instante em que essas partículas se encontram;
c) a posição em que se dá o encontro.

Resolução:

a) Em $t = 10$ s, temos:

$$s_A = 4(10) \Rightarrow s_A = 40 \text{ m}$$

$$s_B = 120 - 2(10) \Rightarrow s_B = 100 \text{ m}$$

Assim, a distância entre as partículas é:

$$d = 100 - 40 \Rightarrow \boxed{d = 60 \text{ m}}$$

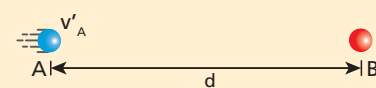
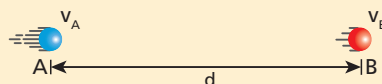
b) No instante em que essas partículas se encontram, (t_e), seus espaços são iguais. Então, podemos escrever:

$$4t_e = 120 - 2t_e \Rightarrow \boxed{t_e = 20 \text{ s}}$$

c) A posição em que se dá o encontro é dada pelo espaço correspondente:

$$s_A = 4t_e = 4(20) \Rightarrow s_A = 80 \text{ m}$$

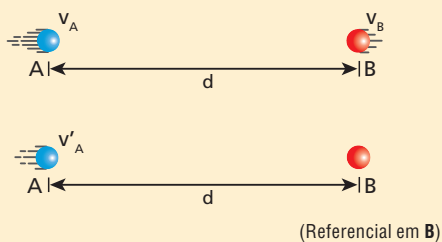
$$\boxed{s_A = s_B = 80 \text{ m}}$$

Nota:
- Considere duas partículas, **A** e **B**, movendo-se numa mesma trajetória, com velocidades escalares constantes v_A e v_B, medidas em relação ao solo. Seja **d** a "distância" que as separa no instante $t_0 = 0$. A determinação do **instante de encontro** (t_e) entre elas pode ser feita de um modo bem mais simples, adotando-se como referencial **uma das partículas**. Com isso, a velocidade dessa partícula torna-se igual a zero (ela "para") e a velocidade da outra terá módulo igual à diferença entre os módulos de v_A e v_B, quando elas se moverem no mesmo sentido, e módulo igual à soma dos módulos de v_A e v_B, quando se moverem em sentidos opostos. Veja os seguintes esquemas:
- **A e B movem-se no mesmo sentido**

(Referencial em **B**)

Lembrando que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, calculamos t_e fazendo:

$$|v'_A| = \frac{d}{t_e}, \text{ em que } |v'_A| = |v_A| - |v_B|$$

• **A e B movem-se em sentidos opostos**

(Referencial em **B**)

Como $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, calculamos t_e fazendo:

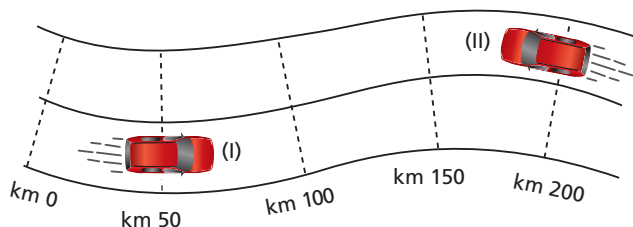
$$|v'_A| = \frac{d}{t_e}, \text{ em que } |v'_A| = |v_A| + |v_B|$$

Agora, usando esse recurso, calcule t_e no exercício 12.

13. A figura a seguir mostra dois móveis pontuais **A** e **B** em movimento uniforme, com velocidades escalares de módulos respectivamente iguais a 11 m/s e 4 m/s. A situação representada na figura corresponde ao instante $t_0 = 0$.

Determine:

a) as funções horárias do espaço para os movimentos de **A** e de **B**;
b) o instante em que **A** e **B** se encontram;
c) os espaços de **A** e de **B** no instante do encontro.

14. A figura a seguir mostra as posições de dois automóveis (**I** e **II**) na data $t_0 = 0$:

Nesse instante ($t_0 = 0$), as velocidades escalares de **I** e de **II** têm módulos respectivamente iguais a 60 km/h e 90 km/h. Supondo que os dois veículos mantenham suas velocidades escalares constantes, determine:

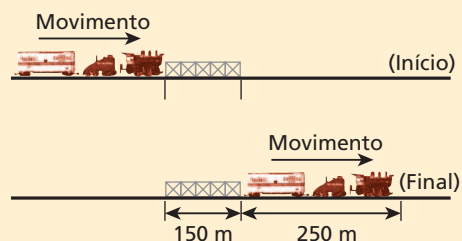
a) o instante em que se cruzarão;
b) a posição em que ocorrerá o cruzamento.

15. Às oito horas da manhã, uma motocicleta está passando pelo km 10 de uma rodovia, a 120 km/h, e um automóvel está passando pelo km 60 da mesma rodovia a 80 km/h. Sabendo que os dois veículos viajam no mesmo sentido e supondo que suas velocidades escalares sejam constantes, determine o horário em que a moto irá alcançar o automóvel.

16. Uma raposa encontra-se a 100 m de um coelho, perseguindo-o. Sabendo que as velocidades da raposa e do coelho valem, respectivamente, 72 km/h e 54 km/h, responda: quanto tempo dura essa bem-sucedida perseguição?

17. E.R. Calcule o tempo que um trem de 250 m de comprimento, viajando a 72 km/h, demora para atravessar completamente uma ponte de 150 metros de extensão.

Resolução:

As figuras a seguir mostram o trem no início e no final da travessia:

Então, durante a travessia, o trem percorre 400 m com velocidade escalar igual a 72 km/h, que equivale a 20 m/s. Assim:

$$\Delta s = v\,t$$

$$400 = 20t \Rightarrow \boxed{t = 20\text{ s}}$$

18. Um trem de 200 m de comprimento move-se com velocidade escalar constante de 72 km/h. Calcule o tempo decorrido para esse trem passar completamente:

a) por uma pessoa parada à beira da ferrovia;
b) por um túnel de 100 m de extensão.

19. O maquinista de um trem de 400 m de comprimento mede o tempo para o trem atravessar completamente um túnel, obtendo 15 segundos. O maquinista sabe também que o trem se manteve em movimento uniforme, a 40 m/s. Qual o comprimento do túnel?

Exercícios nível 2

20. (Uespi) Um passageiro perdeu um ônibus que saiu da rodoviária há 5,0 min e pegou um táxi para alcançá-lo.

O ônibus e o táxi descrevem a mesma trajetória e seus movimentos são uniformes.

A velocidade escalar do ônibus é de 60 km/h e a do táxi é de 90 km/h.

O intervalo de tempo necessário ao táxi para alcançar o ônibus é de:

a) 5,0 min.
b) 10 min.
c) 15 min.
d) 20 min.
e) 25 min.

21. (Fuvest-SP) Um automóvel e um ônibus trafegam em uma estrada plana, mantendo velocidades constantes em torno de 100 km/h e 75 km/h, respectivamente. Os dois veículos passam lado a lado em um posto de pedágio. Quarenta minutos $\left(\frac{2}{3} \text{ de hora}\right)$

depois, nessa mesma estrada, o motorista do ônibus vê o automóvel ultrapassá-lo. Ele supõe, então, que o automóvel deva ter realizado, nesse período, uma parada com duração aproximada de:

a) 4 minutos.
b) 7 minutos.
c) 10 minutos.
d) 15 minutos.
e) 25 minutos.

22. As informações seguintes são resultados de testes feitos com um determinado automóvel:

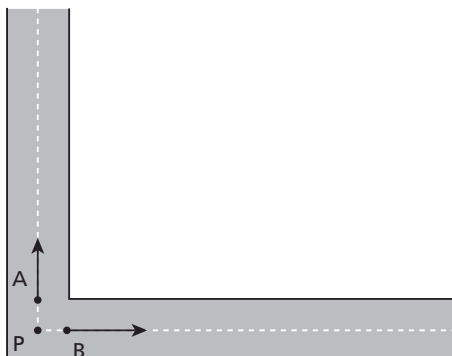
Consumo em velocidades constantes		
Velocidade (km/h)	**Consumo (km/L)**	**Marcha usada**
40	14,44	5ª
60	13,12	5ª
80	10,84	5ª
100	8,63	5ª
120	7,33	5ª
40	12,83	4ª

Velocidade (km/h)	Distância necessária para a freagem (m)
40	8,40
60	18,70
80	32,30
100	50,15
120	70,60

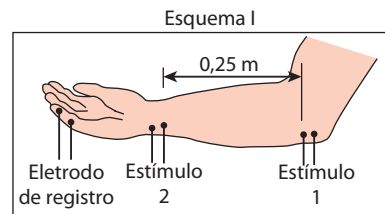
Suponha que esse automóvel percorra 90 km, com velocidade escalar constante, nas mesmas condições dos testes.

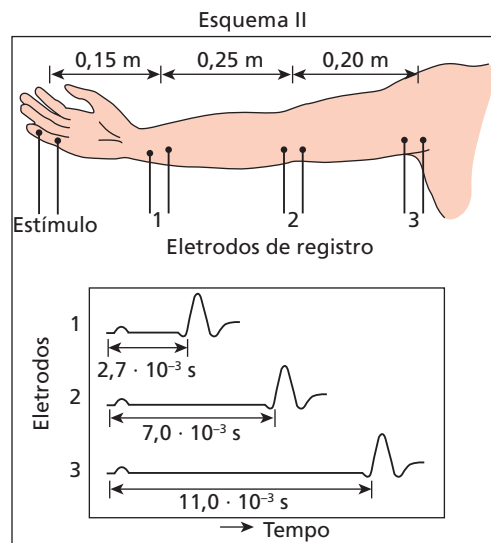
a) Quanto tempo gasta a 120 km/h?
b) Quanto tempo gasta a 100 km/h?
c) Qual é o volume de combustível consumido nos itens **a** e **b**?
d) Se o carro tivesse de frear repentinamente, quais seriam as distâncias necessárias correspondentes aos itens **a** e **b**?

Nota:
- As distâncias necessárias para a freagem parecem grandes demais porque os testes são feitos considerando o motorista em **pânico**: ele pisa no freio e na embreagem ao mesmo tempo.

23. No instante $t_0 = 0$, duas partículas, **A** e **B**, passam pelo mesmo ponto **P**, seguindo trajetórias perpendiculares, com velocidades constantes e iguais, respectivamente, a 6 m/s e 8 m/s. Em que instante a distância entre elas será de 40 m?

24. O movimento de um carro que viaja a 100 km/h ao longo de uma estrada retilínea é observado por meio de um radar. Na tela do aparelho, o carro é caracterizado por um ponto que se desloca 36 cm enquanto o carro percorre 5,0 km. Qual a velocidade do ponto na tela do radar?

25. Em determinado instante da empolgante final da Corrida de São Silvestre, realizada em 31 de dezembro de 1997, o paranaense Emerson Iser Bem estava 25 m atrás do favorito, o queniano Paul Tergat, quando, numa reação espetacular, imprimiu uma velocidade escalar constante de 7,7 m/s, ultrapassando Tergat e vencendo a prova com uma vantagem de 75 m. Admitindo que a velocidade escalar de Tergat se manteve constante e igual a 5,2 m/s, calcule o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que Iser Bem reagiu, imprimindo a velocidade escalar de 7,7 m/s, até o instante em que cruzou a linha de chegada.

26. (Uerj) A velocidade com que os nervos do braço transmitem impulsos elétricos pode ser medida, empregando-se eletrodos adequados, por meio da estimulação de diferentes pontos do braço e do registro das respostas a esses estímulos.
O esquema I, abaixo, ilustra uma forma de medir a velocidade de um impulso elétrico em um nervo motor, na qual o intervalo de tempo entre as respostas aos estímulos 1 e 2, aplicados simultaneamente, é igual a $4{,}0 \cdot 10^{-3}$s.

(**Adaptado de:** CAMERON, J. R. et al. *Physics of the Body.* Madison: Medical Physics Publishing, 1999.)

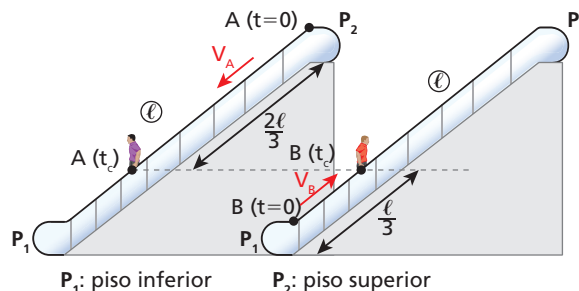
O esquema II, a seguir, ilustra uma forma de medir a velocidade de um impulso elétrico em um nervo sensorial.

(**Adaptado de:** CAMERON, J. R. et al. *Physics of the Body.* Madison: Medical Physics Publishing, 1999.)

Determine o módulo da velocidade de propagação do impulso elétrico:

a) no nervo motor, em km/h;

b) no nervo sensorial, em m/s, entre os eletrodos 2 e 3.

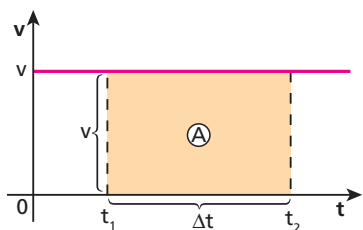
27. Duas pessoas pegam simultaneamente escadas rolantes, paralelas, de mesmo comprimento L, em uma loja, sendo que uma delas desce e a outra sobe. A escada que desce tem velocidade $V_A = 1$ m/s e a que sobe é V_B. Considere o tempo de descida da escada igual a 12 s. Sabendo-se que as pessoas se cruzam a $\frac{1}{3}$ do caminho percorrido pela pessoa que sobe, determine:

a) A velocidade V_B da escada que sobe.
b) O comprimento das escadas.
c) A razão entre os tempos gastos na descida e na subida das pessoas.

Bloco 2

4. Representação gráfica do espaço em função do tempo

Como a função horária do movimento uniforme, $s = s_0 + v\,t$, é do primeiro grau em **t**, sua representação gráfica é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos, podendo enquadrar-se em um dos casos apresentados a seguir:

5. Propriedade do gráfico da velocidade escalar em função do tempo

Considere o gráfico da velocidade escalar **v** em função do tempo **t** num movimento uniforme. Vamos escolher dois instantes quaisquer t_1 e t_2 e calcular a "área" **A** que eles determinam entre o eixo dos tempos e o gráfico:

A região destacada no gráfico é um retângulo, cuja base representa o intervalo de tempo Δt entre t_1 e t_2 e a altura representa a velocidade escalar.

Lembrando que a área de um retângulo é determinada multiplicando-se a medida de sua base pela medida de sua altura, temos:

$$A = \Delta t \; v \quad (I)$$

Como $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, temos que: $\Delta s = \Delta t \; v$ (II)

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$A = \Delta s$$

Assim, temos que:

No gráfico da velocidade escalar (**v**) em função do tempo (**t**), a "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes t_1 e t_2, expressa a variação de espaço entre t_1 e t_2.

$$\text{"Área"} = \Delta s = s_2 - s_1$$

Observe que, a rigor, não calculamos a área do retângulo, pois esta seria o produto do **comprimento** da base pelo **comprimento** da altura. Na verdade, fizemos o produto daquilo que a base representa (Δt) por aquilo que a altura representa (**v**).

É por esse motivo que escrevemos "área" usando aspas.

6. Aceleração escalar

Como já vimos, no movimento uniforme a velocidade escalar é constante e diferente de zero. Consequentemente, nesse movimento, a **aceleração escalar** é constante, porém igual a **zero**.

Assim, para qualquer movimento uniforme, a aceleração escalar é representada graficamente como mostramos abaixo:

Num movimento uniforme, a aceleração escalar é constantemente nula, pois não há variação da velocidade escalar.

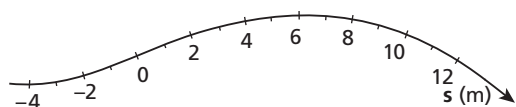
Exercícios — nível 1

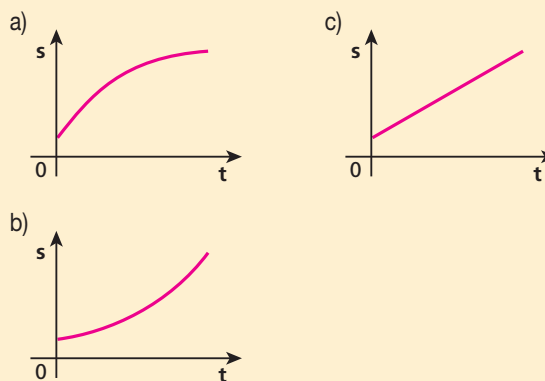
28. É dada a seguinte função horária do movimento uniforme de uma partícula:

$$s = 12 - 3t$$

com **s** em metros e **t** em segundos.

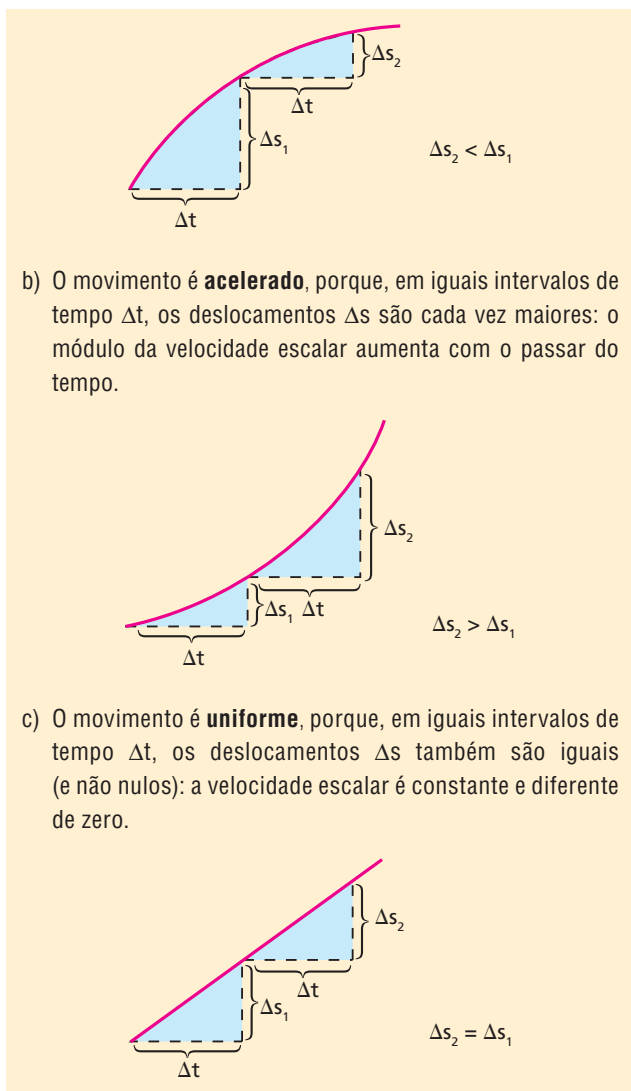
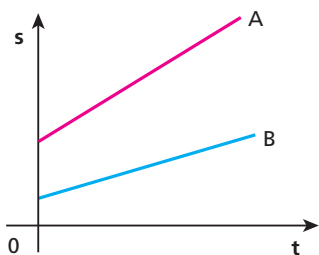
a) Represente graficamente o espaço e a velocidade escalar em função do tempo no intervalo de tempo de 0 a 5 s.

b) Suponha que a trajetória da partícula seja a seguinte:

Copie essa trajetória, indicando a posição da partícula nos instantes 0, 1 s, 2 s, 3 s, 4 s e 5 s.

29. E.R. Para cada um dos gráficos seguintes, do espaço **s** em função do tempo **t**, verifique se o movimento é uniforme, acelerado ou retardado:

Resolução:

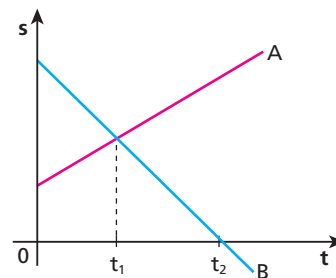
a) O movimento é **retardado**, porque, em iguais intervalos de tempo Δt, os deslocamentos Δs são cada vez menores: o módulo da velocidade escalar diminui com o passar do tempo.

b) O movimento é **acelerado**, porque, em iguais intervalos de tempo Δt, os deslocamentos Δs são cada vez maiores: o módulo da velocidade escalar aumenta com o passar do tempo.

c) O movimento é **uniforme**, porque, em iguais intervalos de tempo Δt, os deslocamentos Δs também são iguais (e não nulos): a velocidade escalar é constante e diferente de zero.

30. Considere os gráficos do espaço (**s**) em função do tempo (**t**) referentes aos movimentos de duas partículas **A** e **B**. As duas movem-se numa mesma trajetória orientada.

a) Compare os espaços iniciais de **A** e de **B**.

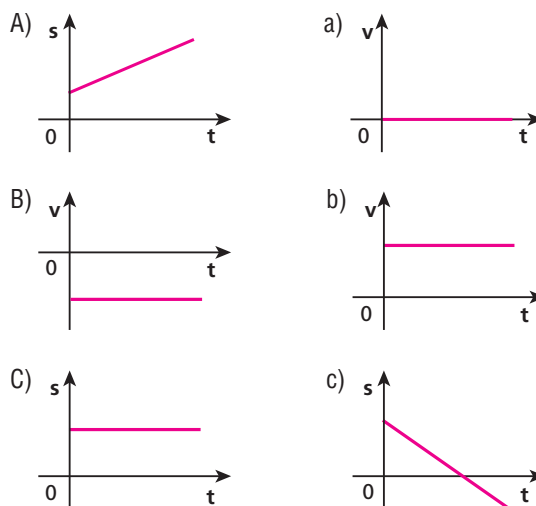
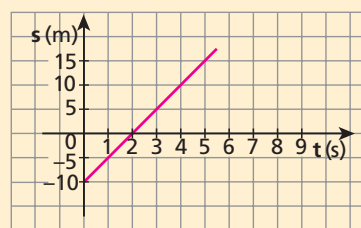
b) Compare as velocidades escalares de **A** e de **B**.

c) Em que sentido **A** e **B** se movem em relação à orientação da trajetória?

31. Consideremos os gráficos do espaço (**s**) em função do tempo (**t**) para dois corpos **A** e **B** que se movem na mesma trajetória orientada:

a) Em que sentido se movem **A** e **B** em relação à orientação da trajetória?

b) O que acontece no instante t_1?

c) Qual a posição de **B** no instante t_2?

32. A cada gráfico da coluna da esquerda associe um gráfico compatível da coluna da direita (**s** = espaço, **v** = velocidade escalar, **t** = tempo):

33. E.R. O movimento uniforme de uma partícula tem sua função horária representada no diagrama a seguir.

Determine para esse movimento:

a) a forma da trajetória descrita pela partícula;

b) o espaço inicial e a velocidade escalar;

c) a função horária dos espaços.

Resolução:

a) A forma da trajetória descrita pela partícula está **indeterminada**, já que o gráfico do espaço em função do tempo nada informa a esse respeito.

b) O espaço inicial é lido diretamente no gráfico, em $t_0 = 0$:

$$s_0 = -10 \text{ m}$$

Para o cálculo da velocidade escalar (constante), devemos ler, no gráfico, os valores do espaço em dois instantes quaisquer. Por exemplo:

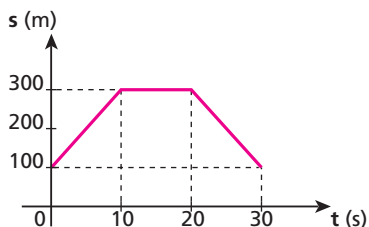
- Em $t_1 = 2\ s \Rightarrow s_1 = 0$;
- Em $t_2 = 4\ s \Rightarrow s_2 = 10\ m$.

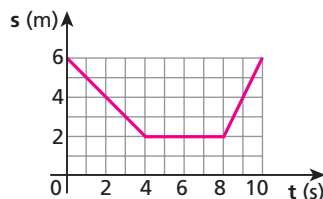
Assim:

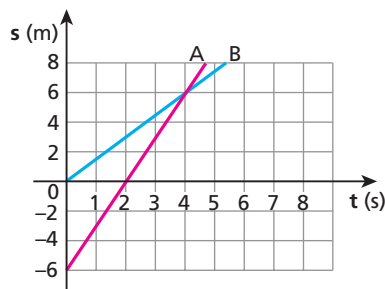
$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 0}{4 - 2} \Rightarrow \boxed{v = 5\ m/s}$$

c) A função horária dos espaços num movimento uniforme é do tipo: $s = s_0 + v\,t$
Assim, temos:

$$\boxed{s = -10 + 5t} \text{ (SI)}$$

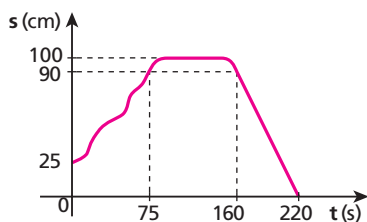
34. É dado o gráfico $s \times t$ para o movimento de um ciclista:

a) Represente graficamente a velocidade escalar do ciclista no intervalo de 0 a 30 s.
b) São possíveis, em um movimento real de um ciclista, as cúspides ("bicos") no gráfico $s \times t$ dado?

35. A posição de um jovem pedestre em função do tempo está representada graficamente a seguir:

Trace o gráfico da velocidade escalar em função do tempo, de $t_0 = 0$ até $t = 10$ s.

36. Dois móveis, **A** e **B**, ao percorrerem a mesma trajetória, tiveram seus espaços variando com o tempo, conforme as representações gráficas a seguir:

Determine:

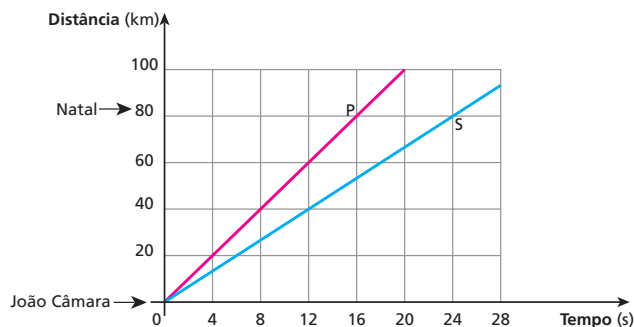
a) as funções horárias dos espaços de **A** e de **B**;
b) o instante e a posição correspondentes ao encontro dos móveis (por leitura direta nos gráficos e usando as funções horárias obtidas).

Exercícios nível 2

37. Uma formiga move-se sobre uma fita métrica esticada e suas posições são dadas, em função do tempo, pelo gráfico abaixo:

Determine:

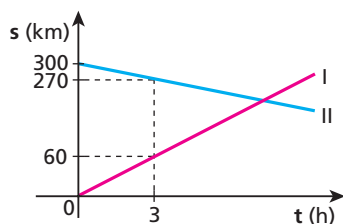
a) a distância percorrida pela formiga, de $t_0 = 0$ a $t = 220$ s;
b) a velocidade escalar da formiga no instante $t = 190$ s;
c) a velocidade escalar média da formiga entre $t_0 = 0$ e $t = 160$ s.

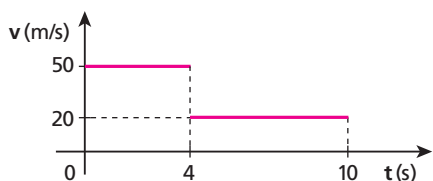
38. (UFRN) A cidade de João Câmara, a 80 km de Natal, no Rio Grande do Norte (RN), tem sido o epicentro (ponto da superfície terrestre atingido em primeiro lugar, e com mais intensidade, pelas ondas sísmicas) de alguns terremotos ocorridos nesse estado. O departamento de Física da UFRN tem um grupo de pesquisadores que trabalham na área de sismologia utilizando um sismógrafo instalado nas suas dependências para detecção de terremotos. Num terremoto, em geral, duas ondas, denominadas de primária (**P**) e secundária (**S**), percorrem o interior da Terra com velocidades diferentes.

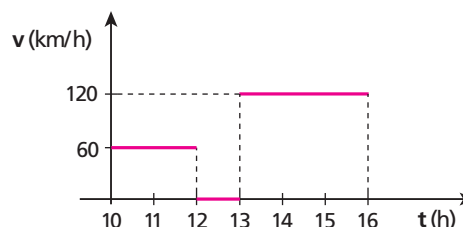
Admita que as informações contidas no gráfico abaixo sejam referentes a um dos terremotos ocorridos no Rio Grande do Norte. Considere ainda que a origem dos eixos da figura seja coincidente com a posição da cidade de João Câmara.

Dados referentes às ondas **P** e **S**, associados a um terremoto ocorrido no Rio Grande do Norte.

Diante das informações contidas no gráfico, é correto afirmar que a onda mais rápida e a diferença de tempo de chegada das ondas **P** e **S** no sismógrafo da UFRN, em Natal, correspondem, respectivamente,

a) à onda **S** e 4 segundos.
b) à onda **P** e 8 segundos.
c) à onda **P** e 16 segundos.
d) à onda **S** e 24 segundos.

39. Dois tratores, **I** e **II**, percorrem a mesma rodovia e suas posições variam com o tempo, conforme o gráfico a seguir:

Determine o instante do encontro desses veículos.

40. Uma partícula em movimento obedece ao gráfico a seguir:

a) Calcule a velocidade escalar média entre $t_0 = 0$ e $t = 10$ s.
b) Represente graficamente o espaço em função do tempo, supondo que em $t_0 = 0$ a partícula encontrava-se na origem dos espaços.
c) É possível realizar, em termos práticos, o que o gráfico dado representa?

41. Das 10 h às 16 h, a velocidade escalar de um automóvel variou com o tempo. O gráfico a seguir mostra a variação aproximada da velocidade em função do tempo:

Calcule a velocidade escalar média do automóvel nesse intervalo de tempo.

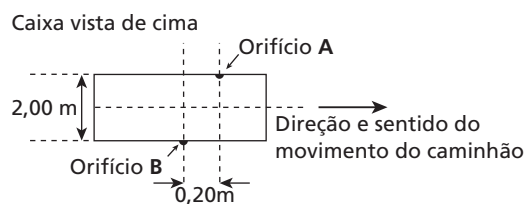
Exercícios

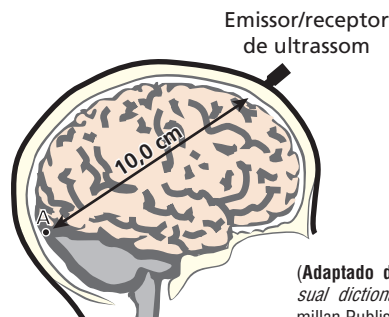
42. (Puccamp-SP) Dois trens trafegam em sentidos contrários com movimentos uniformes, com o primeiro a 18 km/h e o segundo a 24 km/h. Um viajante acomodado no primeiro observa que o segundo trem leva 13 segundos para passar por ele. Calcule o comprimento do segundo trem.

43. Dois trens, **A** e **B**, de 300 metros de comprimento cada um, deslocam-se em linhas paralelas com velocidades escalares constantes de módulos respectivamente iguais a 40 m/s e 20 m/s. Determine o intervalo de tempo decorrido e a distância percorrida pelo trem **A**:
a) enquanto ultrapassa **B**, movendo-se no mesmo sentido que **B**;
b) enquanto se cruza com **B**, movendo-se em sentidos opostos.

44. (ITA-SP) Um trem e um automóvel caminham paralelamente e no mesmo sentido, num trecho retilíneo. Os seus movimentos são uniformes e a velocidade do automóvel é o dobro da velocidade do trem. Supondo desprezível o comprimento do automóvel e sabendo que o comprimento do trem é de 100 m, qual é a distância percorrida pelo automóvel desde o instante em que alcança o trem até o término da ultrapassagem?

45. (Cesgranrio-RJ) Uma cena, filmada originalmente a uma velocidade de 40 quadros por segundo, é projetada em “câmara lenta” a uma velocidade de 24 quadros por segundo. A projeção dura 1,0 minuto. Qual a duração real da cena filmada?

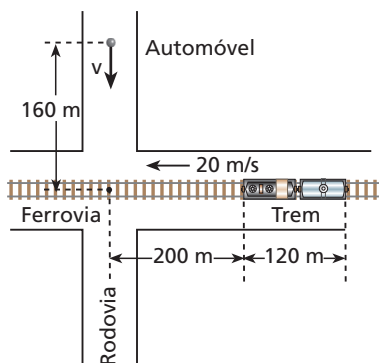
46. (Vunesp-SP) Uma caixa de papelão vazia, transportada na carroceria de um caminhão que trafega a 90 km/h num trecho reto de uma estrada, é atravessada por uma bala perdida. A largura da caixa é de 2,00 m, e a distância entre as retas perpendiculares às duas laterais perfuradas da caixa e que passam, respectivamente, pelos orifícios de entrada e de saída da bala (ambos na mesma altura) é de 0,20 m.

a) Supondo que a direção do disparo seja perpendicular às laterais perfuradas da caixa e ao deslocamento do caminhão e que o atirador estivesse parado na estrada, determine a velocidade da bala.
b) Supondo, ainda, que o caminhão se desloque para a direita, determine qual dos orifícios, **A** ou **B**, é o de entrada.

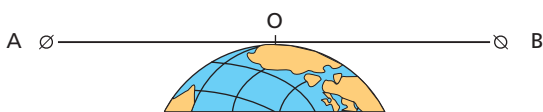
47. (Uerj) Uma pessoa, movendo-se a uma velocidade de módulo 1,0 m/s, bateu com a cabeça em um obstáculo fixo e foi submetida a uma ecoencefalografia. Nesse exame, um emissor/receptor de ultrassom é posicionado sobre a região a ser investigada. A existência de uma lesão pode ser verificada por meio da detecção do sinal de ultrassom que ela reflete.
Observe, na figura abaixo, que a região de tecido encefálico a ser investigada no exame é limitada por ossos do crânio. Sobre um ponto do crânio, apoia-se o emissor/receptor de ultrassom.

(**Adaptado de:** *The Macmillan visual dictionary.* New York: Macmillan Publishing Company, 1992.)

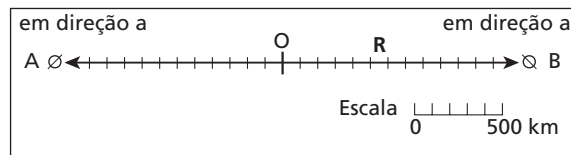
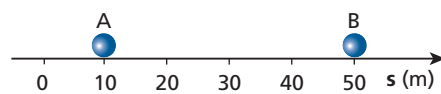
a) Suponha a não existência de qualquer tipo de lesão no interior da massa encefálica. Determine o tempo gasto para registrar o eco proveniente do ponto **A** da figura.
b) Suponha, agora, a existência de uma lesão. Sabendo-se que o tempo gasto para o registro do eco foi de $5,0 \cdot 10^{-5}$ s, calcule a distância do ponto lesionado até o ponto **A**.

Dados:

1) Módulos da velocidade do som no tecido encefálico: $1,6 \cdot 10^3$ m/s.
2) Espessura do osso da caixa craniana: 1,0 cm.
3) Módulo da velocidade do som nos ossos: $\frac{10}{3} \cdot 10^3$ m/s.

48. O motorista de um automóvel, moço muito distraído, dirige seu veículo com velocidade constante **v** pela rodovia representada na figura.
Um trem de 120 m de comprimento, com velocidade constante de 20 m/s, move-se pela ferrovia, que cruza com a rodovia sem nenhuma sinalização. Em determinado instante, o automóvel e o trem estão nas posições indicadas. Para que valores da velocidade **v** do automóvel não haverá acidente? Considere o automóvel um ponto material.

49. (ITA-SP) Um avião voando horizontalmente a 4000 m de altura numa trajetória retilínea com velocidade constante passou por um ponto **A** e depois por um ponto **B** situado a 3000 m do primeiro. Um observador no solo, parado no ponto verticalmente abaixo de **B**, começou a ouvir o som do avião, emitido em **A**, 4,00 segundos antes de ouvir o som proveniente de **B**. Se a velocidade do som no ar era de 320 m/s, qual era a velocidade do avião?

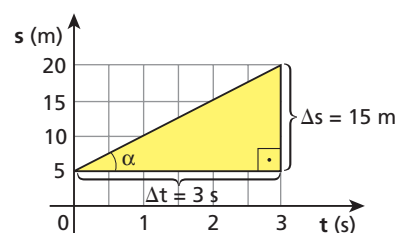
50. (Fuvest-SP) O Sistema GPS (*Global Positioning System*) permite localizar um receptor especial, em qualquer lugar da Terra, por meio de sinais emitidos por satélites. Numa situação particular, dois satélites, **A** e **B**, estão alinhados sobre uma reta que tangencia a superfície da Terra no ponto **O** e encontram-se à mesma distância de **O**. O protótipo de um novo avião, com um receptor **R**, encontra-se em algum lugar dessa reta e seu piloto deseja localizar sua própria posição.

Os intervalos de tempo entre a emissão dos sinais pelos satélites **A** e **B** e sua recepção por **R** são, respectivamente, $\Delta t_A = 68,5 \cdot 10^{-3}$ s e $\Delta t_B = 64,8 \cdot 10^{-3}$ s. Desprezando possíveis efeitos atmosféricos e considerando a velocidade de propagação dos sinais como igual à velocidade **c** da luz no vácuo, determine:

a) A distância **D**, em km, entre cada satélite e o ponto **O**.
b) A distância **X**, em km, entre o receptor **R**, no avião, e o ponto **O**.
c) A posição do avião, identificada pela letra **R** no esquema a seguir:

51. Considere as partículas **A** e **B** nas posições indicadas na figura a seguir:

Em determinado instante, considerado origem dos tempos ($t_0 = 0$), a partícula **B** passa a mover-se com velocidade escalar constante igual a 20 m/s, no sentido da trajetória. Três segundos após a partida de **B**, a partícula **A** também entra em movimento no sentido da trajetória, com velocidade escalar constante e igual a 40 m/s. Em relação à origem dos tempos dada no enunciado, determine:

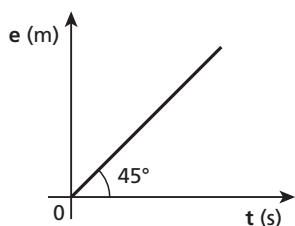
a) as funções horárias dos espaços de **A** e de **B**;
b) o instante em que **A** alcança **B**.

52. (UFPA) Considere duas regiões distintas do leito de um rio: uma larga **A**, com 200 m² de área na secção transversal, onde a velocidade da água é de 1,0 m/s; outra estreita **B**, com 40 m² de área na secção transversal. Calcule:

a) a vazão volumétrica do rio em m³/s;
b) a velocidade da água do rio, em m/s, na região estreita **B**.

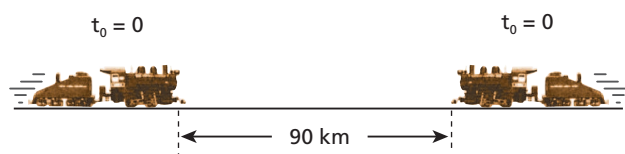
53. Uma partícula em movimento uniforme sofre uma variação de espaço $\Delta s = 15$ m num intervalo de tempo $\Delta t = 3$ s, como mostra o gráfico:

No triângulo retângulo destacado, Δs está representado pelo cateto oposto ao ângulo α, enquanto Δt está representado pelo cateto adjacente a α. Por ser a velocidade escalar dada por $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, é muito comum dizer que ela é igual à tangente trigonométrica de α (cateto oposto a α dividido pelo cateto adjacente a α).

a) A velocidade escalar é igual à tangente trigonométrica de α?
b) A velocidade escalar e a tangente trigonométrica de α têm o mesmo valor numérico? Em outras palavras, elas são numericamente iguais?

54. (ITA-SP) Um estudante observou o movimento de um móvel durante certo tempo. Verificou que o móvel descrevia um movimento retilíneo e anotou os valores de espaço (**e**) e de tempo (**t**) correspondentes, construindo o gráfico da figura ao lado.

Pode-se afirmar que:

a) a velocidade do móvel é constante e vale $1{,}0\ m \cdot s^{-1}$, tendo em vista que o ângulo que a reta faz com o eixo dos tempos é de 45°.
b) a velocidade do móvel é constante e vale $\frac{1}{\sqrt{2}}\ m \cdot s^{-1}$.
c) a velocidade do móvel é constante e vale aproximadamente $1{,}4\ m \cdot s^{-1}$.
d) faltam dados para calcular a velocidade do móvel.
e) a aceleração e a velocidade do móvel estão indeterminadas.

Para raciocinar um pouco mais

55. Dois trens movem-se nos mesmos trilhos, ambos a 45 km/h, em sentidos opostos, como representa a figura:

No instante $t_0 = 0$, correspondente à situação da figura, uma supermosca passa a voar em linha reta entre os trens, fazendo um vaivém de um ao outro até ser esmagada.

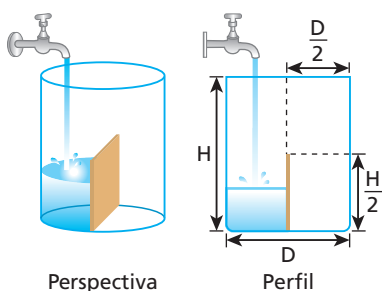
Admitindo que ela voe com velocidade de módulo constante e igual a 120 km/h, determine:

a) o instante em que os trens colidem;
b) a distância total percorrida pela supermosca desde $t_0 = 0$ até ser esmagada.

56. Um automóvel, em movimento uniforme por uma rodovia, passou pelo km AB às 4 horas, pelo km BA às 5 horas e pelo km AOB às 6 horas. Determine a velocidade escalar do automóvel. (**A** e **B** são algarismos desconhecidos e **O** é o zero.)

57. Considere um frasco cilíndrico de diâmetro **D** e altura **H** e uma placa retangular impermeável de base **D** e altura $\frac{H}{2}$, perfeitamente encaixada e assentada no fundo do frasco, conforme ilustram as duas figuras.

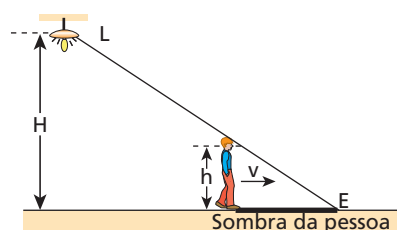
Uma torneira despeja água dentro do frasco, vazio no instante $t_0 = 0$, com vazão rigorosamente constante.

Sendo **y** a maior altura da superfície livre da água em relação à base do frasco e **t** o tempo, trace o gráfico de **y** em função de **t** desde $t_0 = 0$ até $t = T$ (frasco totalmente cheio).

58. Dois móveis percorrem trajetórias perpendiculares, seguindo os eixos Ox e Oy, de acordo com as equações:

$x = 5 + 8t$ (SI) $y = -3 + 2t$ (SI)

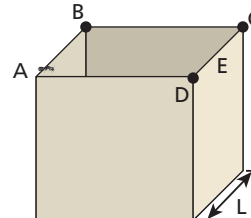
válidas tanto antes como depois de $t = 0$. Determine o instante em que a distância entre os móveis é mínima.

59. À noite, numa quadra esportiva, uma pessoa de altura **h** caminha em movimento retilíneo e uniforme com velocidade escalar **v**. Apenas uma lâmpada **L**, que pode ser considerada uma fonte luminosa puntiforme e que se encontra a uma altura **H** do piso, está acesa.

Determine, em função de **H**, **h** e **v**, a velocidade escalar média $\mathbf{v_E}$ da extremidade **E** da sombra da pessoa projetada no chão.

60. Dispõe-se de duas velas inteiras, de mesmas dimensões, mas feitas de materiais diferentes. Sabe-se que, após serem acesas, uma queima completamente em 3 horas e a outra, em 4 horas. Para cada uma delas, o comprimento queimado por unidade de tempo é constante. Em que horário da tarde as duas velas devem ser acesas para que, às 16 h, o comprimento de uma seja igual à metade do comprimento da outra?

61. Uma formiga vai caminhar com velocidade de módulo constante e igual a **V**, no interior de uma caixa cúbica de aresta **L**.

Caminhando por paredes laterais da caixa e também pelo seu fundo, ela vai ao vértice **A** até o ponto médio, **E**, da aresta CD.

Determine o mínimo tempo ($t_{mín}$) em que esse percurso pode ser feito.

62. Releia o enunciado da questão anterior e determine qual seria o valor de $t_{mín}$ se a formiga não precisasse passar pelo fundo da caixa.

63. (Olimpíada Ibero-americana de Física) O Sr. Gutiérrez viaja todos os dias, à mesma hora, de Montevidéu a Tarariras, onde trabalha. O trajeto Montevidéu-Colônia é feito em trem, enquanto, de Colônia a Tarariras, o Sr. Gutiérrez viaja no carro da empresa que sai de Tarariras e o recolhe pontualmente na estação de Colônia. Os trens partem de hora em hora e demoram sempre o mesmo tempo. Um dia o Sr. Gutiérrez levantou-se mais cedo e apanhou o trem uma hora antes do costume. Quando chegou a Colônia, obviamente que o carro da empresa ainda não chegara; então Gutiérrez resolve fazer um pouco de exercício e começa a caminhar em direção a Tarariras. Em determinado momento, encontra-se com o carro da empresa, que para imediatamente e o leva para o lugar de trabalho.

Supondo que Gutiérrez caminha a uma velocidade constante de 6,0 km/h e o carro viaja a uma velocidade também constante de 60 km/h, calcule quanto tempo, antes do habitual, o Sr. Gutiérrez chega à empresa.

Tópico 3

Movimento uniformemente variado

Bloco 1

1. Introdução

No Tópico 2, estudamos um tipo de movimento no qual a velocidade escalar não variava com o passar do tempo: o movimento uniforme.

Vamos estudar agora outro tipo de movimento: o **movimento uniformemente variado**. Nele, a velocidade escalar varia com o passar do tempo, mas de modo especial.

Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 1:

No processo de decolagem, um avião pode realizar, com boa aproximação, um movimento uniformemente variado (**acelerado**). Conhecendo-se a velocidade **v** que o avião precisa atingir para decolar e sua aceleração escalar, seremos capazes de calcular o comprimento necessário de pista (Δs) e o intervalo de tempo de duração da decolagem (**t**).

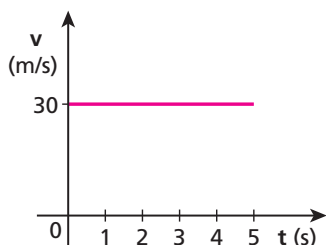
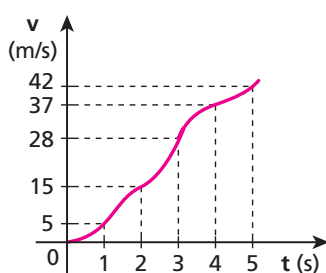
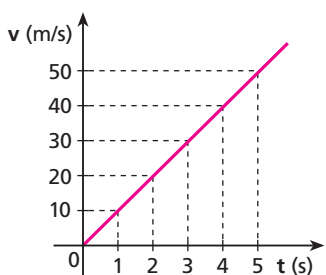
Exemplo 2:

Durante a freagem, um automóvel pode realizar um movimento uniformemente variado (**retardado**). Conhecendo-se sua velocidade inicial v_0 e sua aceleração de retardamento, seremos capazes de calcular o comprimento necessário de percurso (Δs) e o intervalo de tempo de duração da freagem (**t**).

Thinkstock/Getty Images

Supondo desprezível a influência do ar, o movimento das gotas de água que se desprendem da torneira é uniformemente variado (acelerado).

2. Definição

Consideremos três móveis, **A**, **B** e **C**, cujas velocidades escalares instantâneas estão representadas em função do tempo nos gráficos a seguir:

Móvel **A**

Móvel **B**

Móvel **C**

Analisando o gráfico correspondente ao móvel **A**, percebemos que sua velocidade escalar é constante e igual a 30 m/s. Então, o movimento de **A** é uniforme e, por isso, sua aceleração escalar é constantemente nula.

Analisando o gráfico correspondente ao móvel **B**, notamos que sua velocidade escalar varia com o tempo. Então, o movimento de **B** é variado e, consequentemente, sua aceleração escalar não é nula.

Com relação ao movimento de **C**, observamos que sua velocidade escalar também varia com o tempo, tratando-se, portanto, de mais um movimento variado.

Então, tanto o movimento de **B** como o de **C** são variados. Existe, porém, uma diferença marcante entre os dois: a velocidade escalar de **C** sofre variações iguais em iguais intervalos de tempo, o que não ocorre com a velocidade escalar de **B**.

De fato, de acordo com os gráficos, temos que a velocidade escalar de **B** varia 5 m/s no primeiro segundo, 10 m/s no segundo, 13 m/s no terceiro, 9 m/s no quarto e 5 m/s no último segundo; isso significa que a aceleração escalar de **B** é variável. Já a velocidade escalar de **C** varia sempre 10 m/s em cada segundo, o que significa que sua aceleração escalar é constante e igual a 10 m/s^2. Por isso, o movimento variado de **C** é denominado **movimento uniformemente variado**.

Então, definimos:

> Movimento uniformemente variado (MUV) é aquele em que a aceleração escalar é constante e diferente de zero. Consequentemente, a velocidade escalar sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais.

Thales Trigo

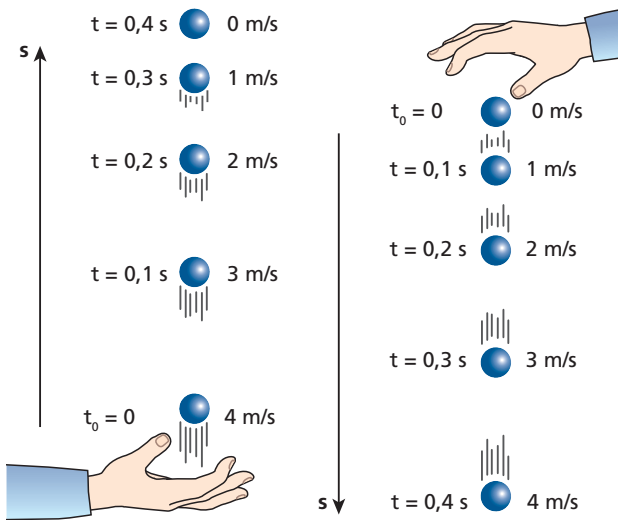
Fotografia estroboscópica de carrinho em movimento uniformemente variado.

Exemplo de movimento uniformemente variado

Quando um corpo bastante denso se move no ar, com velocidades baixas, a resistência do ar ao movimento é desprezível. É o que acontece, por exemplo, com uma esfera de aço de 2 cm de diâmetro movendo-se em relação ao ar a 4 m/s.

Como será justificado em Dinâmica, o movimento de um corpo, abandonado ou lançado verticalmente nas proximidades da superfície da Terra, é uniformemente variado desde que a resistência do ar possa ser desprezada. Além disso, veremos que a aceleração do corpo, chamada **aceleração da gravidade**, tem módulo **g** igual a 9,8 m/s^2, independentemente da massa do corpo!

Para simplificar os cálculos, arredondamos esse valor para 10 m/s^2; isso quer dizer que o módulo da velocidade do corpo varia 10 m/s em cada segundo.

Isso também significa, por exemplo, que o módulo da velocidade do corpo varia 1 m/s em cada décimo de segundo (0,1 s):

Uma esfera de aço lançada verticalmente para cima realiza, durante a subida, um MUV retardado: o módulo de sua velocidade diminui 1 m/s em cada décimo de segundo.

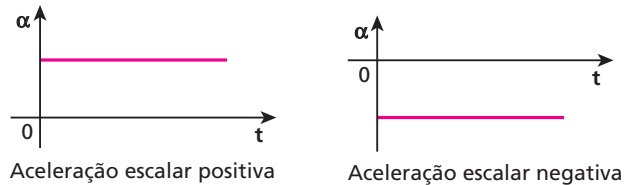
Uma esfera de aço solta de determinada altura realiza, ao descer, um MUV acelerado: o módulo de sua velocidade aumenta 1 m/s em cada décimo de segundo.

Algumas acelerações notáveis

A tabela a seguir fornece os valores aproximados de algumas acelerações escalares, expressos em função de **g** ($g = 9{,}8\ m/s^2$), e os valores aproximados de seus tempos de duração, em segundos:

	Aceleração	Tempo de duração
Elevadores	0,2 g	3 s
Parada brusca de um automóvel a 110 km/h, por ação dos freios	g	3 s
Ejeção do assento de um avião	de 15 g a 20 g	0,2 s
Colisão, possivelmente não fatal, entre automóveis ou aviões	de 20 g a 100 g	de 0,02 s a 0,1 s
Foguete partindo da plataforma de lançamento	45 g	de 0,2 s a 0,4 s
Colisão fatal entre automóveis ou aviões	de 150 g a 1 000 g	de 0,01 s a 0,001 s

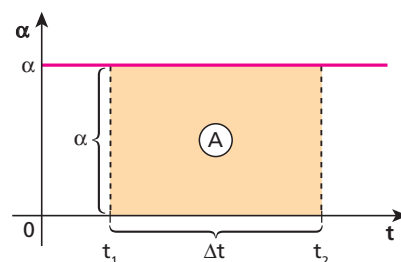
3. Representação gráfica da aceleração escalar em função do tempo

Sendo uma constante diferente de zero, a aceleração escalar é representada graficamente de uma das duas maneiras seguintes:

Observe que a aceleração escalar média de uma partícula em movimento uniformemente variado, calculada em qualquer intervalo de tempo, coincide com a aceleração escalar instantânea em qualquer instante por esta ser igual durante todo o movimento.

Assim, num MUV, temos:

$$\alpha_m = \alpha \quad \text{(constante e diferente de zero)}$$

4. Propriedade do gráfico da aceleração escalar em função do tempo

No gráfico da aceleração escalar (α) em função do tempo (**t**) dado a seguir, vamos calcular a "área" **A** limitada pelo gráfico e pelo eixo dos tempos entre os instantes t_1 e t_2:

$$A = \Delta t\ \alpha \text{ (I)}$$

$$\text{Como } \alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = \Delta t\ \alpha \text{ (II)}$$

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$A = \Delta v$$

No gráfico da aceleração escalar (α) em função do tempo (**t**), a "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes t_1 e t_2, expressa a variação da velocidade escalar entre t_1 e t_2.

$$\text{"Área"} = \Delta v = v_2 - v_1$$

5. Função horária da velocidade escalar instantânea

Vamos imaginar uma partícula em movimento uniformemente variado, numa trajetória orientada. Chamemos de v_0 sua velocidade escalar no instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos) e de **v** sua velocidade escalar num instante **t** qualquer.

Podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$\alpha = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v - v_0 = \alpha\, t$$

$$v = v_0 + \alpha\, t$$

Essa expressão fornece a velocidade escalar **v** num instante **t** qualquer do movimento. Ela é, por isso, denominada **função horária da velocidade escalar instantânea**.

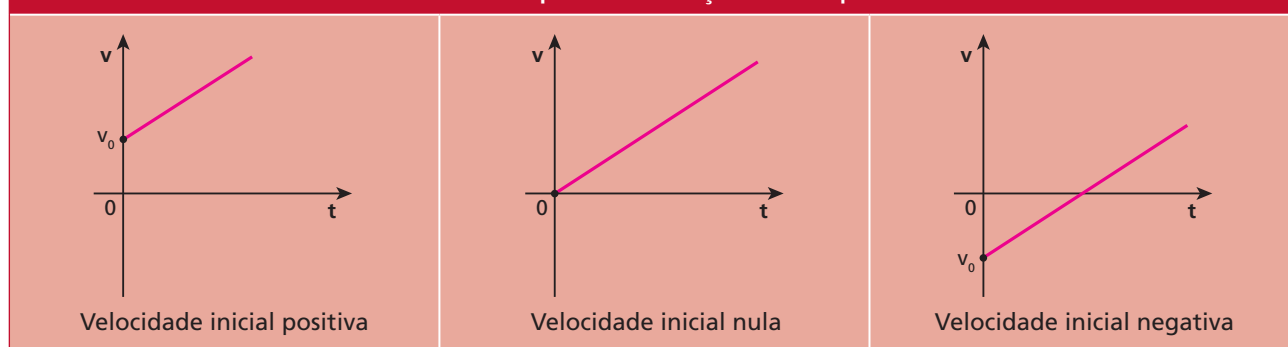
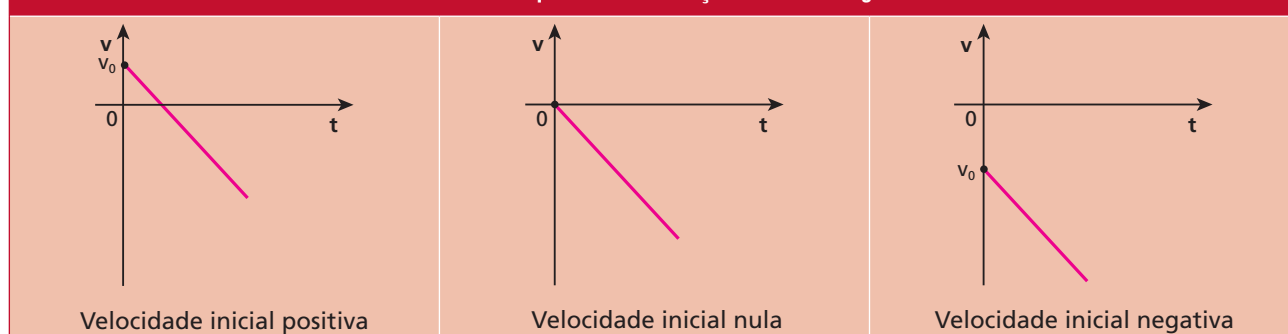
Observe que a função obtida é do **primeiro grau** em **t**.

6. Representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo

Como vimos, a função horária da velocidade escalar no movimento uniformemente variado é do primeiro grau em **t**:

$$v = v_0 + \alpha\, t$$

Consequentemente, sua representação gráfica é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos.

Se a aceleração escalar α for positiva, a função será crescente e sua representação gráfica poderá assumir os seguintes aspectos:

Entretanto, se a aceleração escalar for negativa, poderemos ter:

Exercícios nível 1

1. É dada a seguinte função horária da velocidade escalar de uma partícula em movimento uniformemente variado:

$$v = 15 + 20t \text{ (SI)}$$

Determine:
a) a velocidade escalar inicial e a aceleração escalar da partícula;
b) a velocidade escalar no instante 4 s;
c) o instante em que a velocidade escalar vale 215 m/s.

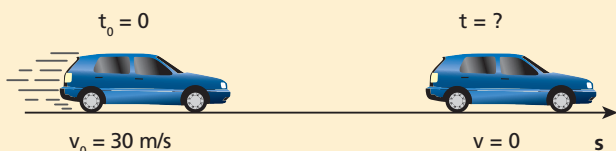
2. Na fase inicial da decolagem, um jato parte do repouso com aceleração escalar constante, atingindo a velocidade escalar de 64,8 km/h em 5 s.
Calcule essa aceleração.

3. No instante $t_0 = 0$, um automóvel a 20 m/s passa a frear com aceleração escalar constante igual a -2 m/s². Determine:
a) a função horária de sua velocidade escalar;
b) o instante em que sua velocidade escalar se anula.

4. Um automóvel parte do repouso, animado de aceleração escalar constante e igual a 3 m/s². Calcule a velocidade escalar do automóvel 10 s após a partida.

5. E.R. Um automóvel está a 30 m/s quando seus freios são acionados, garantindo-lhe uma aceleração de retardamento de módulo 5 m/s², suposta constante. Determine quanto tempo decorre até o automóvel parar.

Resolução:

Vamos representar o automóvel numa trajetória supostamente orientada, como na figura:

Durante todo o movimento, a velocidade escalar do automóvel é positiva, uma vez que ele se move no sentido da trajetória.

Como o movimento é retardado, a aceleração escalar deve ter sinal oposto ao da velocidade escalar. Assim, a aceleração escalar é negativa e vale:

$$\alpha = -5 \text{ m/s}^2$$

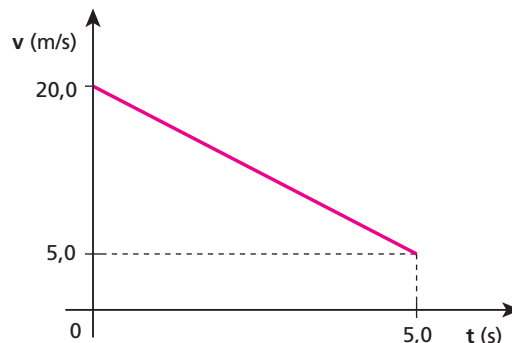
Como $v = v_0 + \alpha\, t$, vem:

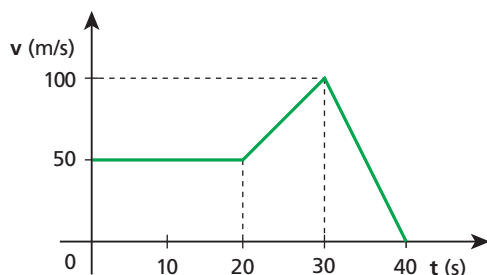
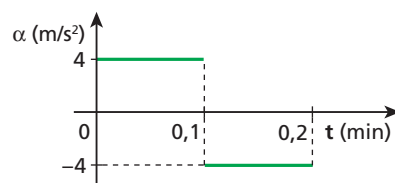
$$v = 30 - 5t$$

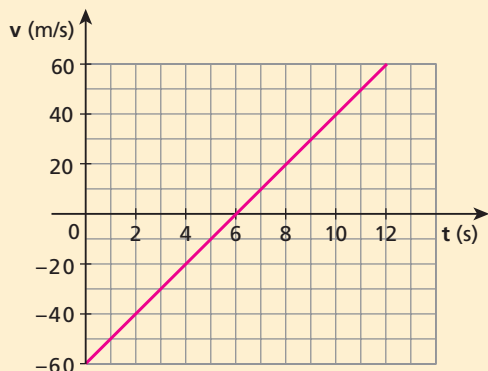
Fazendo v = 0, calculamos **t**:

$$0 = 30 - 5t \Rightarrow \boxed{t = 6 \text{ s}}$$

6. Um móvel inicia, em determinado instante, um processo de freagem em que lhe é comunicada uma aceleração escalar de módulo constante e igual a 4 m/s². Sabendo que o móvel para 20 s após a aplicação dos freios, determine sua velocidade escalar no instante correspondente ao início da freagem.

7. A velocidade escalar de um móvel variou com o tempo conforme o gráfico a seguir. Calcule a velocidade escalar desse móvel no instante t = 3,5 s.

Exercícios nível 2

8. Trace o gráfico da aceleração escalar em função do tempo, correspondente ao gráfico v × t dado a seguir:

9. A aceleração escalar de um automóvel em função do tempo está representada ao lado.

Sabendo que a velocidade escalar do automóvel era nula em $t_0 = 0$, determine:
a) a velocidade escalar em t = 0,1 min;
b) o gráfico da velocidade escalar em função do tempo no intervalo de $t_0 = 0$ a t = 0,2 min.

10. E.R. O gráfico a seguir mostra como a velocidade escalar instantânea de um corpo em movimento uniformemente variado comporta-se em relação ao tempo num intervalo de 12 s:

Determine:

a) a função horária da velocidade escalar;

b) os intervalos de tempo em que o corpo se moveu no sentido da trajetória e em sentido oposto ao dela;

c) os intervalos de tempo em que o movimento foi acelerado e retardado.

Resolução:

a) A velocidade inicial é lida diretamente no gráfico:

$$v_0 = -60 \text{ m/s}$$

Devemos calcular a aceleração escalar (que é constante) usando, por exemplo, o intervalo de 0 a 6 s:

• Em $t_0 = 0$: $v_0 = -60$ m/s;

• Em $t = 6$ s: $v = 0$.

Então:

$$\alpha = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{0 - (-60)}{6 - 0} \Rightarrow \alpha = 10 \text{ m/s}^2$$

Assim:

$$v = v_0 + \alpha\, t \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = -60 + 10t \text{ (SI)}}$$

b) No intervalo de tempo dado por $0 \leqslant t < 6$ s, o corpo moveu-se em sentido oposto ao da trajetória, pois sua velocidade escalar foi negativa (movimento retrógrado). Entretanto, no intervalo dado por $6 \text{ s} < t \leqslant 12$ s, o movimento deu-se no mesmo sentido da trajetória, pois a velocidade escalar foi positiva (movimento progressivo).

Observe que $t = 6$ s é o instante em que o corpo para e inverte o sentido do movimento.

c) No intervalo dado por $0 \leqslant t < 6$ s, o movimento foi retardado, porque o módulo da velocidade escalar instantânea diminuiu com o tempo, ou porque a velocidade escalar e a aceleração escalar tiveram sinais contrários (velocidade negativa e aceleração positiva).

Já no intervalo dado por $6 \text{ s} < t \leqslant 12$ s, o movimento foi acelerado, porque o módulo da velocidade escalar instantânea cresceu com o tempo, ou porque a velocidade escalar e a aceleração escalar tiveram sinais iguais (ambas foram positivas).

11. Uma partícula move-se numa trajetória orientada, tendo sua velocidade escalar variando com o tempo conforme a função:

$$v = 20 - 4t \text{ (SI)}$$

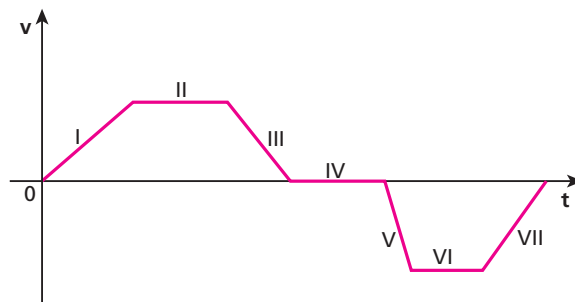
Essa função é definida para $t \geqslant 0$. Determine:

a) para que valores de **t** a partícula move-se no sentido da trajetória (movimento progressivo);

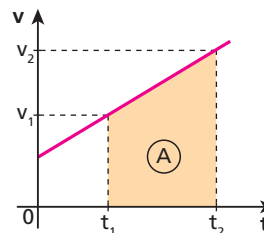
b) para que valores de **t** a partícula move-se em sentido oposto ao da trajetória (movimento retrógrado);

c) para que valores de **t** o movimento da partícula é acelerado;

d) para que valores de **t** o movimento da partícula é retardado.

12. A velocidade escalar de um corpo varia em função do tempo, como está representado no gráfico a seguir. Em cada um dos trechos de **I** a **VII**, classifique o movimento em: **progressivo** ou **retrógrado**; **acelerado**, **retardado** ou **uniforme**. Caso o corpo não esteja em movimento, classifique-o **em repouso**.

Bloco 2

7. Propriedade do gráfico da velocidade escalar em função do tempo

No gráfico da velocidade escalar (**v**) em função do tempo (**t**), a "área" **A** compreendida entre a reta inclinada e o eixo dos tempos, de um instante t_1 até outro instante t_2, expressa a variação de espaço Δs entre esses instantes:

$$A = \Delta s = s_2 - s_1$$

Apesar de essa propriedade ter sido demonstrada no Tópico 2 para o caso particular do movimento uniforme, frisamos que ela **é válida para qualquer movimento.**

Velocidade escalar média no MUV

O movimento uniformemente variado tem uma propriedade bastante útil: a velocidade escalar média entre dois instantes t_1 e t_2 é a média aritmética entre as velocidades escalares v_1 e v_2 nesses instantes.

Para provar essa propriedade, vamos usar o gráfico anterior, lembrando que a área **A** de um trapézio é dada por:

$$A = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$$

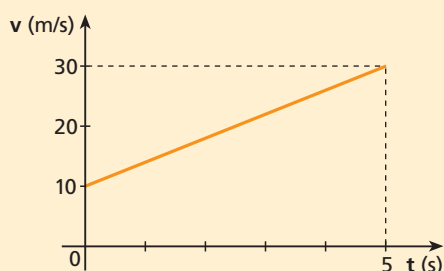
$$\text{Então: } \Delta s = A = \frac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\text{Como } v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}\text{, temos:}$$

$$v_m = \frac{\frac{(v_2 + v_1)}{2} \cdot (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \Rightarrow \boxed{v_m = \frac{(v_1 + v_2)}{2}}$$

Exercícios

nível 1

13. E.R. A velocidade escalar de um móvel variou com o tempo conforme o gráfico seguinte:

Calcule:

a) a distância percorrida pelo móvel no intervalo de tempo de 0 a 5 s;

b) a velocidade escalar média do móvel no mesmo intervalo de tempo.

Resolução:

a) Como a velocidade escalar instantânea foi positiva durante todo o intervalo de tempo considerado, concluímos que a distância percorrida (**d**) é igual à variação de espaço (Δs), que é dada pela "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos ("área" de um trapézio). Assim:

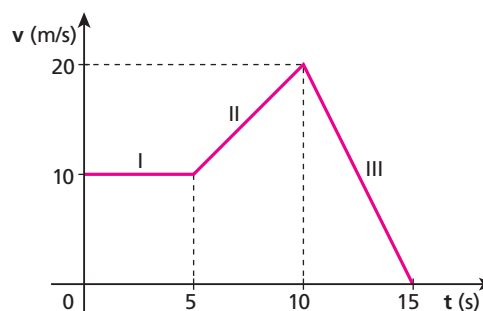
$$d = \text{"área"} = \frac{(30 + 10)}{2} \cdot 5 \Rightarrow \boxed{d = 100\text{ m}}$$

b) Aplicando a fórmula da velocidade escalar média, temos:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100}{5} \Rightarrow \boxed{v_m = 20\text{ m/s}}$$

Note que v_m é a média aritmética entre as velocidades nos instantes 0 e 5 s:

$$v_m = \frac{v_0 + v_5}{2} = \frac{10 + 30}{2} \Rightarrow \boxed{v_m = 20\text{ m/s}}$$

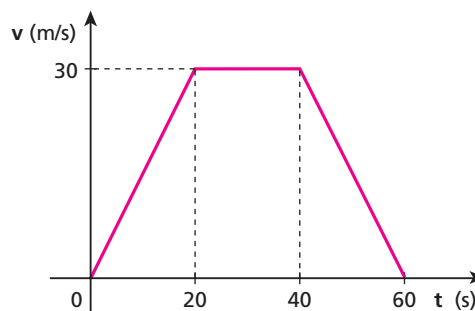
14. A velocidade escalar de um corpo é dada em função do tempo pelo gráfico a seguir:

a) Calcule a aceleração escalar do corpo em cada trecho (α_I, α_{II} e α_{III}).

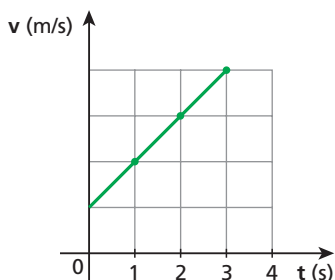
b) Calcule a distância percorrida nos 15 segundos.

15. Um motociclista entra em um túnel a 10 m/s. A partir desse instante, acelera uniformemente a 2 m/s^2, chegando ao final do túnel com velocidade de 26 m/s.

a) Trace o gráfico da velocidade escalar do motociclista em função do tempo desde o instante $t_0 = 0$ (entrada no túnel) até o instante de saída (t').

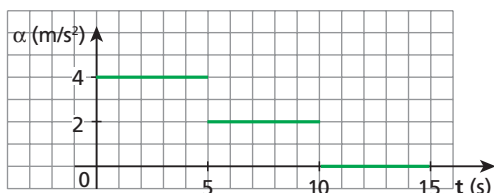
b) Calcule o comprimento do túnel.

16. A velocidade escalar de um corpo variou de acordo com o gráfico a seguir. Dessa maneira, ele percorreu uma determinada distância **d**. Que velocidade escalar constante esse corpo deveria manter no mesmo intervalo de tempo de 60 s para percorrer a mesma distância **d**?

17. (Cesgranrio-RJ) A velocidade de uma partícula varia com o passar do tempo conforme o gráfico abaixo.

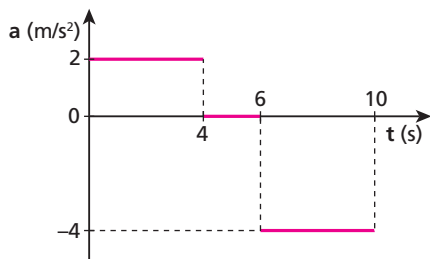
O seu deslocamento do instante 0 s até o instante 1 s foi de 1,5 m. Por meio da observação do gráfico, diga qual é o deslocamento entre os instantes 2 s e 3 s.

18. (UFES) Um predador, partindo do repouso, alcança sua velocidade escalar máxima de 54 km/h em 4,0 s e mantém essa velocidade escalar durante 10,0 s. Se não alcançar sua presa nesses 14,0 s, o predador desiste da caçada. A presa, partindo do repouso, alcança sua velocidade escalar máxima, que é $\frac{4}{5}$ da velocidade escalar máxima do predador, em 5,0 s e consegue mantê-la por mais tempo que o predador. Suponha-se que as acelerações são constantes, que o início do ataque e da fuga são simultâneos e que predador e presa partem do repouso descrevendo uma mesma trajetória retilínea. Para o predador obter sucesso em sua caçada, a distância inicial máxima entre ele e a presa é de:

a) 21 m b) 30 m c) 42 m d) 72 m e) 80 m

Exercícios nível 2

19. Sabe-se que no instante $t_0 = 0$ a velocidade escalar de uma partícula era de 10 m/s e que sua aceleração escalar variou conforme o gráfico:

a) Trace o gráfico da velocidade escalar em função do tempo, de $t_0 = 0$ a $t = 15$ s.

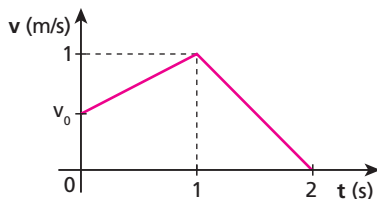
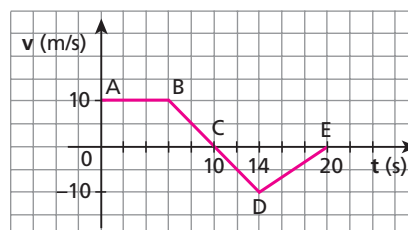
b) É correto afirmar que sempre que a aceleração escalar de uma partícula diminui sua velocidade escalar também diminui?

20. (Mack-SP) Gustavo, estudando o movimento retilíneo de um pequeno corpo, a partir do repouso, verifica que a aceleração escalar varia com o tempo de acordo com o gráfico dado. O espaço efetivamente percorrido pelo móvel nos primeiros 10 s de movimento é:

a) 24 m. b) 48 m. c) 72 m. d) 96 m. e) 120 m.

21. Um móvel tem velocidade escalar variável com o tempo, conforme o gráfico ao lado. O espaço percorrido entre os instantes $t_0 = 0$ e $t = 2$ s é de 1,2 m.

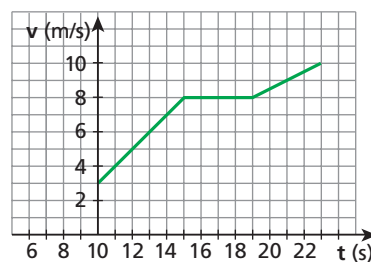
Determine:

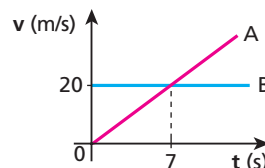
a) a velocidade escalar inicial v_0;

b) a velocidade escalar de um automóvel em movimento uniforme que percorresse a mesma distância no mesmo intervalo de tempo.

22. Este gráfico fornece a velocidade escalar de um ponto material em função do tempo.

Determine:

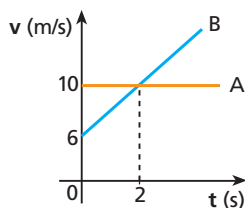
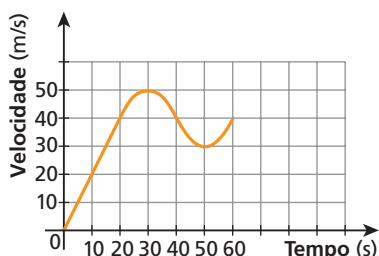
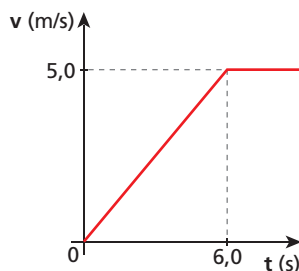
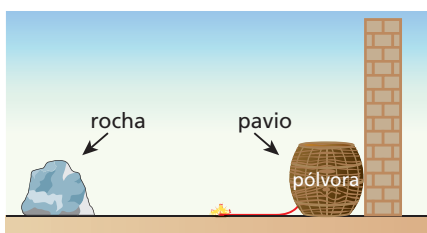
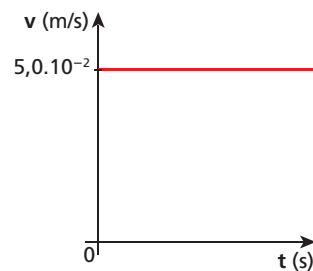
a) o máximo afastamento do ponto material em relação à posição inicial, no intervalo de 0 a 20 s;

b) a distância percorrida de $t_0 = 0$ até $t = 20$ s.

23. (Fuvest-SP) Um carro se desloca numa trajetória retilínea e sua velocidade em função do tempo, a partir do instante t = 10 s, está representada no gráfico. Se o carro partiu do repouso e manteve uma aceleração constante até t = 15 s, a distância percorrida, desde sua partida até atingir a velocidade de 6 m/s, vale:

a) 12,5 m. c) 24,5 m. e) 84,5 m.
b) 18,0 m. d) 38,0 m.

24. Um automóvel **A** encontra-se em repouso diante de um semáforo fechado. Assim que o semáforo abre, **A** está entrando em movimento e outro automóvel **B** está passando por ele. O gráfico mostra as velocidades escalares de **A** e **B** em função do tempo:

a) Em que instante **t** os automóveis voltam a se encontrar?

b) Qual foi a máxima distância entre eles no intervalo de tempo de 0 a **t**?

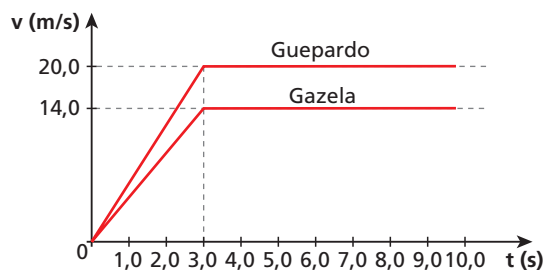
25. (Mack-SP — mod.) Em certo instante passam pela origem de uma trajetória retilínea os móveis **A**, em movimento uniforme, e **B**, em movimento uniformemente variado. A partir desse instante, constrói-se o diagrama abaixo. Em que instante o móvel **B** está 32 m à frente de **A**?

26. (UFC-CE) Um veículo está parado ao lado do marco que indica "km 20" (o marco "km 0" fica em Fortaleza, no bairro Aerolândia) da rodovia BR 116, que liga Fortaleza ao Sul do Brasil. No instante t = 0, o veículo começa a se mover, afastando-se de Fortaleza. O gráfico abaixo mostra como varia sua velocidade escalar em função do tempo. Ao lado de que marco estará o veículo após se mover durante 60 segundos?

27. (UFSCar-SP) Em um filme, para explodir a parede da cadeia a fim de que seus comparsas pudessem escapar, o "bandido" ateia fogo a um pavio de 0,60 m de comprimento, que tem sua outra extremidade presa a um barril contendo pólvora. Enquanto o pavio queima, o "bandido" se põe a correr em sentido oposto e, no momento em que salta sobre uma rocha, o barril explode.

Ao planejar essa cena, o piroplasta utilizou os dados gráficos obtidos cuidadosamente da análise das velocidades do dublê (que representa o bandido) e da chama no pavio, o que permitiu determinar que a rocha deveria estar a uma distância, relativamente ao ponto em que o pavio foi aceso, em m, de:

a) 20,0 b) 25,0 c) 30,0 d) 40,0 e) 45,0

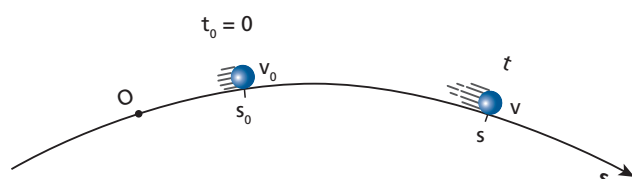
28. (FMTM-MG) Nas planícies africanas, o jogo entre predador e presa encontra um limite delicado. A gazela, sempre atenta, vive em grupos. É rápida e seu corpo suporta uma aceleração de 0 m/s a 14,0 m/s em 3,0 s.

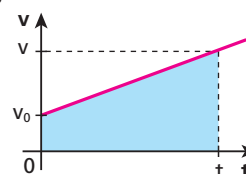
O guepardo, com sua cabeça pequena e mandíbulas curtas projetadas para um abate preciso por estrangulamento, está bem camuflado e, com seu corpo flexível, amplia sua passada, sobrevoando o solo na maior parte de sua corrida. Mais ágil que a gazela vai de 0 m/s a 20,0 m/s em 3,0 s. O esforço, no entanto, eleva sua temperatura a níveis perigosos de sobrevivência e, em virtude disto, as perseguições não podem superar 20,0 s.

Um guepardo aproxima-se a 27,0 m de uma gazela. Parados, gazela e guepardo fitam-se simultaneamente, quando, de repente, começa a caçada. Supondo-se que ambos corram em uma trajetória retilínea comum e, considerando-se o gráfico dado a seguir, que traduz o desempenho de cada animal, a duração da caçada será de:

a) 3,0 s b) 4,0 s c) 6,0 s d) 10,0 s e) 11,0 s

Bloco 3

8. Função horária do espaço

Considere uma partícula em movimento uniformemente variado numa trajetória orientada:

No instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos), o espaço é s_0 e a velocidade escalar é v_0. No instante **t**, o espaço é **s** e a velocidade escalar é **v**.

Queremos a expressão de **s** em função de **t**. Para isso, traçamos o gráfico **v** × **t**:

Como já vimos, a "área" destacada na figura expressa a variação de espaço Δs de 0 a **t**:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v)}{2} \cdot t$$

Lembrando que $v = v_0 + \alpha t$, temos que:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + v_0 + \alpha t)}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Como $\Delta s = s - s_0$, vem:

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Assim, chegamos à **função horária dos espaços** num MUV:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Note que essa função é do **segundo grau em t**.

Em muitas situações, é mais conveniente escrever da seguinte forma a função obtida:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

em que Δs é o deslocamento escalar ocorrido desde o instante $t_0 = 0$ até o instante **t**.

Exercícios — nível 1

29. E.R. No instante adotado como origem dos tempos, o espaço de uma partícula vale −14 m e sua velocidade escalar é igual a 5 m/s. Sua aceleração escalar é constante e igual a 2 m/s² **para qualquer instante t**. Determine:

a) o instante em que a partícula passa pela origem dos espaços;

b) a velocidade escalar da partícula ao passar pela origem dos espaços.

Resolução:

a) Temos que:

$$s_0 = -14 \text{ m}$$
$$v_0 = 5 \text{ m/s}$$
$$\alpha = 2 \text{ m/s}^2$$

Como se trata de um MUV, a função horária dos espaços é do tipo:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

Substituindo os valores de s_0, v_0 e α nessa expressão, obtemos:

$$s = -14 + 5t + t^2 \text{ (SI)}$$

Na origem dos espaços, temos $s = 0$. Então:

$$0 = -14 + 5t + t^2 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

donde:

$$t' = 2 \text{ s} \quad \text{ou} \quad t'' = -7 \text{ s}$$

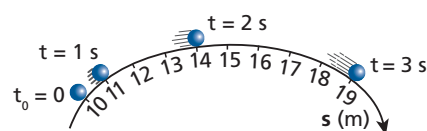
Isso significa que a partícula passa pela origem dos espaços no instante t' = 2 s, isto é, 2 segundos após o instante adotado como origem dos tempos, e no instante t" = −7 s, isto é, 7 segundos antes do instante adotado como origem.

b) Temos que $v = v_0 + \alpha t$. Assim:

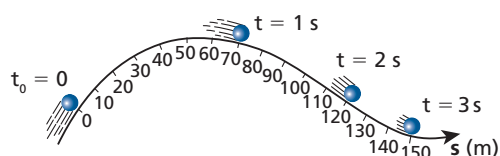
$$v = 5 + 2t$$

$$\text{Em } t' = 2 \text{ s} \Rightarrow v' = 5 + 2(2) \Rightarrow \boxed{v' = 9 \text{ m/s}}$$

$$\text{Em } t'' = -7 \text{ s} \Rightarrow v'' = 5 + 2(-7) \Rightarrow \boxed{v'' = -9 \text{ m/s}}$$

30. O esquema seguinte mostra quatro posições ocupadas por uma partícula em movimento uniformemente variado. Sabe-se que, em $t_0 = 0$, a partícula parte do repouso animada de aceleração escalar de 2 m/s². Essa aceleração é mantida constante mesmo após o instante t = 3 s.

a) Determine o espaço e a velocidade escalar da partícula no instante t = 5 s.

b) O movimento é acelerado ou retardado?

31. No esquema seguinte, observa-se uma partícula em quatro instantes sucessivos de seu movimento uniformemente retardado. Sabe-se que no instante $t_0 = 0$ a velocidade escalar da partícula vale 80 m/s.

Sendo 20 m/s² o módulo da aceleração escalar da partícula, determine:

a) o instante em que ela para;

b) a distância percorrida pela partícula desde $t_0 = 0$ até parar.

32. Um móvel parte do repouso e desce por uma rampa plana com aceleração escalar constante. Ao fim de 2 segundos, o móvel já percorreu 6 m. Determine:

a) a aceleração escalar do móvel;

b) a velocidade escalar do móvel ao fim de 2 segundos de movimento.

33. Os aviões decolam e se mantêm em voo graças a uma força para cima, denominada sustentação, que atua em suas asas. Essa força é consequência da queda de pressão que ocorre na região superior das asas quando o ar escoa por elas, e sua intensidade aumenta quando a velocidade do avião em relação ao ar

aumenta. Assim, para decolar, um avião precisa atingir uma velocidade suficientemente alta.

Em um horário em que não ventava, um avião a jato de grande porte precisou atingir a velocidade de 540 km/h para conseguir decolar. Foi cronometrado um tempo de 30 s desde quando o avião começou a se mover até atingir essa velocidade.

Supondo que ele tenha sido acelerado uniformemente, determine, nesses 30 s:

a) sua aceleração escalar, em m/s^2;

b) o comprimento do trecho de pista percorrido, que corresponde ao mínimo comprimento que a pista precisa ter para o sucesso da decolagem.

34. (Unicamp-SP) Os avanços tecnológicos nos meios de transporte reduziram de forma significativa o tempo de viagem ao redor do mundo. Em 2008 foram comemorados os 100 anos da chegada em Santos do navio *Kasato Maru*, que, partindo de Tóquio, trouxe ao Brasil os primeiros imigrantes japoneses. A viagem durou cerca de 50 dias. Atualmente, uma viagem de avião entre São Paulo e Tóquio dura em média 24 horas. A velocidade escalar média de um avião comercial no trecho São Paulo-Tóquio é de 800 km/h.

a) O comprimento da trajetória realizada pelo *Kasato Maru* é igual a aproximadamente duas vezes o comprimento da trajetória do avião no trecho São Paulo-Tóquio. Calcule a velocidade escalar média do navio em sua viagem ao Brasil.

b) A conquista espacial possibilitou uma viagem do homem à Lua realizada em poucos dias e proporcionou a máxima velocidade de deslocamento que um ser humano já experimentou. Considere um foguete subindo com uma aceleração resultante constante de módulo $a_R = 10$ m/s^2 e calcule o tempo que o foguete leva para percorrer uma distância de 800 km, a partir do repouso.

35. Um automóvel move-se a 108 km/h quando seu motorista pisa severamente no freio, de modo a parar o veículo em 3 s. Calcule a distância percorrida pelo automóvel nesses 3 s.

36. A função horária dos espaços de um corpo é:

$$s = t^2 - 13t + 40 \text{ (SI)}$$

Determine o(s) instante(s) em que o corpo passa pela origem dos espaços.

37. Os espaços de um móvel variam com o tempo, conforme a seguinte função horária:

$$s = 20 - 12t + 3t^2$$

em que os espaços (**s**) são medidos em centímetros e os tempos (**t**), em segundos. Determine :

a) o(s) instante(s) em que o móvel passa pela origem dos espaços;

b) o instante e a posição do móvel quando ocorre a inversão do sentido do movimento.

38. Duas partículas **A** e **B** deslocam-se ao longo de uma mesma trajetória. Suas funções horárias, definidas a partir do mesmo referencial, são dadas por:

$$S_A = 4t^2 - 3 \text{ e } S_B = 5t^2 - 4t$$

com **S** em metros e **t** em segundos.

Determine:

a) para que valores de **t** as partículas se encontram;

b) as posições em que os encontros ocorrem.

39. (UFPA) Um automóvel, partindo do repouso com aceleração constante, percorre **1 metro** em **1 segundo** em trajetória retilínea. Indique a alternativa que contém os valores da **aceleração** e da **velocidade final**, respectivamente, em **m/s²** e **m/s**.

a) 2 e 2 b) 4 e 2 c) 1 e 1 d) 2 e 4 e) 1 e 4

Exercícios nível 2

40. E.R. Um automóvel **A** entra em movimento com aceleração escalar constante e igual a 3 m/s^2 no mesmo instante em que passa por ele outro automóvel **B**, com velocidade escalar constante e igual a 30 m/s. Os dois veículos percorrem a mesma estrada, no mesmo sentido.

a) Considerando $t_0 = 0$ quando **A** partiu, determine o instante em que **A** alcança **B**.

b) Calcule a velocidade de **A** nesse instante.

Resolução:

a) Desde o instante da partida de **A** ($t_0 = 0$) até o instante **t**, em que **A** alcança **B**, suas variações de espaço (Δs) são iguais. O movimento de **A** é uniformemente variado. Assim, para esse movimento, temos:

$$s_A = s_{0_A} + v_{0_A}\, t + \frac{\alpha_A}{2}\, t^2 \text{ ou } \Delta s_A = v_{0_A}\, t + \frac{\alpha_A}{2}\, t^2$$

$$\Delta s_A = 0 \cdot t + \frac{3}{2}\, t^2 = 1{,}5t^2 \text{ (SI)}$$

Como o movimento de **B** é uniforme, temos:

$$s_B = s_{0_B} + v_B\, t \text{ ou } \Delta s_B = v_B\, t$$

$$\Delta s_B = 30t \text{ (SI)}$$

Igualamos, então, Δs_A com Δs_B: $1{,}5t^2 = 30t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 20 \text{ s} \end{cases}$

Evidentemente, o instante que procuramos é posterior a $t_0 = 0$. Portanto, a resposta é:

$$\boxed{t = 20 \text{ s}}$$

b) Para o movimento de **A**, podemos escrever:

$$v_A = v_{0_A} + \alpha_A\, t \Rightarrow v_A = 0 + 3 \cdot 20$$

$$\boxed{v_A = 60 \text{ m/s}}$$

Nota:

• Este exercício (e muitos outros) pode ser resolvido mais facilmente a partir do gráfico **v × t**, como foi feito no exercício 24.

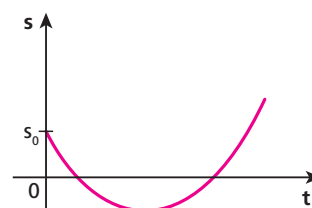
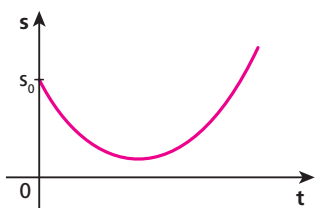
41. (Olimpíada Brasileira de Física) Em uma estrada de pista única, uma moto de 2,0 m de comprimento, cuja velocidade tem módulo igual a 22,0 m/s, quer ultrapassar um caminhão longo de 30,0 m, que está com velocidade constante de módulo igual a 10,0 m/s. Supondo-se que a moto faça a ultrapassagem com uma aceleração de módulo igual a 4,0 m/s^2, calcule o tempo que ela leva para ultrapassar o caminhão e a distância percorrida durante a ultrapassagem.

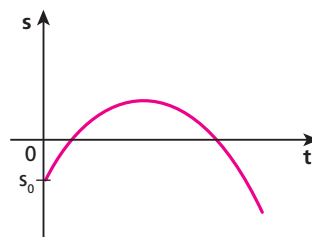
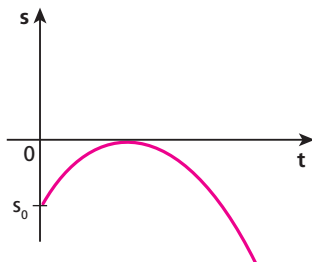
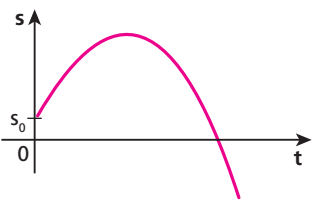
Bloco 4

9. Representação gráfica do espaço em função do tempo

Como vimos, no MUV o espaço varia com o tempo conforme uma função do segundo grau em **t**:

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{\alpha}{2}\,t^2$$

A Matemática nos ensina, e constataremos isso, que a representação gráfica dessa função é um arco de parábola. Além disso, quando a aceleração escalar é positiva, esse arco tem sua concavidade voltada para cima, podendo ter, por exemplo, os seguintes aspectos:

Nos três casos, a aceleração escalar é positiva.

Já, se a aceleração escalar é negativa, a concavidade do arco de parábola está voltada para baixo, como, por exemplo:

Nos três casos, a aceleração escalar é negativa.

Em todos os gráficos s × t acima, no instante correspondente ao vértice do arco de parábola, a velocidade é nula, ocorrendo então a inversão do sentido do movimento.

Exercícios

nível 1

42. E.R. Uma partícula em movimento uniformemente variado obedece à seguinte função horária dos espaços, com **s** em metros e **t** em segundos:

$$s = 12 - 8t + t^2$$

a) Represente graficamente o espaço em função do tempo no intervalo de 0 a 8 s.

b) Marque as posições da partícula numa trajetória suposta retilínea, nos instantes 0, 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s, 6 s, 7 s e 8 s.

Resolução:

a) Calculamos os espaços nos seguintes instantes:

$t = 0 \Rightarrow s = 12 - 8(0) + (0)^2 \Rightarrow s = 12\ m$

$t = 1\ s \Rightarrow s = 12 - 8(1) + (1)^2 \Rightarrow s = 5\ m$

$t = 2\ s \Rightarrow s = 12 - 8(2) + (2)^2 \Rightarrow s = 0$

$t = 3\ s \Rightarrow s = 12 - 8(3) + (3)^2 \Rightarrow s = -3\ m$

$t = 4\ s \Rightarrow s = 12 - 8(4) + (4)^2 \Rightarrow s = -4\ m$

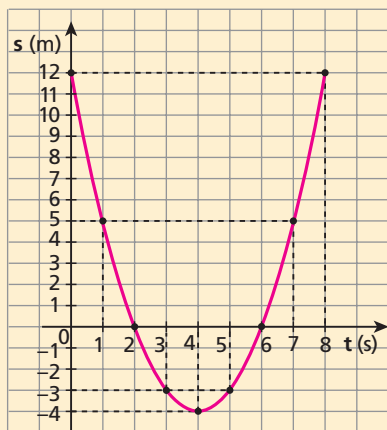
$t = 5\ s \Rightarrow s = 12 - 8(5) + (5)^2 \Rightarrow s = -3\ m$

$t = 6\ s \Rightarrow s = 12 - 8(6) + (6)^2 \Rightarrow s = 0$

$t = 7\ s \Rightarrow s = 12 - 8(7) + (7)^2 \Rightarrow s = 5\ m$

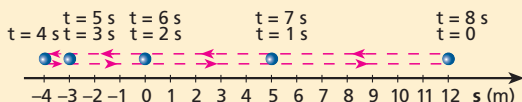
$t = 8\ s \Rightarrow s = 12 - 8(8) + (8)^2 \Rightarrow s = 12\ m$

Organizamos os resultados numa tabela e, em seguida, fazemos a representação gráfica:

s (m)	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12
t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Observe que o gráfico obtido é um arco de parábola com a concavidade voltada para cima, o que sempre acontece quando a aceleração escalar é positiva.

b) Numa trajetória retilínea, as posições da partícula são dadas por:

t = 5 s t = 6 s t = 7 s t = 8 s
t = 4 s t = 3 s t = 2 s t = 1 s t = 0

–4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 s (m)

De $t = 0$ a $t = 4$ s, a partícula moveu-se em sentido oposto ao da trajetória. Em $t = 4$ s, que é o instante correspondente ao vértice da parábola no gráfico **s** × **t**, ocorre a inversão do sentido do movimento. De $t = 4$ s a $t = 8$ s, a partícula moveu-se no mesmo sentido da trajetória.

De $t = 0$ a $t = 4$ s, o movimento foi retardado, pois a partícula percorreu, por segundo, uma distância cada vez menor.

De $t = 4$ s a $t = 8$ s, o movimento foi acelerado, pois a distância percorrida, por segundo, foi cada vez maior.

Observe que a partícula passou pela origem dos espaços duas vezes: em $t = 2$ s e em $t = 6$ s.

Note também que a forma do gráfico **s** × **t** nada tem a ver com a da trajetória.

Notas:

- O movimento uniformemente variado apresenta uma fase de ida e uma fase de volta, ambas descritas pelas **mesmas equações**. Só não apresenta duas fases quando o movimento é incompleto, como a decolagem de um avião e a freagem de um automóvel, por exemplo.
- O tempo para a partícula se deslocar entre dois pontos determinados é o mesmo na ida e na volta.
- Se você calcular, na ida e na volta, as velocidades escalares da partícula numa mesma posição ($s = 5$ m, por exemplo), poderá verificar que elas têm o mesmo valor absoluto.

43. O espaço (**s**) em função do tempo (**t**) para um objeto em movimento uniformemente variado é dado pela expressão:

$$s = 25 - 10t + t^2 \quad \text{(SI)}$$

Determine:

a) o instante em que a velocidade se anula;

b) os gráficos do espaço, da velocidade escalar e da aceleração escalar em função do tempo.

44. A função horária do espaço para o movimento de um ponto material é:

$$s = 4t - 2t^2 \text{ (SI)}$$

Determine, para esse ponto material:

a) os instantes em que ele está na origem dos espaços;

b) o instante e a posição correspondentes à inversão do sentido do movimento;

c) o gráfico do espaço em função do tempo.

45. Com relação a um movimento uniformemente variado, com as etapas de ida e volta, podemos afirmar que:

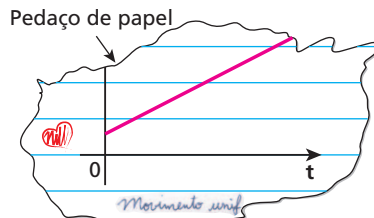
a) a trajetória da partícula é um arco de parábola;

b) antes do instante correspondente ao vértice da parábola do gráfico do espaço **s** em função do tempo **t** o movimento é acelerado;

c) a partícula não pode passar por um mesmo ponto duas vezes;

d) no instante correspondente ao vértice da parábola no gráfico **s x t**, ocorre a inversão do sentido do movimento;

e) no instante da inversão do sentido do movimento, tanto a velocidade como a aceleração escalar são nulas.

46. No lixo de uma sala de aula de primeira série do Ensino Médio, foi encontrado um pedaço de papel em que estava traçado um gráfico referente a um movimento. Só era possível ler “Movimento unif”.

Pode-se afirmar que esse gráfico corresponde a um movimento:

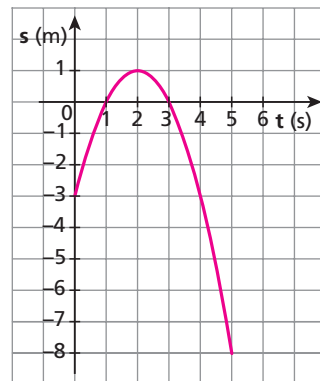
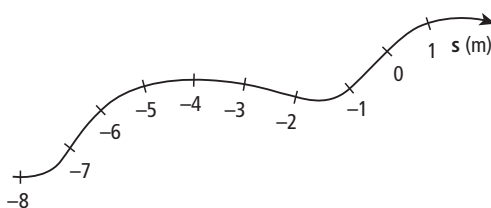
a) certamente uniforme.

b) certamente uniformemente variado.

c) certamente retilíneo.

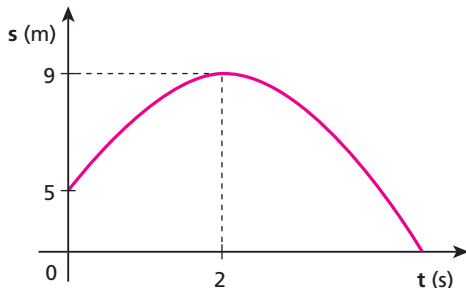
d) uniforme ou uniformemente variado.

e) acelerado com certeza.

47. O gráfico ao lado corresponde ao movimento uniformemente variado de uma partícula:

a) Supondo que a trajetória da partícula seja a representada a seguir, copie-a, indicando a posição da partícula nos instantes 0, 1 s, 2 s, 3 s, 4 s e 5 s.

b) O movimento é acelerado ou retardado para $0 < t < 2$ s? E para $t > 2$ s?

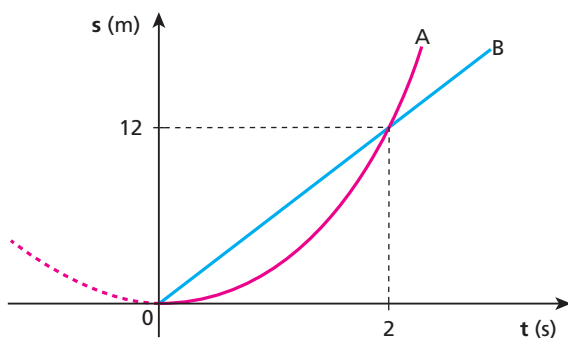
Exercícios

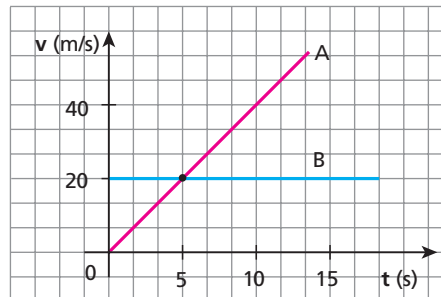
nível 2

48. O gráfico a seguir, do espaço **s** em função do tempo **t**, refere-se a um movimento uniformemente variado:

Determine:

a) a velocidade escalar do móvel no instante $t_0 = 0$;

b) a aceleração escalar do móvel.

49. São dados a seguir os gráficos referentes aos movimentos de dois veículos **A** e **B**. O gráfico de **A** é um arco de parábola com vértice em t = 0.

Calcule a velocidade escalar de **A** em t = 2 s.

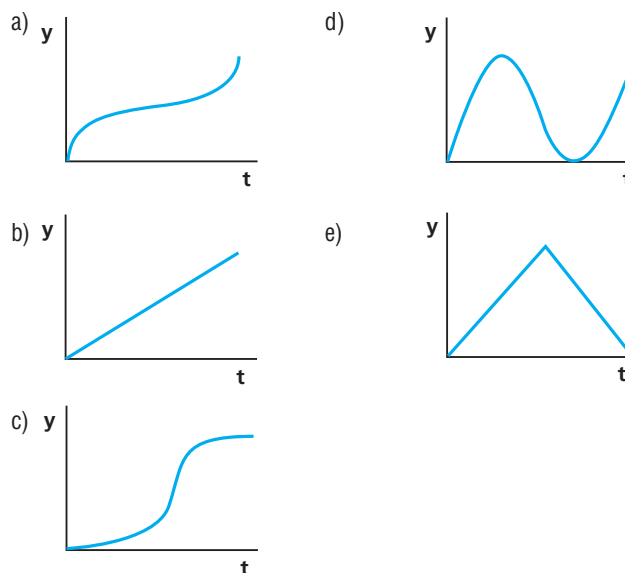
50. No instante $t_0 = 0$, dois motociclistas **A** e **B** estão em uma mesma posição de uma estrada. Considerando essa posição como origem dos espaços e sabendo que suas velocidades escalares comportam-se em relação ao tempo conforme o diagrama abaixo, trace, num mesmo par de eixos, os gráficos do espaço em função do tempo para **A** e **B**, indicando o instante e a posição em que voltam a se encontrar.

51. (Olimpíada Paulista de Física) Uma taça de forma esférica, como mostra a figura ao lado, está sendo cheia com água a uma taxa constante. A altura do líquido, **y**, em função do tempo, **t**, pode ser representada graficamente por:

a)

b)

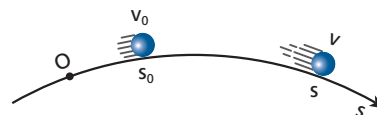
c)

d)

e)

Bloco 5

10. Equação de Torricelli

Já relacionamos **s** com **t** e **v** com **t**.

Busquemos, agora, uma expressão que forneça a velocidade escalar **v** de uma partícula em movimento uniformemente variado em função de seu espaço **s**. Para isso, considere uma partícula que tem, em $t_0 = 0$, espaço s_0 e velocidade escalar v_0 e que, num instante **t** qualquer, tem velocidade escalar **v** e espaço **s**. Seja α sua aceleração escalar, constante e diferente de zero.

Sabemos que no movimento uniformemente variado:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \qquad (I)$$

$$v = v_0 + \alpha t \qquad (II)$$

Vamos isolar o tempo **t** numa das equações e substituí-lo na outra, para obtermos **v** em função de **s**.

De (II), temos: $t = \dfrac{v - v_0}{\alpha}$ (III)

Substituindo (III) em (I), obtemos:

$$s = s_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{v - v_0}{\alpha}\right)^2$$

$$s - s_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{\alpha} + \frac{\alpha\left(v^2 - 2v\,v_0 + v_0^2\right)}{2\alpha^2}$$

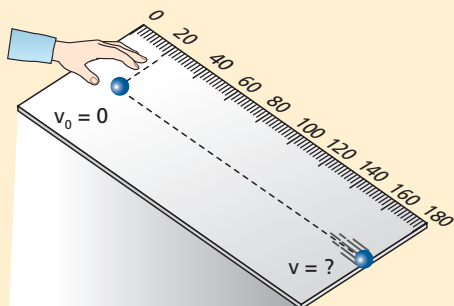
$$s - s_0 = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2\alpha}$$

$$s - s_0 = \frac{v^2 - 2\,v_0^2}{2\alpha}$$

$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(s - s_0)$ ou $v^2 = v_0^2 + 2\alpha\,\Delta s$

A expressão obtida agiliza os cálculos em situações que não envolvem a variável **t** (tempo).

Exercícios nível 1

52. E.R. Uma esfera de aço é abandonada numa rampa inclinada na qual está colocada uma fita métrica graduada em centímetros, como representa a figura.

A aceleração escalar da esfera é praticamente constante e igual a 5 m/s². Calcule sua velocidade escalar **v** no final da rampa.

Resolução:

Temos: $s_0 = 20\text{ cm} = 0{,}2\text{ m}$
$s = 180\text{ cm} = 1{,}8\text{ m}$
$v_0 = 0$
$\alpha = 5\text{ m/s}^2$

Então: $v^2 = v_0^2 + 2\alpha(s - s_0)$
$v^2 = 0^2 + 2 \cdot 5 \cdot (1{,}8 - 0{,}2) \Rightarrow \boxed{v = 4\text{ m/s}}$

53. No tubo de imagem de um televisor, um elétron, liberado com velocidade nula por um filamento quente, é acelerado uniformemente por um campo elétrico, atingindo a velocidade de $6 \cdot 10^6$ m/s após percorrer 1,8 cm. Calcule a aceleração escalar desse elétron.

54. Um foguete parte do repouso de uma plataforma de lançamento, com aceleração escalar de 440 m/s², suposta constante, que é mantida nos primeiros 19,8 m da subida. Calcule:
a) a velocidade escalar do foguete no final desse deslocamento;
b) o tempo decorrido para essa velocidade ser atingida.

55. Enquanto uma partícula percorre 10 m, sua velocidade escalar instantânea varia de 10 m/s a 20 m/s. Determine sua aceleração escalar, suposta constante.

56. Deslocando-se com velocidade escalar igual a 30 m/s, um vagão ferroviário é desacelerado até o repouso com aceleração constante. O vagão percorre 100 metros até parar. Qual a aceleração escalar do vagão?

57. Um automóvel está a 72 km/h quando seus freios são acionados, imprimindo-lhe uma aceleração escalar constante de módulo igual a 5 m/s². Calcule a distância que ele percorre desde o instante em que inicia a freada até parar e a duração desse percurso.

58. (Fuvest-SP) A velocidade máxima permitida em uma autoestrada é de 110 km/h (aproximadamente 30 m/s) e um carro, nessa velocidade, leva 6 s para parar completamente. Diante de um posto rodoviário, os veículos devem trafegar no máximo a 36 km/h (10 m/s). Assim, para que os carros em velocidade máxima consigam obedecer ao limite permitido ao passar em frente do posto, a placa referente à redução de velocidade deverá ser colocada antes do posto a uma distância de, pelo menos:

a) 40 m. b) 60 m. c) 80 m. d) 90 m. e) 100 m.

59. Um automóvel movia-se numa avenida quando seu motorista percebeu que o semáforo do cruzamento logo adiante estava fechado. O motorista freou, mas não conseguiu parar antes do cruzamento, atingindo outro veículo. Com base nos danos causados nos veículos, técnicos da polícia estimaram que o automóvel do motorista infrator estava a 36 km/h no momento da colisão. A 50 m do acidente, foi encontrada uma marca no asfalto, que corresponde ao local em que o motorista pisou desesperadamente no freio. Sabendo que os freios do veículo conseguem produzir uma aceleração escalar praticamente constante, de módulo igual a 8 m/s², calcule sua velocidade, em km/h, imediatamente antes de o motorista pisar no freio.

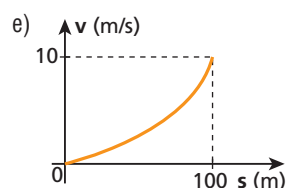
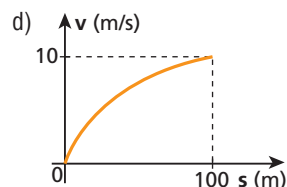
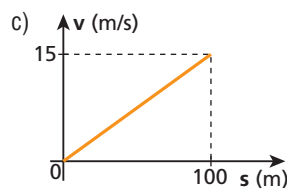
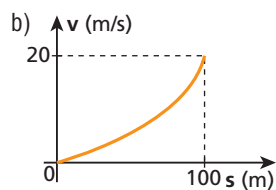
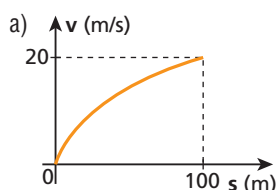
Exercícios nível 2

60. O tempo de reação de um motorista é de aproximadamente 0,7 s (intervalo de tempo decorrido entre a percepção de um sinal para parar e a efetiva aplicação dos freios). Se os freios de um automóvel podem garantir um retardamento de 5 m/s², calcule a distância percorrida por ele até parar, supondo que sua velocidade era de 72 km/h ao perceber o sinal para parar (faça o cálculo utilizando equações).

61. Com relação à questão anterior:
a) trace o gráfico da velocidade escalar (**v**) desde o instante em que o motorista percebeu o sinal para parar até o instante em que ele parou;
b) calcule a distância percorrida nesse intervalo de tempo, por meio do gráfico **v × t**.

62. (UFPI) A distância percorrida por um automóvel que viaja a 40 km/h, após a ação dos freios, até que pare, é de 8 metros, admitindo-se constante sua aceleração devido à freada. Com a velocidade do automóvel igual a 80 km/h, e supondo as mesmas condições anteriores, o espaço percorrido pelo automóvel após a freada será de:

a) 8 m.
b) 16 m.
c) 24 m.
d) 32 m.
e) 40 m.

63. (Mack-SP) Um atleta, ao disputar os "100 metros rasos", consegue cumprir o percurso em 10,0 s. Considerando que o movimento é retilíneo uniformemente acelerado, a partir do repouso e da origem dos espaços, o gráfico que melhor representa a velocidade escalar do atleta em função do espaço percorrido é:

a)
b)
c)
d)
e)
Exercícios

nível 3

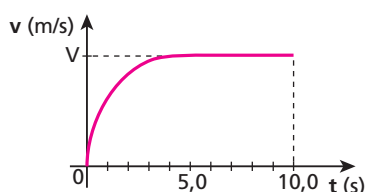
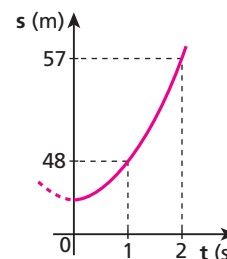
64. (FCC-SP) Um pouco de tinta foi colocada na banda de rodagem do pneu de um carro. Quando o carro se movimenta, a mancha de tinta deixa marcas no chão igualmente espaçadas e com tonalidades cada vez mais fracas.

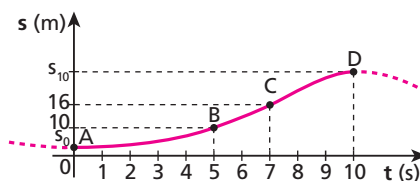
O que se pode concluir sobre a velocidade e a aceleração escalares do carro?

a) A velocidade é constante e a aceleração é nula.
b) A velocidade é crescente e a aceleração é constante.
c) A velocidade é decrescente e a aceleração é constante.
d) A velocidade e a aceleração são variáveis.
e) Nada se pode concluir, porque os dados são insuficientes.

65. Uma locomotiva parte de uma estação **A** e para em uma estação **B**, distante 1 200 m de **A**. O máximo módulo da aceleração que ela consegue manter é de 3 m/s², tanto na fase de aceleração como na de retardamento. Sabendo que é proibido trafegar nessa região com velocidade superior a 30 m/s, calcule o mínimo intervalo de tempo possível para ir de **A** a **B**, sem problemas com a fiscalização.
Sugestão: Resolva essa questão utilizando o gráfico da velocidade escalar em função do tempo.

66. Releia a questão anterior. Agora, resolva-a supondo que não haja limitação para a velocidade.

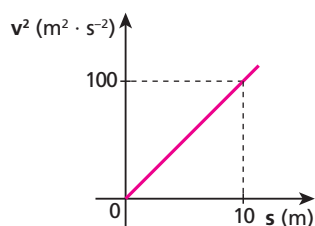
67. Numa corrida de 100 m rasos, a velocidade escalar de um atleta variou com o tempo, aproximadamente, conforme o gráfico. Sabendo que esse atleta concluiu a prova em 10,0 s, faça uma estimativa (cálculo aproximado) de sua velocidade máxima **V**.

68. Os espaços de um móvel variam com o tempo, conforme o gráfico ao lado, que é um arco de parábola cujo vértice está localizado no eixo **s**:

Determine:
a) o espaço em $t_0 = 0$;
b) a aceleração escalar;
c) a velocidade escalar em t = 3 s.

69. O espaço (**s**) de uma partícula variou com o tempo (**t**) conforme indica o gráfico a seguir:

Nesse gráfico, os trechos AB e CD são arcos de parábola com vértices nos pontos **A** e **D**, ao passo que o trecho BC é um segmento de reta. Determine:

a) o espaço inicial (s_0) da partícula;
b) a aceleração escalar no trecho CD;
c) o espaço (s_{10}) da partícula em t = 10 s.

70. (Olimpíada Brasileira de Física) Dois carros movem-se no mesmo sentido em uma estrada retilínea com velocidades v_A = 108 km/h e v_B = 72 km/h respectivamente. Quando a frente do carro **A** está a uma distância de 10 m atrás da traseira do carro **B**, o motorista do carro **A** freia, causando uma desaceleração a = 5 m/s².

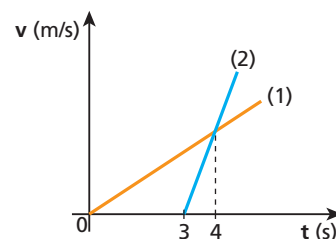
a) Calcule a distância percorrida pelo carro **A** até que ele colida com o carro **B**.
b) Repita o cálculo do item anterior, mas agora supondo que a velocidade inicial do carro **A** seja de 90 km/h. Interprete seu resultado.

71. O gráfico a seguir mostra como varia o quadrado da velocidade escalar de uma partícula em função de sua abscissa **s**.

Determine a aceleração escalar da partícula.

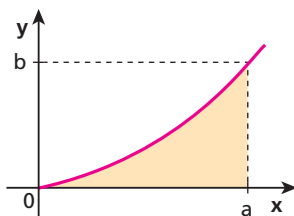
72. (Vunesp-SP) Uma norma de segurança sugerida pela concessionária de uma autoestrada recomenda que os motoristas que nela trafegam mantenham seus veículos separados por uma "distância" de 2,0 segundos.

a) Qual é essa distância, expressa adequadamente em metros, para veículos que percorrem a estrada com velocidade constante de 90 km/h?

b) Suponha que, nessas condições, um motorista freie bruscamente seu veículo até parar, com aceleração constante de módulo 5,0 m/s^2, e o motorista de trás só reaja, freando seu veículo, depois de 0,50 s. Qual deve ser o mínimo módulo da aceleração do veículo de trás para não colidir com o da frente?

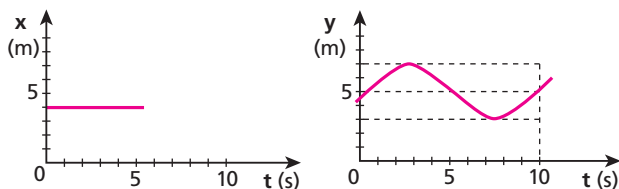
73. (FEI-SP) Na figura, estão representados os diagramas de velocidade de dois móveis em função do tempo. Esses móveis partem de um mesmo ponto, a partir do repouso, e percorrem a mesma trajetória retilínea. Em que instante (**s**) eles se encontram?

Para raciocinar um pouco mais

74. (FEI-SP) Um móvel parte de certo ponto com um movimento que obedece à lei horária $S = 4t^2$, válida no SI. **S** é a abscissa do móvel e **t** é o tempo. Um segundo depois, parte outro móvel do mesmo ponto do primeiro, com movimento uniforme e seguindo a mesma trajetória. Qual a menor velocidade que deverá ter esse segundo móvel a fim de encontrar o primeiro?

75. A figura a seguir ilustra a representação gráfica de uma função do tipo $y = k \cdot x^n$, em que **k** é uma constante e **n** é um inteiro positivo.

A área da região destacada é dada por:

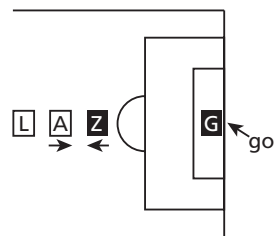
$$\text{Área} = \frac{a \cdot b}{n + 1}$$

A velocidade escalar de uma partícula varia com o tempo, segundo a função $v = 3t^4$ (SI). Calcule a distância percorrida pela partícula entre $t_0 = 0$ e $t = 2$ s.

76. Uma partícula move-se num plano determinado por dois eixos cartesianos ortogonais 0x e 0y e suas coordenadas de posição **x** e **y** variam com o tempo **t**, conforme os gráficos a seguir.

a) Qual o comprimento da trajetória descrita pela partícula no intervalo de tempo de 0 a 10 s?

b) Qual a distância entre as posições da partícula nos instantes $t_0 = 0$ e $t = 10$ s?

c) Quantas vezes a partícula parou de 0 a 10 s?

77. (Unicamp-SP) A Copa do Mundo é o segundo maior evento desportivo do mundo, ficando atrás apenas dos Jogos Olímpicos. Uma das regras do futebol que gera polêmica com certa frequência é a do impedimento. Para que o atacante **A** não esteja em impedimento, deve haver ao menos dois jogadores adversários a sua frente, **G** e **Z**, no exato instante em que o jogador **L** lança a bola para **A** (ver figura). Considere que somente os jogadores **G** e **Z** estejam à frente de **A** e que somente **A** e **Z** se deslocam nas situações descritas a seguir.

a) Suponha que a distância entre **A** e **Z** seja de 12 m. Se **A** parte do repouso em direção ao gol com aceleração de 3,0 m/s^2 e **Z** também parte do repouso com a mesma aceleração no sentido oposto, quanto tempo o jogador **L** tem para lançar a bola depois da partida de **A** antes que **A** encontre **Z**?

b) O árbitro demora 0,1 s entre o momento em que vê o lançamento de **L** e o momento em que determina as posições dos jogadores **A** e **Z**. Considere agora que **A** e **Z** movem-se a velocidades constantes de 6,0 m/s, como indica a figura. Qual a distância mínima entre **A** e **Z** no momento do lançamento para que o árbitro decida de forma inequívoca que **A** não está impedido?

78. Dado que a aceleração escalar de um corpo é **nula** em determinado instante, pode-se afirmar que ele:

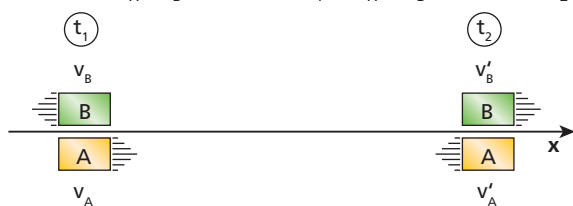
a) está no ponto mais alto atingido após ser lançado verticalmente para cima;

b) está em movimento uniforme;

c) está num movimento uniformemente variado qualquer;

d) está em movimento retilíneo;

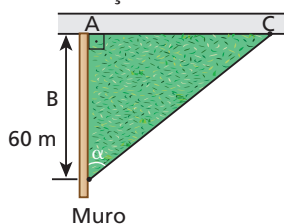
e) pode estar em movimento variado não uniformemente.

79. Dois corpos **A** e **B**, ambos em movimento uniformemente variado ao longo de um eixo **x**, se cruzam duas vezes: no instante $\mathbf{t_1}$ e no instante $\mathbf{t_2}$. Suas velocidades escalares são respectivamente iguais a v_A e v_B, no instante t_1, e v'_A e v'_B, no instante t_2:

Determine a razão $\dfrac{v_A - v_B}{v'_A - v'_B}$.

80. Um corpo, inicialmente em repouso, entra em movimento com aceleração escalar constante α, no instante $t_0 = 0$.

a) Mostre que as diferenças entre as distâncias percorridas em intervalos de tempo consecutivos e iguais a 1 unidade de tempo são sempre as mesmas e têm o mesmo valor numérico de α.

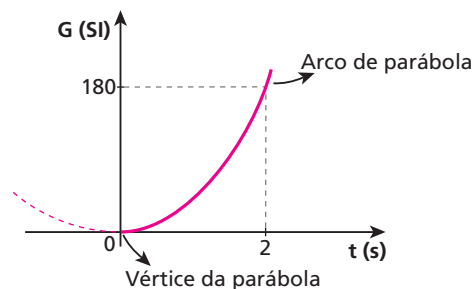
b) Determine a distância percorrida durante a enésima unidade de tempo. Verifique que ela é um múltiplo ímpar da distância percorrida na primeira unidade de tempo.

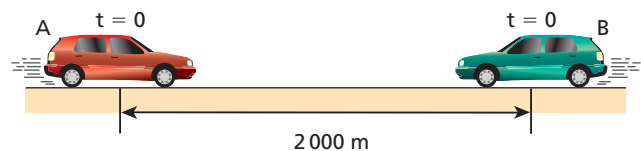
81. O terreno triangular e horizontal representado na figura foi cercado para uma futura criação de coelhos.

Em certo instante, João passa pelo ponto **A**, correndo rente ao lado AC com velocidade escalar constante de 6 m/s.
Nesse mesmo instante, seu cão, que estava parado em **B**, começa a correr com aceleração escalar constante e igual a 0,8 m/s², rente ao lado BC, para se encontrar com João.
Sabendo que João e seu cão chegaram simultaneamente ao ponto **C**, determine o ângulo α indicado na figura.

82. Em um trem com vários vagões de 8,0 m de comprimento cada um, puxados por uma locomotiva, vamos chamar de primeiro vagão aquele que está diretamente acoplado à locomotiva, de segundo vagão o que está acoplado ao primeiro, e assim por diante.
João correu para tomar esse trem, mas, quando chegou à plataforma, ele já estava partindo e não pôde adentrá-lo: perdeu o trem.
Estando João parado na plataforma, o segundo vagão passou completamente por ele durante 2,37 s, e o terceiro o fez durante 1,16 s.
Supondo que a aceleração escalar do trem seja constante:

a) Escreva a função horária ($v \times t$) da velocidade escalar do trem em relação a uma origem de tempo ($t = 0$) adotada no instante em que o segundo vagão começou a passar por João. Deixe os coeficientes com dois algarismos significativos.

b) Dado que o trem ficou parado na estação durante 10 s, em que intervalo de tempo, em relação a $t = 0$ (já adotado), João deveria ter chegado à estação para o trem ainda estar parado nela?

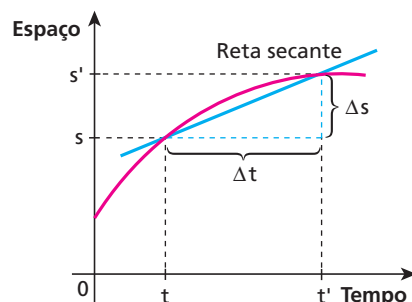
83. Em qualquer corpo em movimento curvilíneo está presente determinada grandeza cuja intensidade vamos simbolizar por **G**.
Para um corpo **C**, em movimento circular, **G** varia em função do tempo **t**, conforme o gráfico:

Calcule, em m/s, o módulo da velocidade de **P** no instante **t** igual a 4 s.
Dado: $G = 5\,v^2$ (SI), em que **v** é o módulo de velocidade instantânea de **P**.

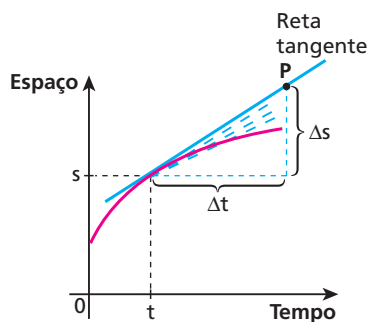
84. Considere dois pontos de um trecho retilíneo de uma estrada, distantes 2 000 m um do outro.
No instante adotado como t = 0, dois veículos **A** e **B** passam por esses pontos, movendo-se em sentidos opostos como está representado na figura.

O movimento de **A** é uniforme e o módulo de sua velocidade é v_A.
O movimento de **B** é uniformemente variado, com aceleração de módulo igual a 0,4 m/s². Em t = 0, sua velocidade tem módulo igual a 32 m/s e seu movimento é retardado.
Dado que, durante os movimentos, um dos veículos ultrapassou o outro duas vezes, estando ambos movendo-se no mesmo sentido, determine o intervalo dos possíveis valores de v_A. Adote para os dois veículos o modelo de partícula.

Apêndice

Determinação da velocidade escalar instantânea no gráfico s × t

No Apêndice do Tópico 1, estudamos a velocidade escalar instantânea a partir da expressão da função horária do espaço, usando o conceito de limite.

Agora, veremos como esse conceito pode ser usado na determinação da velocidade escalar instantânea quando temos um **gráfico** do espaço em função do tempo. Para tanto, considere o gráfico espaço × tempo de um móvel, como mostra a figura ao lado.

Sejam **s** e **s'** os espaços nos instantes **t** e **t'** respectivamente. A velocidade escalar **média** entre **t** e **t'** é dada por $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, que é o "coeficiente angular" da reta secante traçada na figura anterior.

Para determinar a velocidade escalar instantânea **v**, no instante **t**, fazemos **t'** "aproximar-se de **t**" cada vez mais. Com isso, a reta secante vai se deslocando e, no limite, quando **t'** tende a **t**, temos uma reta tangente à curva, como mostra a figura ao lado.

O ponto **P** indicado pode ser escolhido arbitrariamente sobre a reta tangente.

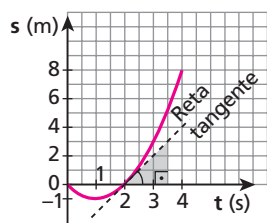
O "coeficiente angular" dessa reta fornece a velocidade escalar **v** no instante **t**. Esse coeficiente é a derivada do espaço em relação ao tempo, calculada no instante **t**:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

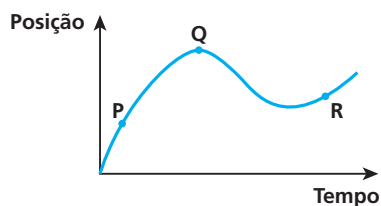
(Velocidade escalar instantânea no instante **t**)

De modo análogo, determinamos a aceleração escalar instantânea no gráfico velocidade × tempo quando o movimento não é uniforme nem uniformemente variado.

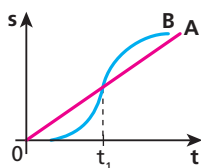
Exercícios

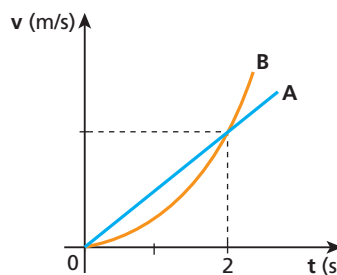
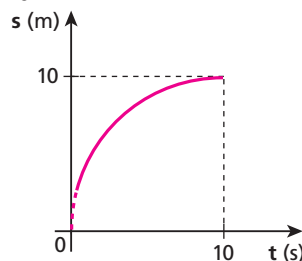
85. Na figura está representada graficamente a função horária $s = t^2 - 2t$ (SI).

Calcule a velocidade escalar em t = 2 s:

a) por meio da função horária da velocidade;
b) por meio do gráfico dado.

86. (UFMG) Um carro está andando ao longo de uma estrada reta e plana. Sua posição em função do tempo está representada neste gráfico:

Sejam v_P, v_Q e v_R os módulos das velocidades do carro, respectivamente, nos pontos **P**, **Q** e **R** indicados nesse gráfico.
Com base nessas informações, é **correto** afirmar que:

a) $v_Q < v_P < v_R$.
b) $v_P < v_R < v_Q$.
c) $v_Q < v_R < v_P$.
d) $v_P < v_Q < v_R$.

87. Dois veículos **A** e **B** percorrem uma mesma rodovia. Suas posições variam com o tempo, como mostra o diagrama:
Indique a alternativa **incorreta**:

a) A velocidade escalar de **A** é constante.
b) No instante t_1, o movimento de **B** deixa de ser acelerado para tornar-se retardado.
c) A velocidade escalar de **B** igualou-se à de **A** em duas ocasiões.
d) A velocidade escalar de **B** nunca foi negativa.
e) **A** e **B** nunca tiveram velocidades escalares iguais.

88. (ITA-SP) Duas partículas **A** e **B** deslocam-se ao longo do eixo Ox com velocidades dadas pelo gráfico a seguir, sendo que no instante $t_0 = 0$ ambas estão na origem do sistema de coordenadas. No instante t = 2 s, **A** e **B** estão, respectivamente, nos pontos de abscissas x_1 e x_2, com acelerações a_1 e a_2. Compare x_1 com x_2 e a_1 com a_2.

89. O gráfico espaço × tempo está contido em um quarto de circunferência. Determine o instante **t** em que a velocidade **v** do móvel em questão é igual a 1 m/s.

Tópico 4

Movimentos circulares

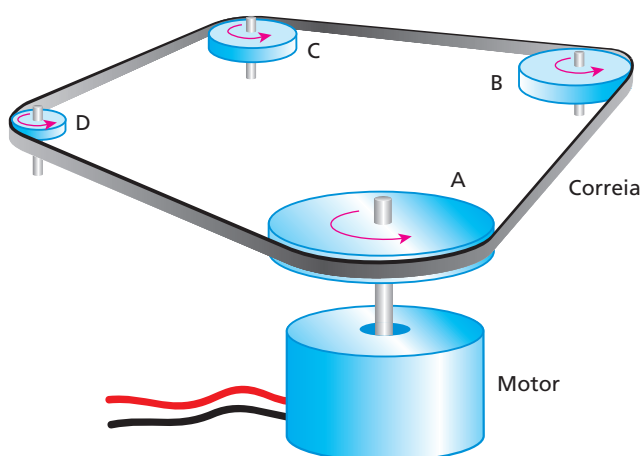
Bloco 1

1. Introdução

Estudaremos aqui os movimentos circulares, isto é, aqueles em que as trajetórias dos pontos são circunferências. Esses movimentos merecem uma atenção especial por terem grande importância prática, principalmente quando são uniformes.

Muitos dos satélites artificiais e, com boa aproximação, até mesmo a Lua, realizam movimentos circulares e uniformes em torno da Terra. O mesmo acontece com os pontos da Terra que se deslocam ao redor do seu eixo de rotação.

Partículas eletrizadas, como elétrons, prótons e íons, quando são lançadas perpendicularmente a um campo magnético uniforme e constante e se submetem apenas a esse campo, realizam um movimento circular e uniforme. Isso tem fundamental importância para equipamentos destinados, por exemplo, ao bombardeio de núcleos atômicos (aceleradores de partículas) e para equipamentos que medem massas atômicas (espectrômetros de massa), como veremos no Volume 3 desta coleção.

Observe a figura abaixo:

A figura representa uma polia **A** em movimento de rotação, acionada por um motor. As polias **B**, **C** e **D** estão acopladas à polia **A** por meio de uma correia que não desliza sobre elas e adquirem rotação no mesmo sentido da rotação de **A**. Conhecendo-se o número de rotações que o eixo do motor realiza por minuto e os raios das polias, podemos determinar o número de rotações por minuto que cada uma delas realiza. Além disso, trocando uma das polias por outra de raio conveniente, podemos obter o número de rotações por minuto que quisermos.

Javier Larrea/Grupo Keystone

Essas rodas dentadas estão acopladas por contato direto. Se uma delas for colocada em movimento de rotação, as outras também vão adquirir esse tipo de movimento. Nessa situação, porém, duas rodas quaisquer, em contato, realizarão rotações em sentidos contrários. Os números de rotações por minuto continuam relacionados aos raios das rodas.

2. O enfoque angular

O estudo descritivo dos movimentos foi feito, até aqui, por meio das grandezas escalares espaço (**s**), velocidade escalar média (v_m) e instantânea (**v**) e aceleração escalar média (α_m) e instantânea (α). Podemos chamar todas essas grandezas de **lineares**, pois suas definições provêm, direta ou indiretamente, de medidas de comprimento. Assim, podemos dizer espaço linear, velocidade escalar linear (média ou instantânea) e aceleração escalar linear (média ou instantânea).

Quando, porém, estudamos movimentos circulares, torna-se útil acrescentar as definições das grandezas escalares **angulares**, isto é, grandezas escalares definidas, direta ou indiretamente, a partir de medidas de ângulos. É o que faremos a seguir, mas, para tanto, será necessário entender medidas de ângulos.

Interessa-nos expressar a medida de um ângulo em graus e, principalmente, em radianos.

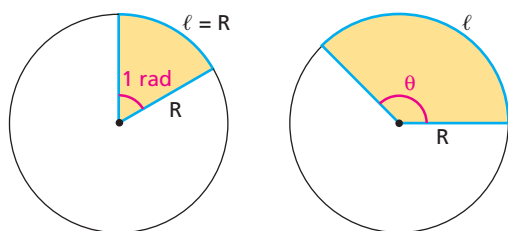
Um **grau** (°) é o ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ do ângulo de uma volta completa de uma circunferência.

Um **radiano** (**rad**) é a medida do ângulo central que determina na circunferência um arco cujo comprimento (**ℓ**) é igual ao raio (**R**). Um radiano corresponde a aproximadamente 57°.

Decorre, da definição do radiano, que um ângulo central qualquer (θ: lê-se teta) fica determinado, em radianos, pelo quociente do comprimento do arco que ele "enxerga" (**ℓ**) pelo raio da circunferência (**R**).

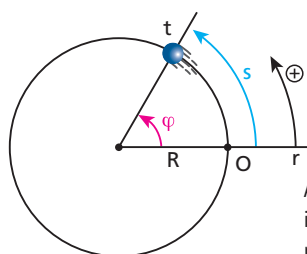
Assim, por exemplo, se o raio **R** da circunferência for igual a 10 cm e o comprimento **ℓ** for igual a 30 cm, teremos:

$$\theta = \frac{\ell}{R} = \frac{30\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Rightarrow \theta = 3\text{ rad}$$

Observe que a unidade radiano não tem nenhuma dimensão física, uma vez que corresponde ao quociente de um comprimento por outro comprimento. Poderíamos até escrever $\theta = 3$ em vez de $\theta = 3$ rad. No entanto, esse procedimento não é conveniente, pois é mais importante que fique evidenciado o critério adotado para determinar o ângulo.

$$\theta = \frac{\ell}{R} \quad (\theta \text{ em rad})$$

3. Espaço angular ou fase

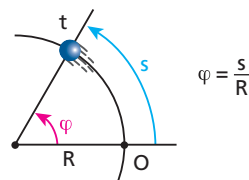
Considere uma partícula em movimento numa circunferência de raio **R** ocupando a posição indicada na figura no instante **t**. Seja **O** um ponto de referência adotado sobre a circunferência.

A posição dessa partícula no instante **t** pode ser dada, como sabemos, pelo espaço linear **s**. No entanto, essa posição também fica determinada pelo ângulo φ (lê-se fi), de vértice no centro da circunferência, marcado a partir da reta **r** até o raio que passa pela partícula. Vamos medir esse ângulo no sentido do movimento da partícula e convencionar que, desse modo, sua medida seja dada por um número positivo.

A seta à direita (com o sinal ⊕) indica o sentido que vamos usar para determinar o ângulo φ.

Esse ângulo φ é o **espaço angular** ou **fase** da partícula no instante **t**.

> **Espaço angular** ou **fase** (φ) de uma partícula em certo instante é o ângulo marcado no sentido do movimento, a partir do raio de referência até o raio que passa pela partícula.

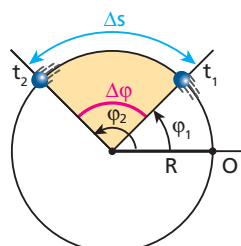
Relação entre o espaço angular e o espaço linear

Lembrando da determinação de um ângulo em radianos, temos:

Assim:

> O espaço angular (φ) é igual ao espaço linear (**s**) dividido pelo raio (**R**) da circunferência:
>
> $$\boxed{\varphi = \frac{s}{R}} \quad (\varphi \text{ em radianos})$$

4. Velocidade escalar angular

Velocidade escalar média angular

Considere agora as posições que uma partícula móvel ocupa numa circunferência nos instantes t_1 e t_2.

Entre os instantes t_1 e t_2, a partícula sofre um deslocamento escalar que pode ser dado linearmente por Δs ou angularmente por $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

O quociente desse deslocamento angular ($\Delta\varphi$) pelo intervalo de tempo (Δt) em que ele ocorre é a **velocidade escalar média angular** (ω_m: lê-se ômega m) nesse intervalo:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}$$

Com relação à **unidade de velocidade angular**, se os ângulos forem medidos em radianos (**rad**) e o tempo em segundos (**s**), a velocidade angular será dada em **radianos por segundo** (**rad/s**).

Relação entre as velocidades escalares médias angular e linear

Vamos, agora, relacionar a velocidade escalar média angular (ω_m) com a velocidade escalar média linear (v_m).

Temos que: $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \text{(I)}$$

Da figura anterior, $\Delta\varphi$ é dado, em radianos, por:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \Delta s = R\,\Delta\varphi \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$v_m = \frac{R\,\Delta\varphi}{\Delta t} = R\,\omega_m \Rightarrow \omega_m = \frac{v_m}{R}$$

Assim:

A **velocidade escalar média angular** (ω_m) é igual à velocidade escalar média linear (v_m) dividida pelo raio (**R**) da circunferência:

$$\omega_m = \frac{v_m}{R}$$

Velocidade escalar instantânea angular

A relação que acabamos de obter para as velocidades médias também vale para as instantâneas.

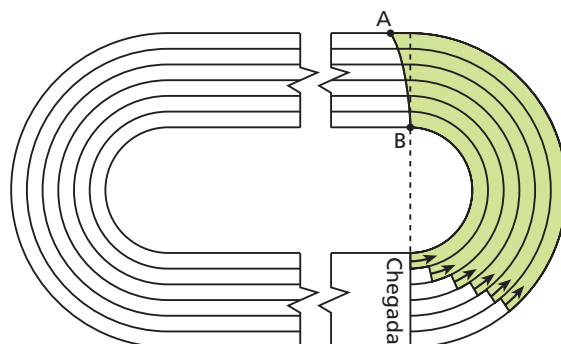
Assim, temos:

A **velocidade escalar instantânea angular** (ω) é igual à velocidade escalar instantânea linear (**v**) dividida pelo raio (**R**) da circunferência:

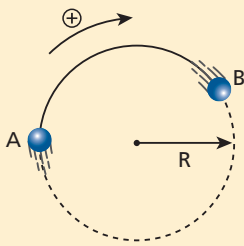
$$\omega = \frac{v}{R}$$

No Apêndice, você encontra a expressão matemática que define a velocidade escalar instantânea angular.

Mark Scott/Taxi/Getty Images

No início de uma corrida de 800 m, por exemplo, os atletas não saem um ao lado do outro, para compensar o fato de as raias internas serem mais curtas que as externas. Assim, eles saem de posições não emparelhadas e só passam a ter liberdade de mudar de raia no final da primeira curva (arco AB), quando os comprimentos dos trechos de raias (destacados na figura abaixo) se igualam.

Exercícios — nível 1

1. Sabendo que o comprimento (perímetro) de uma circunferência de raio **R** é igual a $2\pi R$, converta em radianos os seguintes ângulos:
a) 360°
b) 180°
c) 90°
d) 60°
e) 30°

2. E.R. Uma partícula percorre, em 10 s, o arco de circunferência AB representado na figura, de **A** para **B**:

Sabendo que $\widehat{AB}$ mede 60 cm e R = 30 cm, determine, no percurso de **A** até **B**:
a) a velocidade escalar média linear;
b) a velocidade escalar média angular.

Resolução:
a) A velocidade escalar média linear é dada por:

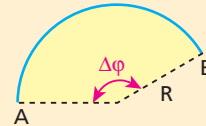
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sendo Δs = 60 cm e Δt = 10 s, vem:

$$v_m = \frac{60}{10} \Rightarrow \boxed{v_m = 6 \text{ cm/s}}$$

b) A velocidade escalar média angular é dada por:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{(I)}$$

O deslocamento angular $\Delta\varphi$ é calculado, em radianos, pelo quociente do comprimento do arco AB pelo raio **R**:

$$\Delta\varphi = \frac{60}{30} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \text{ rad}$$

Em (I):

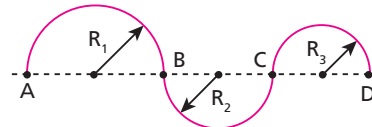
$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2}{10} \Rightarrow \boxed{\omega_m = 0{,}2 \text{ rad/s}}$$

Nota:
- De um modo mais prático, poderíamos resolver o item **b** da seguinte maneira:

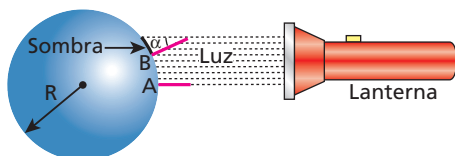
$$\omega_m = \frac{v_m}{R} = \frac{6}{30} \Rightarrow \boxed{\omega_m = 0{,}2 \text{ rad/s}}$$

3. Um automóvel move-se ao longo de uma pista circular de raio igual a 200 metros. Em certo instante, sua velocidade angular vale 0,1 rad/s. Quanto indica seu velocímetro, em km/h, nesse instante?

4. Um esportista corre numa pista circular de raio igual a 200 m com velocidade escalar de 18 km/h praticamente constante. Calcule, em radianos, o ângulo central que "enxerga" o arco percorrido por ele em 72 s.

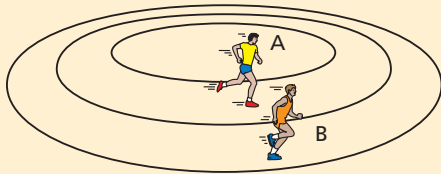
5. Um móvel vai de **A** a **D** com velocidade escalar linear constante, movendo-se ao longo da curva esquematizada na figura:

Sendo $R_1 > R_2 > R_3$, compare os valores das velocidades angulares nos trechos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CD}$.

Exercícios — nível 2

6. Imagine uma esfera de raio **R**, com duas varetas fincadas nela nos pontos **A** e **B**, perpendicularmente à sua superfície e sobre uma mesma circunferência máxima (meridiano). Uma lanterna, que emite um feixe de raios de luz paralelos entre si, ilumina a esfera, como mostra a figura:

Na esfera, não se observa sombra da vareta fincada em **A**, mas se observa sombra da vareta fincada em **B**. Não é difícil medir o ângulo α indicado. Suponha que alguém mediu esse ângulo e encontrou α = 20°. Sabendo que o arco AB mede 10 cm e que o comprimento de uma circunferência de raio **R** é igual a $2\pi R$, calcule o raio **R** da esfera. (Use π = 3.)

Nota:
- Foi de um modo análogo que o grego Eratóstenes (século III a.C.), pela primeira vez, determinou o raio da Terra.

7. (Uerj) A distância média entre o Sol e a Terra é de cerca de 150 milhões de quilômetros. Assim, a velocidade média de translação da Terra em relação ao Sol é, aproximadamente, de:
a) 3 km/s.
b) 30 km/s.
c) 300 km/s.
d) 3 000 km/s.

8. E.R. Dois corredores treinam numa pista circular. O corredor **A** corre pela pista interna, enquanto o **B** corre pela externa.

Sabendo que ambos os corredores completam uma volta no mesmo intervalo de tempo, compare:

a) suas velocidades escalares médias angulares;

b) suas velocidades escalares médias lineares.

Resolução:

a) Os dois corredores completam uma volta num mesmo intervalo de tempo Δt. Ao fazer isso, ambos realizam um mesmo deslocamento angular $\Delta\varphi$, igual a 2π rad. Lembrando que a velocidade escalar média angular (ω_m) é dada por:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

concluímos que:

$$\boxed{\omega_{m_A} = \omega_{m_B}}$$

Isso significa que **A** e **B** percorreram um mesmo ângulo num mesmo intervalo de tempo.

b) No mesmo intervalo de tempo Δt, decorrido durante uma volta, o deslocamento linear Δs é maior para o corredor **B**, uma vez que a circunferência externa tem perímetro maior que a interna. Assim, no mesmo Δt, temos:

$$\Delta s_B > \Delta s_A$$

Lembrando que a velocidade escalar média linear (v_m) é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

concluímos que:

$$\boxed{v_{m_B} > v_{m_A}}$$

Isso significa que, no mesmo intervalo de tempo Δt, a distância percorrida por **B** foi maior que a percorrida por **A**, apesar de os ângulos varridos terem sido iguais.

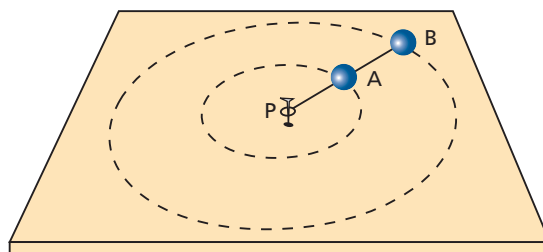
Nota:

• O item **b** do exercício poderia ter sido resolvido lembrando que:

$$v_m = \omega_m R$$

em que **R** é o raio da circunferência.

Como o valor de ω_m é igual para **A** e para **B**, concluímos que o valor de v_m é maior para **B**, uma vez que **B** descreve a circunferência de raio maior.

9. Duas pequenas esferas **A** e **B**, apoiadas em uma mesa, são interligadas por um fio de 50 cm de comprimento. Por meio de outro fio também de 50 cm, liga-se a esfera **A** a um prego **P**, fincado na mesa. A figura ilustra essa montagem:

As esferas são postas a girar em torno do prego, de modo que **A**, **B** e **P** permanecem sempre alinhados. Em certo instante, **B** move-se a 10 m/s. Determine nesse instante:

a) a velocidade escalar angular de **A** e de **B**;

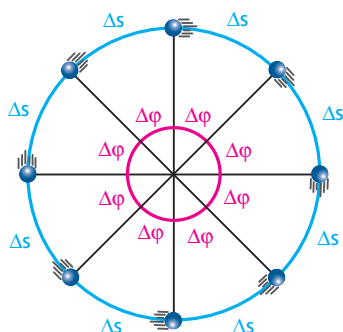
b) a velocidade escalar linear de **A**.

Bloco 2

5. Movimento circular e uniforme

Definição

Uma partícula está em movimento circular e uniforme (MCU) quando descreve uma trajetória circular, percorrendo arcos de comprimentos (Δs) iguais em iguais intervalos de tempo (Δt), quaisquer que sejam esses intervalos. Evidentemente, a partícula em MCU também varre ângulos ($\Delta\varphi$) iguais em iguais intervalos de tempo.

O desenho ao lado representa uma partícula em MCU. Nessa figura, o intervalo de tempo entre duas posições consecutivas é sempre o mesmo.

Em outras palavras, podemos escrever:

> **Movimento circular e uniforme (MCU)** é todo movimento de trajetória circular em que a velocidade escalar, linear ou angular, é constante e diferente de zero.
>
> $$v = \text{constante} \neq 0$$
> $$\omega = \text{constante} \neq 0$$

Um exemplo importante de MCU são os movimentos de vários satélites artificiais que giram em torno da Terra:

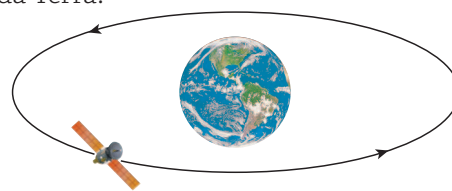



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

Um satélite em órbita circular em torno da Terra realiza um movimento que, além de circular, é uniforme. Em telecomunicações, destacam-se os satélites denominados **geoestacionários**. Esses satélites descrevem uma circunferência com cerca de 42 000 km de raio, no mesmo plano do equador terrestre, e se mantêm permanentemente sobre um mesmo local da Terra. Assim, completam uma volta a cada 24 horas.

Período e frequência

O MCU é um movimento periódico, isto é, todas as suas características se repetem em iguais intervalos de tempo. Cada intervalo corresponde ao tempo que a partícula leva para completar uma volta. Esse tempo denomina-se **período** do MCU e é simbolizado por **T**.

Período (T) de um MCU é o intervalo de tempo decorrido durante uma volta de uma dada partícula.

Outra grandeza referente ao MCU é a **frequência**, simbolizada por **f**.

Suponha, por exemplo, que uma partícula complete uma volta em 0,1 s. Esse valor é o período (**T**) do movimento. Quantas voltas ela completa na unidade de tempo, no caso, 1 s? Efetuando o cálculo, percebemos que ela completa dez voltas por segundo. Dizemos, então, que essa é a sua frequência (**f**):

$$f = 10 \text{ voltas/s}$$

Assim, definimos:

A **frequência (f)** do movimento circular e uniforme executado por uma partícula é o número de voltas que essa partícula efetua por unidade de tempo. Assim, se a partícula efetua **n** voltas durante um intervalo de tempo Δt, sua frequência é dada por:

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

Veremos agora as **unidades de período** e **frequência**.

O período, evidentemente, pode ser medido em qualquer unidade de tempo, mas sua unidade no SI é o segundo (**s**).

A frequência pode ser medida em voltas por segundo, rotações por segundo (rps), rotações por minuto (rpm) e ciclos por segundo, dentre outras.

Sempre que a unidade de frequência inclui o segundo, ela se denomina **hertz** (**Hz**), que é a unidade dessa grandeza no SI. Assim:

$$1 \text{ volta/s} = 1 \text{ rps} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Nota:

- Na prática, é muito comum medir frequência em **rotações por minuto** (**rpm**).
  Para fazer conversões entre as unidades **rpm** e **Hz**, podemos usar a seguinte relação:

$$60 \text{ rpm} = \frac{60 \text{ rotações}}{\text{min}} = \frac{60 \text{ rotações}}{60 \text{ s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 \text{ rpm} = 1 \frac{\text{rotação}}{\text{s}} \Rightarrow 60 \text{ rpm} = 1 \text{ Hz}$$

Thinkstock/Getty Images

Enquanto a roda-gigante gira, cada gôndola realiza um movimento circular praticamente uniforme. Nessa situação, o intervalo de tempo em que uma gôndola completa uma volta é o período do movimento, e o número de voltas que ela completa por unidade de tempo é a frequência.

Relação entre período e frequência

Para relacionar a frequência com o período, lembre-se de que: $f = \frac{n}{\Delta t}$.

Se, nessa expressão, fizermos Δt igual a um período (**T**), o número de voltas (**n**) será igual a 1. Assim, teremos:

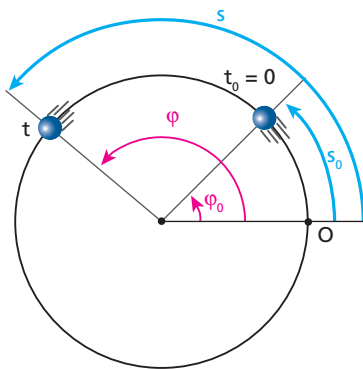
$$f = \frac{n}{\Delta t} = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$$

Concluímos, então, que a frequência é igual ao inverso do período. Note que isso já era esperado, pois, quanto mais tempo demora uma volta (maior período), menos voltas são completadas numa unidade de tempo (menor frequência).

Thinkstock/Getty Images

A Lua completa uma volta ao redor da Terra em aproximadamente 27 dias (período de translação). Nesse mesmo intervalo de tempo, ela também completa uma rotação em torno de seu eixo (período de rotação). Em virtude dessa igualdade dos períodos de translação e rotação da Lua, ela nos mostra sempre a mesma face. A outra face (face oculta) só ficou conhecida com o advento da era espacial.

Função horária do espaço angular

Considere uma partícula em movimento circular uniforme (MCU). Seja φ_0 seu espaço angular inicial ou fase inicial, isto é, o espaço angular ou fase no instante $t_0 = 0$. Seja φ seu espaço angular ou fase num instante **t** qualquer.

No MCU, a velocidade escalar média angular e a instantânea têm sempre o mesmo valor. Assim, podemos escrever, no intervalo de t_0 a **t**:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}$$

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega\, t}$$

A expressão que acabamos de obter é a **função horária do espaço angular**. Observe que ela é muito parecida com a função horária do espaço linear, que, evidentemente, continua válida e é dada por: $s = s_0 + v\,t$.

Nota:

- A função horária do espaço angular pode ser obtida a partir da função horária do espaço linear, dividindo-se todos os termos desta última pelo raio (**R**) da circunferência. De fato, sendo: $s = s_0 + v\,t$ e dividindo todos os termos por **R**: $\frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R}t$, obtemos: $\varphi = \varphi_0 + \omega\, t$.

Velocidade angular no MCU

Como já vimos, a velocidade escalar angular, tanto média como instantânea, no MCU, é dada por:

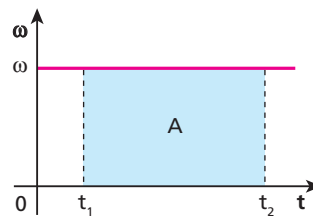
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Se fizermos Δt igual a um período (**T**), nesse intervalo de tempo a partícula completará uma volta e $\Delta\varphi$ será igual a 2π rad. Assim, teremos:

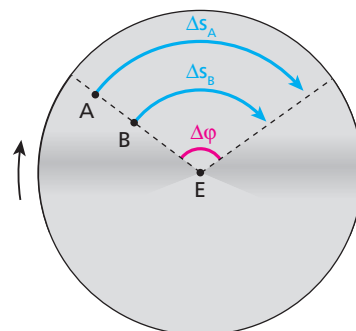
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\, f}$$

Nota:

- No gráfico da velocidade escalar angular (ω) em função do tempo, a "área" **A** entre o gráfico e o eixo dos tempos, calculada do instante t_1 ao instante t_2, expressa o deslocamento angular $\Delta\varphi$ entre esses instantes:

$$A = \omega\,\Delta t \Rightarrow \boxed{A = \Delta\varphi}$$

Observe que essa propriedade é análoga àquela já usada nos Tópicos 2 e 3: no gráfico da velocidade escalar linear (**v**) em função do tempo, a "área" fornece o deslocamento linear Δs.

Disco ou polia em rotação uniforme

Considere um disco ou uma polia em rotação uniforme em torno do eixo **E**:

Perceba que **A** e **B** são dois pontos quaisquer situados fora do eixo de rotação. Enquanto **A** percorre Δs_A, **B** percorre Δs_B, sendo $\Delta s_A > \Delta s_B$ e, portanto, $v_A > v_B$. O deslocamento angular $\Delta\varphi$, entretanto, é igual para os dois pontos. Então:

$$\omega_A = \omega_B$$

Consequentemente:

$$T_A = T_B \quad \text{e} \quad f_A = f_B$$

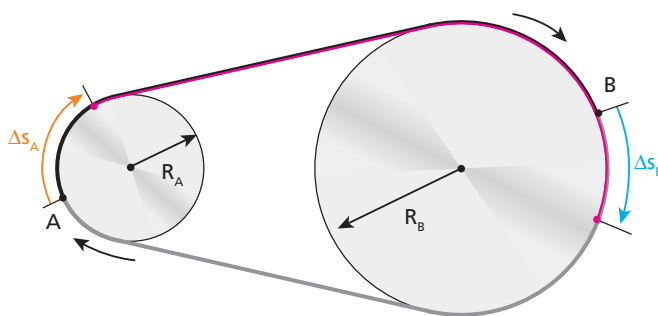
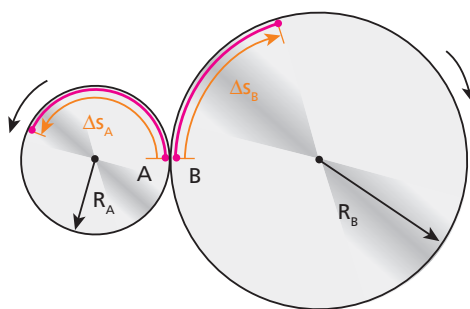
Nota:
- A velocidade angular **da polia** é a velocidade angular de qualquer um de seus pontos.

Acoplamento de polias e rodas dentadas

Polias podem ser acopladas por meio de correias ou por contato direto, de modo que uma polia rotando pode fazer a outra rotar também. Da mesma forma, rodas dentadas podem ser acopladas por contato direto ou por meio de correntes.

A figura ao lado representa duas polias de raios R_A e R_B que rotam no **mesmo sentido**, acopladas por uma correia que não desliza sobre elas.

Aqui, os pontos **A** e **B** estão nas periferias das polias. Enquanto **A** se desloca Δs_A, **B** se desloca Δs_B. Como $\Delta s_A = \Delta s_B$, temos que:

$$v_A = v_B$$

Observe na figura a seguir que, ao contrário da situação descrita anteriormente, duas polias (ou rodas dentadas) de raios R_A e R_B rotam em **sentidos contrários**, acopladas por contato direto.

Nesse caso, os pontos **A** e **B** também estão nas periferias das polias. Enquanto **A** se desloca Δs_A, **B** se desloca Δs_B. Não havendo escorregamento na região de contato, cada ponto da periferia de uma polia faz contato com um **único** ponto da periferia da outra polia. Assim, $\Delta s_A = \Delta s_B$; portanto:

$$v_A = v_B$$

Perceba que, nas duas situações, temos:

$$\omega_A R_A = \omega_B R_B \Rightarrow 2\pi f_A R_A = 2\pi f_B R_B \quad \Rightarrow \quad f_A R_A = f_B R_B$$

Leitura

Indústria fonográfica

Em plena época do *compact disc* (CD), muitas vezes esquecemos — ou desconhecemos — que a origem da gravação sonora no mundo começou, em 1877, com a criação do **fonógrafo**, um aparelho capaz de gravar e reproduzir o som, inventado por Thomas Alva Edison (1847-1931).

Bettmann/CORBIS/Latinstock

Fotografia de reprodução do fonógrafo de Edison.

Thinkstock/Getty Images

Fotografia de um modelo de toca-discos.

O fonógrafo de disco plano, ou gramofone, foi inventado pelo alemão Emil Berliner em 1887.

Com a evolução da indústria fonográfica, as gravações mecânicas foram substituídas pelas elétricas e, em 1948, surgem os discos de alta-fidelidade (*hi-fi*) e o *long-play*, feitos de vinil. Para ouvi-los, foi criado o toca-discos, que consistia de um prato giratório acionado por um motor elétrico. A frequência de rotação do prato era de 16, 33, 45 ou 78 rpm (rotações por minuto).

A rotação de um disco de vinil ocorre no sentido horário, com velocidade angular (ω) **constante**. No caso de um *long-play* (LP), por exemplo, a rotação se dá com frequência aproximadamente igual a 33 rpm. Por isso, a duração de cada volta é cerca de 1,8 s.

Nas irregularidades (saliências e reentrâncias) existentes ao longo de um sulco em espiral de um LP, estão gravadas as informações que dão origem aos sinais sonoros.

Na reprodução do conteúdo gravado, o sulco passa por uma agulha que vai se deslocando lentamente da borda externa para a região mais central do disco. Essa agulha, em contato com as citadas irregularidades, vibra e, assim, capta as informações gravadas.

Obviamente uma "circunferência" do sulco, situada na região mais periférica do disco, é mais longa que uma "circunferência" das regiões mais internas. Como a velocidade angular (ω) é constante, o tempo de duração da reprodução do conteúdo de cada "circunferência" é o mesmo (aproximadamente 1,8 s). Assim, as informações correspondentes a 1,8 s de uma música estão gravadas mais espaçadamente em uma "circunferência" mais externa e mais "espremidas" em "circunferências" mais internas. Isso compromete a qualidade da reprodução do que está gravado na região mais próxima do centro do disco.

Desde 1967 foram realizadas pesquisas sobre a gravação sonora digital, mas só em 1982 foram lançados oficialmente (em Tóquio) o CD (com 12 cm de diâmetro) e o CD *player* (leitor de CD) resultado do trabalho conjunto de uma empresa da Holanda e outra do Japão. No Brasil, esse lançamento ocorreu em 1984.

Em um *compact disc* (CD), a leitura das informações digitais gravadas, em microcavidades e em código binário, não é feita por algo que se atrita com o disco (como a agulha no disco de vinil), mas sim por um finíssimo feixe de *laser*.

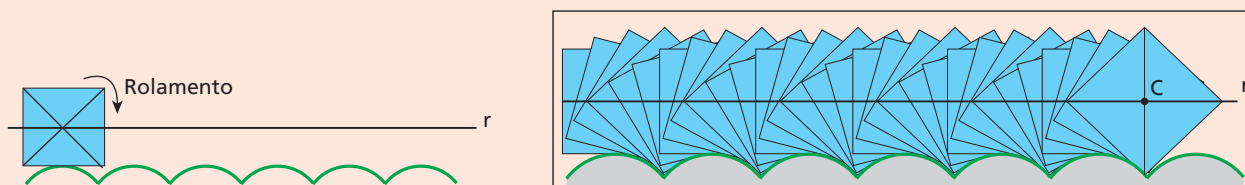
A rotação de um CD acontece no sentido anti-horário, e seu sulco passa pelo feixe de *laser*, que vai se deslocando da região gravada situada mais próxima do centro do disco para a região mais periférica (a leitura é feita "de dentro para fora").

Diferentemente do que acontece com os discos de vinil, a velocidade angular (ω) de um CD é variável durante a leitura de seu conteúdo. Essa variação é controlada, com altíssima precisão, por um circuito conhecido tecnicamente por CLV (*Constant Linear Velocity*), de modo que torne constante (1,30 m/s) a velocidade linear (**v**): qualquer "circunferência" do sulco passa pelo feixe de laser com a mesma velocidade linear. Assim, o intervalo de tempo de leitura das informações contidas em uma "circunferência" mais próxima do centro do disco é menor que o de leitura das informações que estão em uma "circunferência" mais externa. Consequentemente, a quantidade de informações gravadas é tanto menor quanto menor for o perímetro da "circunferência", e essas informações estão uniformemente distribuídas ao longo de todo o sulco, não mais havendo o problema de regiões com informações mais "espremidas", como acontece nos discos de vinil.

No início da leitura de um CD — leitura do conteúdo gravado na "circunferência" mais próxima do seu centro —, o disco gira com frequência igual a 539 rpm. Em seguida, essa frequência vai diminuindo gradualmente até 214 rpm, quando é lido o conteúdo gravado na "circunferência" mais externa.

Uma bicicleta de rodas quadradas

Existe uma curva denominada **catenária**, cujo formato é praticamente o da "barriga" de um fio entre dois postes da rede elétrica ou de uma corrente suspensa entre dois suportes, usada para obstruir a passagem de veículos.

A figura a seguir representa vários arcos iguais de catenária, unidos horizontalmente. Se um quadrado, cujo lado tem comprimento igual ao de um dos arcos, rolar sobre eles, sem deslizar, de modo que os vértices do quadrado coincidam com os "bicos" (cúspides) entre arcos consecutivos, seu centro se moverá sobre a reta horizontal **r**.

Enquanto o quadrado rola, seu centro **C** percorre a reta **r**.

Com base nessa propriedade da catenária, foi possível construir uma pista em que uma bicicleta de rodas quadradas se move normalmente, como uma bicicleta comum.

S Wagon 2009

Exercícios

nível 1

10. Com relação a um relógio analógico, determine o período do ponteiro:
a) dos segundos;
b) dos minutos;
c) das horas.

11. Quanto mede, em graus e em radianos, o ângulo θ descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, em 10 minutos?

12. Um corpo em movimento circular e uniforme completa 20 voltas em 10 segundos. Determine a frequência e o período desse movimento.

13. Determinada furadeira pode atingir a rotação máxima de 3000 rpm. Nessa situação, calcule o período do movimento no SI.

14. Calcule, em rad/h, a velocidade angular da Terra em seu movimento de rotação.

15. E.R. O raio da Terra mede aproximadamente $6{,}4 \cdot 10^3$ km. Calcule, em km/h, a velocidade com que se desloca um ponto do equador terrestre em virtude apenas do movimento de rotação do planeta (adote $\pi = 3{,}14$).

Resolução:

Um ponto do equador terrestre executa um MCU de período **T** igual a 24 horas e raio **R** igual a $6{,}4 \cdot 10^3$ km. A velocidade escalar linear (v) relaciona-se com a angular (ω) por meio da expressão:

$$v = \omega R \quad \text{(I)}$$

Como: $$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(III)}$$

substituímos (II) em (I) e obtemos: $$v = \frac{2\pi R}{T}$$

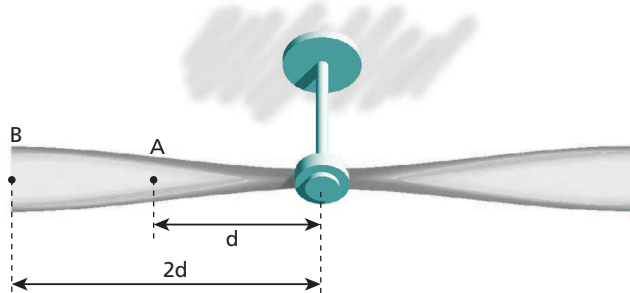
Assim, substituindo os valores conhecidos, vem:

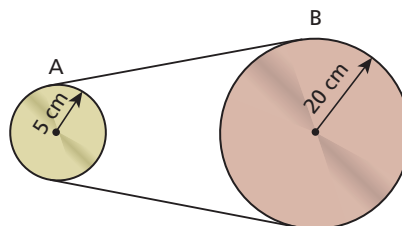
$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^3}{24} \Rightarrow \boxed{v = 1{,}7 \cdot 10^3 \text{ km/h}}$$

Nota:

- A velocidade encontrada (1 700 km/h) é aproximadamente cinco vezes a de um carro de Fórmula 1. Entretanto, uma pessoa no equador não a percebe porque também possui essa velocidade em torno do eixo da Terra.

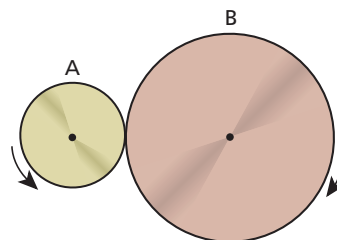
16. O ponteiro dos segundos de um relógio instalado na fachada principal de uma fábrica tem 1,2 m de comprimento. Calcule, em m/s, a velocidade da extremidade desse ponteiro.
Use $\pi = 3$.

17. As pás de um ventilador rotam com velocidade angular constante ω.

Compare os períodos (**T**), as frequências (**f**), as velocidades escalares angulares (ω) e as velocidades escalares lineares (**v**) dos pontos **A** e **B** da pá.

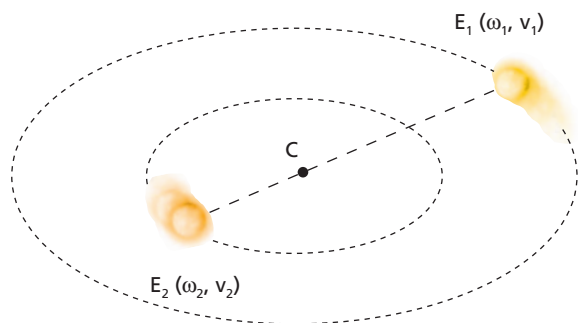
18. Na situação esquematizada na figura, temos duas polias **A** e **B** acopladas por uma correia inextensível. Quando a polia **A** gira, movimenta a correia, que, por sua vez, faz a polia **B** girar também.

Admitindo que não haja escorregamento entre a correia e as polias e supondo que a polia **A** execute 60 rpm, calcule:

a) a frequência de rotação da polia **B**;

b) a velocidade linear de um ponto qualquer da correia. (Use $\pi = 3{,}1$.)

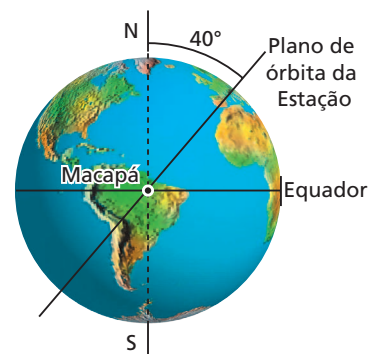
19. Temos, na figura a seguir, duas polias **A** e **B** de raio R_A e R_B, sendo $R_A = 20$ cm e $R_B = 60$ cm:

A polia **A** gira com frequência igual a 1 200 Hz, acionada por um motor. A polia **B** também gira, acionada pela polia **A** por meio do contato entre elas. Não há escorregamento entre as polias na região de contato. Determine com que frequência a polia **B** gira.

Exercícios nível 2

20. Num sistema, duas estrelas E_1 e E_2 descrevem circunferências de raios r_1 e r_2, respectivamente, como representa a figura. Essas circunferências têm um mesmo centro **C**, denominado centro de massa da estrela dupla.

Sabendo que E_1, E_2 e **C** se mantêm permanentemente alinhados, determine, para essas estrelas, a razão:

a) ω_1/ω_2 entre suas velocidades angulares;

b) v_1/v_2 entre suas velocidades lineares.

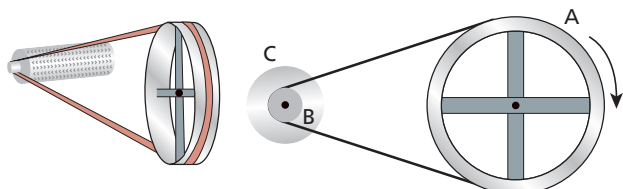
21. (Fuvest-SP) A Estação Espacial Internacional mantém atualmente uma órbita circular em torno da Terra, de tal forma que permanece sempre em um plano, normal a uma direção fixa no espaço. Esse plano contém o centro da Terra e faz um ângulo de 40° com o eixo de rotação da Terra. Em certo momento, a Estação passa sobre Macapá, que se encontra na linha do Equador. Depois de uma volta completa em sua órbita, a Estação passará novamente sobre o equador em um ponto que está a uma distância de Macapá de, aproximadamente:

Dados da Estação:	Período aproximado: 90 minutos
	Altura acima da Terra $\cong$ 350 km
Dados da Terra:	Circunferência no equador $\cong$ 40 000 km

a) zero km. b) 500 km. c) 1 000 km. d) 2 500 km. e) 5 000 km.

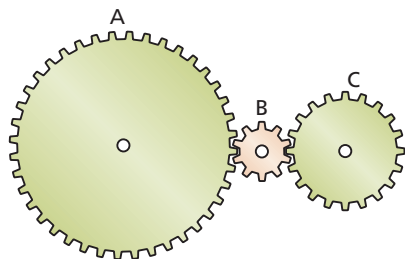
22. A Terra, suposta esférica, tem raio **R**, e seu período de rotação é **T**.

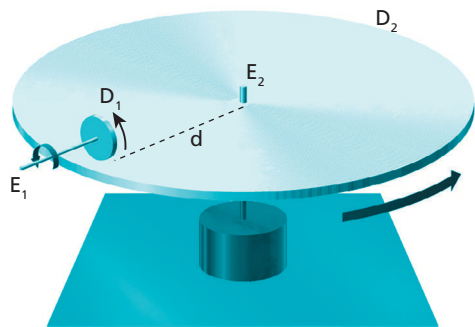
a) Encontre uma expressão da velocidade escalar linear **v** de um ponto da superfície da Terra, devida apenas ao movimento de rotação em função da latitude (**L**).

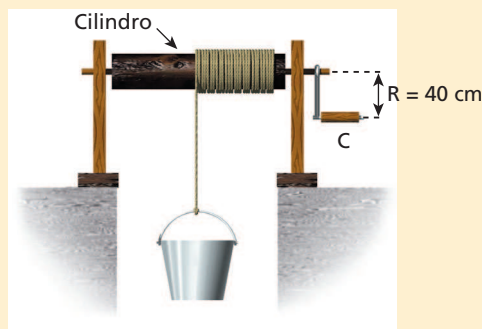
b) Represente graficamente **v** em função de **L**.

23. (UEPA) Um dispositivo rudimentar utilizado no interior no Estado do Pará para ralar mandioca na fabricação de farinha consiste de uma associação de polias com diâmetros diferentes, como mostra a figura abaixo:

Os valores dos diâmetros das rodas mostradas na figura são $D_A = 1$ m, $D_B = 10$ cm e $D_C = 25$ cm. Nessa situação, enquanto a roda **A** executa uma volta completa, as voltas executadas pelas rodas **B** e **C** são, respectivamente:

a) 10 e 10.
b) 5 e 10.
c) 5 e 5.
d) 10 e 15.
e) 15 e 10.

24. A figura representa um acoplamento de três rodas dentadas **A**, **B** e **C** que possuem 40, 10 e 20 dentes respectivamente.

Lembrando que os dentes são todos iguais, quantas voltas dá a roda **A** enquanto a roda **C** completa 10?

25. No sistema esquematizado na figura, o eixo E_1 está acoplado a um motor que o faz rotar com frequência $f_1 = 120$ Hz. Esse eixo está fixado no disco D_1, de raio $R_1 = 5$ cm. O disco D_1, disposto perpendicularmente ao segmento de reta tracejado, faz contato com outro disco D_2, de raio $R_2 = 50$ cm, sem deslizar nele. D_2, fixado no eixo E_2, então rota com frequência f_2.

Supondo que a distância **d**, do ponto de contato entre os discos até o centro de D_2, possa variar de 10 cm a 40 cm, responda: quais são os valores possíveis de f_2?

26. E.R. Num lugar onde não se dispõe de energia elétrica, é usado um sarilho para tirar água de um poço. Essa máquina consta de um cilindro de raio $r = 15$ cm, fixo em um eixo que pode rotar apoiado em dois suportes. Uma das extremidades de uma corda é fixada no cilindro e a outra é amarrada em um balde. À medida que o cilindro gira, acionado por uma manivela de cabo C, a corda enrola-se nele numa única camada e o balde sobe 9 m em 30 s, em movimento uniforme.

Na operação descrita, calcule a velocidade:

a) angular do cilindro;
b) linear do cabo **C**.

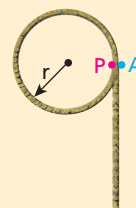
Resolução:

a) A velocidade com que o balde sobe é dada por:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sendo $\Delta s = 9$ m e $\Delta t = 30$ s, temos:

$$v = \frac{9\text{ m}}{30\text{ s}} \Rightarrow v = 0{,}3 \text{ m/s}$$

Os pontos da corda também se movem com essa velocidade. Considere, então, um ponto **A** da corda em contato com um ponto **P** da periferia do cilindro:

Como a corda não escorrega no cilindro, temos:

$$v_P = v_A = 0{,}3 \text{ m/s}$$

Então:

$$\omega_P = \frac{v_P}{r} = \frac{0{,}3}{0{,}15} \Rightarrow \boxed{\omega_P = 2 \text{ rad/s}}$$

Destacamos que **todos** os pontos do cilindro têm velocidade angular igual a 2 rad/s.

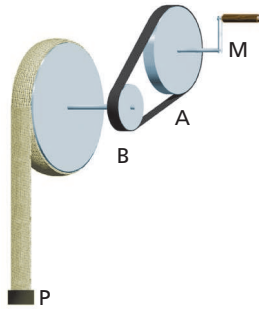
b) A velocidade angular do cabo **C** é igual à do cilindro:

$$\omega_C = 2 \text{ rad/s}$$

Então:

$$\omega_C = \frac{v_C}{R} \Rightarrow v_C = \omega_C \cdot R = 2 \cdot 0{,}4$$

$$\boxed{v_C = 0{,}8 \text{ m/s}}$$

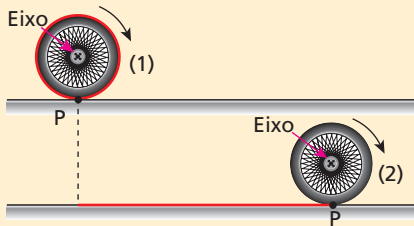
27. (Unirio-RJ – mod.)

O mecanismo apresentado na figura acima é utilizado para enrolar mangueiras após terem sido usadas no combate a incêndios. A mangueira é enrolada sobre si mesma, camada sobre camada, formando um carretel cada vez mais espesso. Considerando ser o diâmetro da polia **A** maior que o diâmetro da polia **B**, quando giramos a manivela **M** com velocidade constante, verificamos que a polia **B** gira .... que a polia **A**, enquanto a extremidade **P** da mangueira sobe com movimento .... .

A opção que preencheria corretamente as lacunas acima é:

a) mais rapidamente — acelerado.
b) mais rapidamente — uniforme.
c) com a mesma velocidade — uniforme.
d) mais lentamente — uniforme.
e) mais lentamente — acelerado.

28. E.R. Uma motocicleta encontra-se em movimento em uma estrada asfaltada. Cada uma de suas rodas tem raio $R = 25$ cm e gira com frequência $f = 10$ Hz. Sabendo que as rodas não deslizam no asfalto, calcule a velocidade da moto em km/h. (Use $\pi = 3{,}1$.)

Resolução:

Na figura a seguir, representamos uma roda da moto em duas posições (1) e (2). Da posição (1) até a posição (2), a roda completa uma volta. O ponto **P** está na periferia da roda.

Imagine que a periferia da roda, na posição (1), esteja pintada com uma estreita faixa de tinta vermelha fresca. O comprimento dessa faixa é $2\pi R$ (perímetro da circunferência). De (1) para (2), a roda deixa no asfalto uma marca vermelha de **mesmo comprimento**, pois a roda não desliza na pista. Note, então, que, num mesmo intervalo de tempo, o ponto **P** percorre $2\pi R$ em relação ao eixo da roda e este também percorre $2\pi R$ em relação à estrada. Portanto, a velocidade v_P, do ponto **P** em relação ao eixo, é igual à velocidade v_E, do eixo em relação à estrada:

$$v_P = v_E$$

Como a velocidade do eixo em relação à estrada é igual à velocidade v_M da moto, temos:

$$v_M = v_P$$

Portanto, a velocidade da moto tem o mesmo valor da velocidade do ponto **P** em seu movimento circular em torno do eixo:

$$v_M = v_P = \omega_P R = 2\pi f R$$

$$v_M = 2 \cdot 3{,}1 \cdot 10 \cdot 0{,}25 \Rightarrow v_M = 15{,}5 \text{ m/s}$$

$$\boxed{v_M = 56 \text{ km/h}}$$

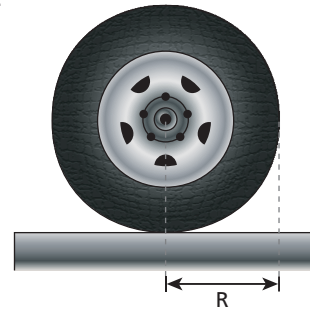
29. (Fuvest-SP) Qual a ordem de grandeza do número de voltas dadas pela roda de um automóvel ao percorrer uma estrada de 200 km?

a) 10^2 b) 10^3 c) 10^5 d) 10^7 e) 10^9

Nota:

• Grosso modo, ordem de grandeza de um número é a potência de dez que mais se aproxima desse número.

30. Os pneus de certo automóvel têm raio **R** (ver figura) igual a 25 cm.

Calcule o módulo da velocidade desse veículo, em km/h, quando suas rodas rolam com frequência igual a 1 200 rpm. Use a aproximação $\pi = 3$.

31. (UFSM-RS) Um trator tem as rodas traseiras maiores que as dianteiras e desloca-se com velocidade constante. Pode-se afirmar que, do ponto de vista do tratorista, os módulos das velocidades lineares de qualquer ponto das bandas de rodagem das rodas da frente (v_f) e de trás (v_T) e os módulos das velocidades angulares das rodas da frente (ω_f) e de trás (ω_T) são:

a) $v_f > v_T$ e $\omega_f > \omega_T$.
b) $v_f > v_T$ e $\omega_f < \omega_T$.
c) $v_f < v_T$ e $\omega_f = \omega_T$.
d) $v_f = v_T$ e $\omega_f > \omega_T$.
e) $v_f = v_T$ e $\omega_f = \omega_T$.

32. (Unicamp-SP) Em 1885, Michaux lançou o biciclo com uma roda dianteira diretamente acionada por pedais (Fig. **A**). Por meio do emprego da roda dentada, que já havia sido concebida por Leonardo da Vinci, obteve-se melhor aproveitamento da força nos pedais (Fig. **B**). Considere que um ciclista consiga pedalar 40 voltas por minuto em ambas as bicicletas. (Use $\pi = 3$.)

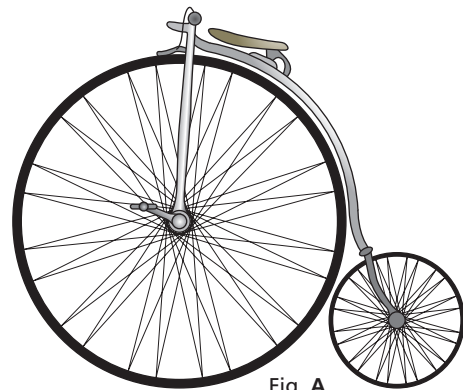



Fig. **A**

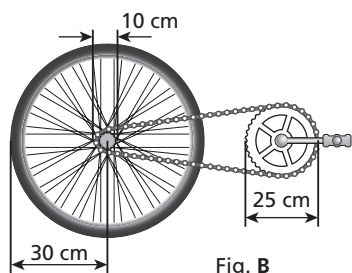
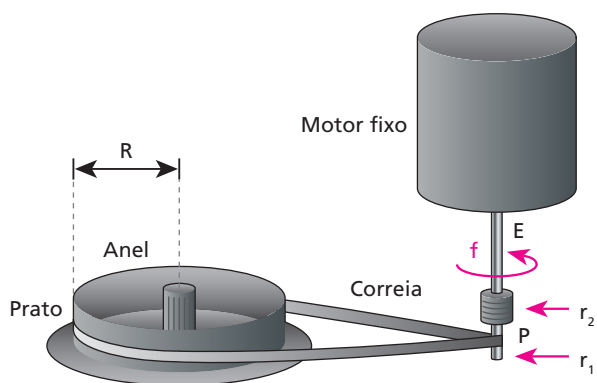
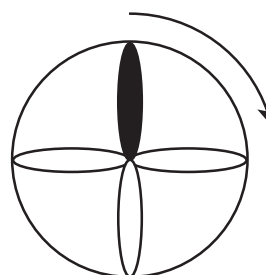
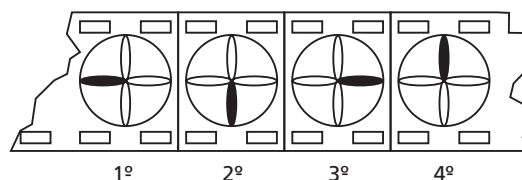



Fig. **B**

a) Qual a velocidade de translação do biciclo de Michaux para um diâmetro da roda de 1,20 m?
b) Qual a velocidade de translação para a bicicleta-padrão aro 60 (Fig. **B**)?

33. O aparelho usado para reproduzir sons gravados em discos de vinil é o toca-discos.
Foram fabricados muitos modelos de toca-discos e ainda hoje existem empresas investindo na produção desses aparelhos.
A figura a seguir é um esquema simplificado, de ponta-cabeça e fora de escala, de um sistema usado para girar o prato sobre o qual o disco é acomodado.
O anel de raio **R** igual a 90 mm está fixado no prato e é acoplado a uma peça metálica **P** por meio de uma correia de borracha.

A peça **P** está fixada no eixo **E** de um motor e possui duas partes cilíndricas: uma de raio r_1 igual a 1,20 mm e outra de raio r_2 igual a 1,62 mm.
Quando a correia está na parte de raio r_1, como na figura, o prato gira com frequência igual a $\frac{100}{3}$ rpm $\left(33\frac{1}{3}\right.$ rpm).

a) Determine, em rpm, a frequência **f** de rotação do eixo **E** do motor.
b) Calcule a frequência de rotação do prato quando, por meio de um dispositivo não representado na figura, a correia é levada para a parte de raio r_2 da peça **P**.

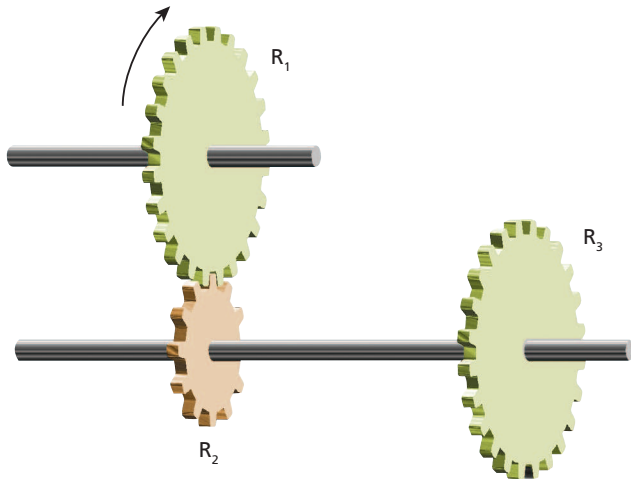
34. (UFRJ) O olho humano retém durante $\frac{1}{24}$ de segundo as imagens que se formam na retina. Essa memória visual permitiu a invenção do cinema. A filmadora bate 24 fotografias (fotogramas) por segundo. Uma vez revelado, o filme é projetado à razão de 24 fotogramas por segundo. Assim, o fotograma seguinte é projetado no exato instante em que o fotograma anterior está desaparecendo de nossa memória visual, o que nos dá a sensação de continuidade.
Filma-se um ventilador cujas pás estão girando no sentido horário. O ventilador possui quatro pás simetricamente dispostas, uma das quais pintada de cor diferente, como ilustra a figura abaixo:

Ao projetarmos o filme, os fotogramas aparecem na tela na seguinte sequência:

o que nos dá a sensação de que as pás estão girando no sentido anti-horário.
Calcule quantas rotações por segundo, no mínimo, as pás devem estar efetuando para que isso ocorra.

Nota:
- A ilusão de que as pás estão girando no sentido oposto ao real é devida ao fato de nosso cérebro interpretar que o movimento, de um fotograma para o outro, se dá no sentido do **menor** deslocamento angular.

Descubra mais

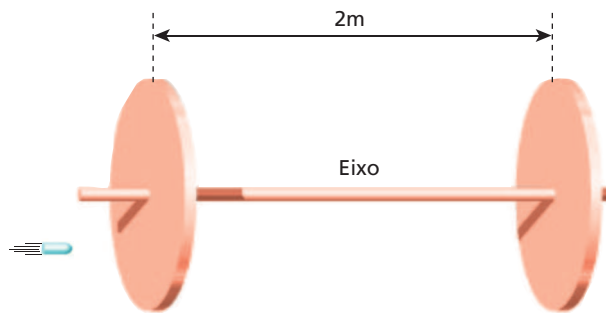
1. Eratóstenes de Cirene (276 a.C.–194 a.C.) — matemático e filósofo grego — foi quem determinou, pela primeira vez, o raio da Terra. Procure saber como isso foi possível. Pesquise, também, que unidade de comprimento Eratóstenes usou e a quantos metros ela equivalia. Repita os cálculos que ele fez e compare o valor obtido na época com o valor médio atual, que é de aproximadamente 6 400 km.

Exercícios

35. Na figura, as rodas dentadas R_1 e R_3 são iguais e seus raios medem 50 cm, enquanto a roda dentada R_2 tem raio igual a 25 cm. As rodas R_2 e R_3 giram fixas a um mesmo eixo. A roda R_1, acoplada à R_2, gira com frequência igual a 5000 rpm.

Determine:

a) a frequência de rotação das rodas R_2 e R_3.

b) o quociente v_1/v_3 das velocidades escalares lineares de pontos na periferia das rodas R_1 e R_3 respectivamente.

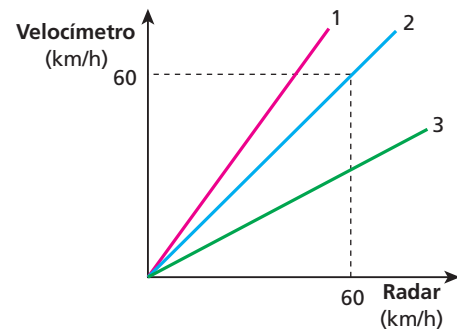
36. A figura representa dois discos de papelão fixados a um mesmo eixo, com rotação de frequência igual a 50 Hz. Os discos foram fixados em locais do eixo distantes 2 m um do outro.

Um projétil é disparado paralelamente ao eixo, descolando-se em movimento suposto retilíneo e uniforme, perfurando os dois discos. O ângulo entre o plano que contém o eixo e o furo no primeiro disco e o plano que contém o eixo e o furo no segundo disco é igual a 45°. Determine a velocidade do projétil, sabendo que, entre as duas perfurações, os discos giraram menos que meia volta.

37. (ITA-SP) Uma partícula move-se ao longo de uma circunferência circunscrita em um quadrado de lado **L** com velocidade angular constante. Na circunferência inscrita nesse mesmo quadrado, outra partícula move-se com a mesma velocidade angular. A razão entre os módulos das respectivas velocidades lineares dessas partículas é:

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

38. (UFBA) Um indivíduo, preocupado com as constantes multas que tem recebido por dirigir seu automóvel em excesso de velocidade, relata o fato a dois companheiros. Os três amigos não conseguem compreender a razão das multas, sendo que todos eles observam os limites de velocidade nas vias públicas por meio do velocímetro de seus carros.

Os seus veículos, de mesmo modelo, têm nos pneus a única característica distinta. O carro **A** usa os pneus indicados pelo fabricante do veículo; o carro **B** usa pneus com diâmetro maior que o indicado, pois o seu proprietário visita, periodicamente, seus familiares no interior, viajando por estradas e caminhos irregulares; o carro **C** usa pneus com diâmetro menor que o indicado, uma vez que seu proprietário gosta de veículos rebaixados, com aspecto esportivo.

Os três amigos decidem fazer um experimento: alugam um aparelho de radar e vão para uma estrada deserta. Após realizarem várias medições, construíram o gráfico abaixo.

Com base na análise do gráfico, identifique a correspondência existente entre os carros **A**, **B** e **C** e as linhas 1, 2 e 3, que representam as velocidades desses carros, verificando qual dos três amigos deve ser mais precavido ao circular em estradas e avenidas vigiadas pelo radar. Justifique sua resposta.

39. (AFA-SP – mod.) Considere um automóvel cujos pneus, quando novos, têm diâmetro **D**. Suponha que os pneus se tenham desgastado e apresentem 98% do diâmetro original. Quando o velocímetro assinalar 100 km/h, a velocidade real do automóvel será:

a) 104 km/h. c) 100 km/h. e) 96 km/h.
b) 102 km/h. d) 98 km/h.

40. Dois ciclistas partem de um mesmo ponto de uma pista circular de raio igual a 100 m, no mesmo instante e em sentidos contrários. Suas velocidades escalares lineares valem 2π m/s e 3π m/s. Após quanto tempo eles se encontrarão pela primeira vez?

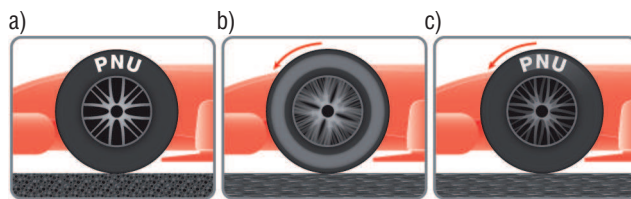
41. Duas partículas movem-se numa mesma trajetória circular, com movimentos uniformes de mesmo sentido. Sendo as frequências dos movimentos dessas partículas iguais a 4 rpm e 6 rpm e sabendo que em $t = 0$ elas estão na mesma posição, determine quantas vezes elas se encontram no intervalo de $t = 0$ a $t = 1$ h.

42. Às 12 horas, o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos de um relógio se sobrepõem. Depois de quanto tempo ocorre a próxima sobreposição?

43. Considere dois pilotos **A** e **B** que, ao disputarem uma prova de automobilismo, percorrem o circuito no mesmo sentido e com velocidades escalares constantes. O piloto **A** completa uma volta em 1 min 40 s, enquanto o piloto **B** faz o mesmo em 1 min 36 s. Supondo que, em determinado instante, **B** esteja ao lado de **A**, quanto tempo depois dessa situação a vantagem de **B** sobre **A** será de um quarto de volta?

44. (Uerj-RJ) Dois móveis, **A** e **B**, percorrem uma pista circular em movimento uniforme. Os dois móveis partiram do mesmo ponto e no mesmo sentido com as velocidades de 1,5 rad/s e 3,0 rad/s, respectivamente; o móvel **B**, porém, partiu 4 segundos após o **A**.
Calcule o intervalo de tempo decorrido, após a partida de **A**, no qual o móvel **B** alcançou o móvel **A** pela primeira vez.

45. (Unicamp-SP) O quadro (a), a seguir, refere-se à imagem de televisão de um carro parado, em que podemos distinguir claramente a marca do pneu (“PNU”).

a) b) c)

Quando o carro está em movimento, a imagem da marca aparece como um borrão em volta de toda a roda, como ilustrado em (b). A marca do pneu volta a ser nítida, mesmo com o carro em movimento, quando esse atinge determinada velocidade. Essa ilusão de movimento na imagem gravada é devida à frequência de gravação de 30 quadros por segundo (30 Hz). Considerando que o diâmetro do pneu é igual a 0,6 m e $\pi = 3,0$, responda:

a) Quantas voltas o pneu completa em um segundo quando a marca filmada pela câmara aparece parada na imagem, mesmo estando o carro em movimento?
b) Qual a menor frequência angular ω do pneu em movimento quando a marca aparece parada?
c) Qual a menor velocidade linear (em m/s) que o carro pode ter na figura (c)?

Para raciocinar um pouco mais

46. Considere os períodos de translação de Júpiter, Saturno e Urano conforme dados da tabela abaixo:

Planeta	Período de translação (em anos terrestres)
Júpiter	12
Saturno	30
Urano	84

Suponha que esses planetas estejam alinhados como na figura.

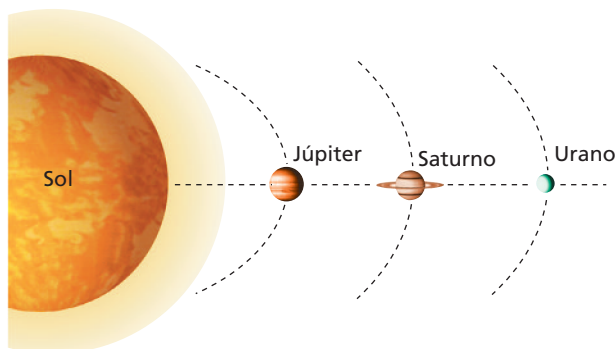
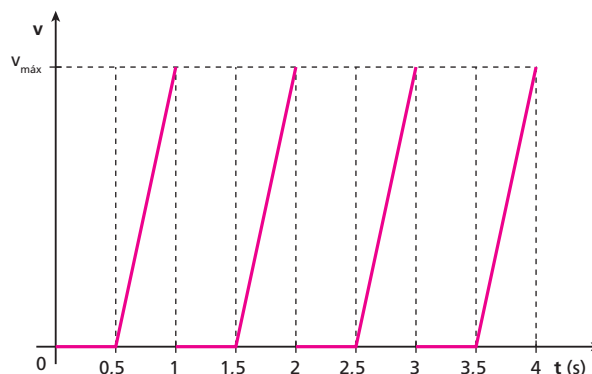



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.

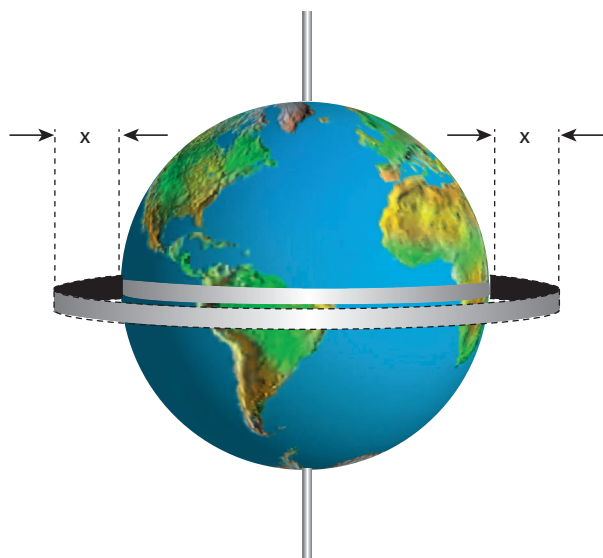
Depois de quanto tempo essa mesma situação voltará a acontecer?

47. A distância entre o eixo de rotação e a extremidade livre do ponteiro dos segundos de um relógio de parede é igual a 7,5 cm. Essa extremidade se move aos “saltos”.

Supondo que sua velocidade linear **v** varie com o tempo, de acordo com o gráfico, calcule o valor máximo dessa velocidade ($v_{máx}$). (Use $\pi = 3$.)

48. Um satélite artificial da Terra está em órbita circular, no plano equatorial, no mesmo sentido de rotação da Terra. Sabe-se que, para um observador fixo na superfície terrestre, na linha do equador, o satélite artificial passa acima de sua posição com um período de 2d (dois dias).
O período de translação do satélite, em torno do centro da Terra:

a) só pode ser de 2d.
b) só pode ser de 1d.
c) só pode ser de $\frac{2}{3}$ d.
d) pode ser de 1d ou de 2d.
e) pode ser de $\frac{2}{3}$ d ou de 2d.

Obs.: **d** é o símbolo que representa dia.

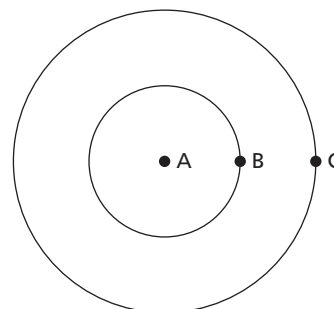
49. Considere a Terra perfeitamente esférica e suponha um aro nela ajustado, na linha do equador (que mede aproximadamente 40 000 km).

Se o comprimento desse aro for aumentado de 1 m, surgirá uma folga **x** entre ele e a Terra, como está indicado na figura. Dentre as alternativas seguintes, indique aquela que traz o **maior** animal capaz de passar por essa folga.

a) pulga
b) aranha
c) rato
d) gato
e) elefante

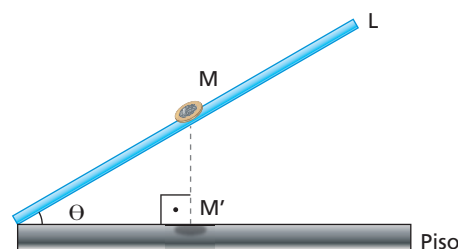
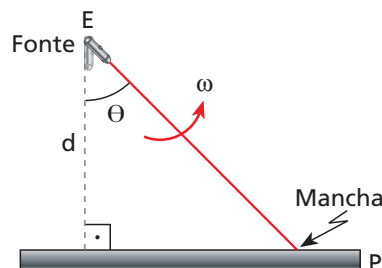
50. (Olimpíada Brasileira de Física) Em Física, define-se a quantidade de movimento angular (momento angular), **L**, de um corpo que gira com velocidade angular constante ω em torno de um eixo como sendo L = I ω, em que **I** é uma grandeza denominada momento de inércia, que depende da massa do corpo e de como ela está distribuída em torno do eixo de rotação. Para um disco de massa **M** e raio **R**, o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular a ele, passando pelo seu centro, é dado por $I = \frac{MR^2}{2}$.

Considere um disco como esse, de raio 10 cm, girando com frequência de 0,5 Hz.

a) Quantas voltas serão dadas em 15 segundos por um outro disco que possui a mesma massa do primeiro disco e metade do seu raio, tendo, porém, o mesmo momento angular?
b) Se os dois discos forem fabricados do mesmo material, qual a diferença entre eles além dos raios?

51. (Olimpíada Ibero-americana de Física) Um observador **A** encontra-se no centro da praça de Espanha, na cidade de Guatemala, observando o movimento de dois motociclistas, **B** e **C**. Esses motociclistas descrevem trajetórias circulares em torno de **A**, no mesmo sentido, e de raios $R_B = 35{,}0$ m e $R_C = 60{,}0$ m. O observador **A** verifica que o motociclista **B** demora $T_B = 10{,}0$ s para completar uma volta, enquanto o motociclista **C** demora $T_C = 16{,}0$ s. A figura indica a configuração inicial.

a) Calcule o menor número de voltas completas de **B** e **C**, contadas a partir do instante inicial, para que essa mesma configuração se repita.
b) Determine o tempo mínimo, a partir do instante inicial, até que **A**, **B** e **C** estejam alinhados pela primeira vez, movendo-se **B** e **C** no mesmo sentido.
c) Determine o número (inteiro ou fracionário) de voltas, dadas por **B** e por **C**, no intervalo de tempo obtido no item anterior.
d) Determine os módulos das velocidades de **A** e de **B** em relação a **C**, quando **A**, **B** e **C** encontram-se alinhados, estando A posicionado entre **B** e **C**.

52. São descritos a seguir dois eventos, **1** e **2**.

1. Uma moeda **M** é lançada escorregando ao longo de uma lâmina de vidro **L**, inclinada de **θ** em relação ao piso de um quintal. A sombra da moeda, projetada no piso, com o sol a pino, está representada por **M'** na figura abaixo.

2. Uma pequena fonte de luz (*laser*), situada a uma distância **d** de um paredão **P**, gira em torno de um eixo **E**, com velocidade angular constante **ω**, emitindo horizontalmente um estreito feixe de luz que varre o paredão. A "mancha" dessa luz no paredão move-se em linha reta ao longo dele, com velocidade instantânea de módulo **v**. A figura representa o evento visto de cima:

a) No evento **1**, a velocidade da moeda em um instante **t** tem módulo v_M. Determine, nesse mesmo instante, o módulo $v_{M'}$ da velocidade de sua sombra.
b) No evento **2**, expresse **v** em função de **ω**, **d** e do ângulo **θ** indicado na figura.

Apêndice

Velocidade escalar instantânea angular

Sua definição é análoga à da velocidade escalar instantânea linear.

Assim:

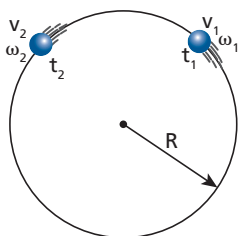
A **velocidade escalar instantânea angular** (ω) em certo instante **t** é o limite para o qual tende o quociente $\Delta\varphi/\Delta t$, calculado entre **t** e **t'**, quando fazemos **t'** tender a **t**, ou seja, Δt tender a zero.

Simbolicamente:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Aceleração escalar angular

Aceleração escalar média angular

A figura abaixo mostra as posições de uma partícula em movimento circular nos instantes t_1 e t_2. Nesses instantes, as velocidades escalares instantâneas lineares valem v_1 e v_2, enquanto as angulares valem ω_1 e ω_2.

Entre os instantes t_1 e t_2, a velocidade escalar instantânea da partícula sofre uma variação, que pode ser dada linearmente por Δv ou angularmente por $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

O quociente da variação de velocidade $\Delta\omega$ pelo intervalo de tempo Δt em que ela ocorre é a **aceleração escalar média angular** (γ_m: lê-se gama m) nesse intervalo:

$$\gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

Se as velocidades angulares forem medidas em radianos por segundo (rad/s) e o tempo em segundos (s), a unidade de medida da aceleração angular será **radiano por segundo ao quadrado** (**rad/s²**).

Relação entre a aceleração escalar média angular e a linear

Vamos determinar agora a relação entre as acelerações escalares médias linear (α_m) e angular (γ_m).

Temos que:

$$\alpha_m = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \quad \text{(I)}$$

Mas: $v_2 = \omega_2 R$ e $v_1 = \omega_1 R$.

Substituindo essas expressões em (I), vem:

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 R - \omega_1 R}{\Delta t} = \frac{(\omega_2 - \omega_1) R}{\Delta t}$$

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega R}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_m = \gamma_m R \Rightarrow \gamma_m = \frac{\alpha_m}{R}$$

A **aceleração escalar média angular** (γ_m) é igual à aceleração escalar média linear (α_m) dividida pelo raio (**R**) da circunferência:

$$\gamma_m = \frac{\alpha_m}{R}$$

Aceleração escalar instantânea angular

Sua definição também é análoga à da aceleração escalar instantânea linear.

A **aceleração escalar instantânea angular** (γ) em certo instante **t** é o limite para o qual tende o quociente $\Delta\omega/\Delta t$, calculado entre **t** e **t'**, quando fazemos **t'** tender a **t**, ou seja, Δt tender a zero.

Simbolicamente:

$$\gamma_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Relação entre a aceleração escalar instantânea angular e a linear

Também neste caso, temos que:

A **aceleração escalar instantânea angular** (**γ**) é igual à aceleração escalar instantânea linear (**α**) dividida pelo raio (R) da circunferência:

$$\gamma = \frac{\alpha}{R}$$

Movimento circular uniformemente variado

Neste movimento, assim como em qualquer outro movimento uniformemente variado, valem as seguintes expressões:

- Função horária do espaço linear:

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{\alpha}{2}t^2$$

- Função horária da velocidade escalar linear:

$$v = v_0 + \alpha\,t$$

- Equação de Torricelli linear:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\,\Delta s$$

Em todas essas expressões, a aceleração escalar linear (**α**) é constante e diferente de zero.

Se dividirmos todos os termos de cada uma delas pelo raio (**R**) da circunferência, obteremos:

- Função horária do espaço angular:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\,t + \frac{\gamma}{2}t^2$$

- Função horária da velocidade escalar angular:

$$\omega = \omega_0 + \gamma\,t$$

- Equação de Torricelli angular:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\gamma\,\Delta\varphi$$

Nessas novas expressões, a aceleração escalar angular (**γ**) é constante e diferente de zero.

Notas:

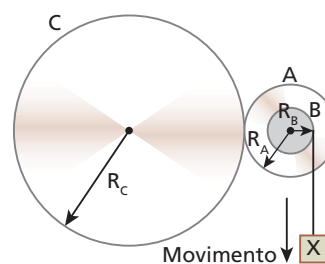
- No gráfico da velocidade angular (**ω**) em função do tempo, a "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa o deslocamento angular $\Delta\varphi$ entre dois instantes.
- No gráfico da aceleração angular (**γ**) em função do tempo, a "área" entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa a variação da velocidade angular (**Δω**) entre dois instantes.

Exercícios

53. Uma partícula em movimento circular uniformemente variado tem sua velocidade angular alterada de 2π rad/s para 10π rad/s durante 20 s. Calcule o número de voltas que a partícula efetua nesse intervalo de tempo.

54. (UFPE) A parte mais externa de um disco, com 0,25 m de raio, gira com uma velocidade linear de 15 m/s. O disco começa então a desacelerar uniformemente até parar, em um tempo de 0,5 min. Qual o módulo da aceleração angular do disco em rad/s²?

55. (UFPR) Um ventilador gira à razão de 900 rpm. Ao desligá-lo, seu movimento passa a ser uniformemente retardado, até parar após 75 voltas. Qual o tempo decorrido desde o momento em que foi desligado até sua parada completa?

56. Na figura, temos duas polias coaxiais **A** e **B** de raios $R_A = 20$ cm e $R_B = 10$ cm e uma outra polia **C** de raio $R_C = 50$ cm:

O bloco **X**, que parte do repouso em $t = 0$, desce com aceleração escalar constante e igual a 4 m/s². Não há deslizamento entre as polias. Calcule a velocidade angular da polia **C** num instante genérico **t**.

Tópico 5

Vetores e cinemática vetorial

Bloco 1

1. Grandezas escalares e vetoriais

Vivemos cercados de grandezas físicas.

O despertador toca estridente; são 6 h da manhã. O **tempo** é mesmo implacável, mas começou um novo dia e é hora de estudar. Em um gesto decidido, você deixa a cama, dirige-se para o banheiro e acende a luz. Uma lâmpada de **potência** excessiva brilha forte no teto chegando quase a ofuscar. Ora, isso não está de acordo com a proposta da família, que é de economizar **energia**. Todos estão dizendo que o valor cobrado na conta de luz tem andado pelas alturas...

Você abre a torneira da pia para iniciar sua higiene matinal e começa a escovar os dentes. Nota então que a água jorra em grande **vazão**, o que exige uma consciente intervenção. Afinal, há também que se economizar água! Em razão da **força** aplicada por uma rajada de vento, uma porta bate violentamente, quebrando o silêncio próprio da hora. Você se vê refletido no espelho de grande **área** embaçado pelo vapor ascendente vindo da água quente do chuveiro já aberto...

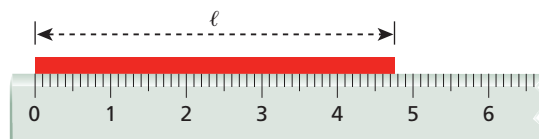
No rápido café da manhã, um bom pedaço de pão compõe com o leite escurecido pela grande **massa** de chocolate em pó a primeira refeição. Descendo no elevador do prédio, você lê uma vez mais aquela pequena placa que adverte sobre o **peso** máximo suportado pelo equipamento...

Já na calçada, você nota que o dia será quente, o que é confirmado pela **temperatura** indicada em um painel eletrônico: 24 °C. E eis que chega o esperado ônibus de sempre. O tráfego está intenso, o que impõe ao veículo um **deslocamento** lento pelas ruas do bairro. Visando realizar o percurso com a **velocidade média** prevista, o motorista aproveita para arrancar com grande **aceleração** nos trechos livres... Você está sentado e tem sobre as pernas sua mochila cheia de livros, cadernos e outros objetos, o que incomoda um pouco por exercer nas superfícies de apoio uma intensa **pressão**.

Ligeiramente atrasado, você finalmente chega ao colégio e percorre apressadamente o grande **comprimento** do corredor principal.

Essa rotina fictícia destaca as grandezas físicas tempo, potência, energia, vazão, força, área, massa, peso, temperatura, deslocamento, velocidade média, aceleração, pressão e comprimento, muito ligadas ao nosso dia a dia.

Em Física, há duas categorias de grandezas: as **escalares** e as **vetoriais**. As primeiras caracterizam-se apenas pelo valor numérico, acompanhado da unidade de medida. Já as segundas requerem um valor numérico (sem sinal), denominado **módulo** ou **intensidade**, acompanhado da respectiva unidade de medida e de uma orientação, isto é, uma **direção** e um **sentido**.

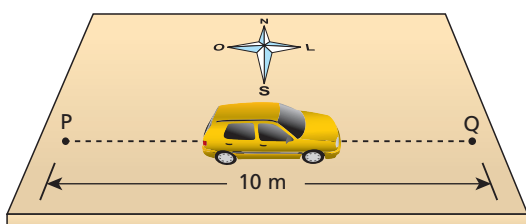
Na figura abaixo, o comprimento $\ell = 4{,}75$ cm medido por uma régua milimetrada é uma grandeza escalar, já que fica totalmente determinado pelo valor numérico (4,75) acompanhado da unidade de medida (cm).

O comprimento é uma grandeza escalar.

São também escalares as grandezas: área, massa, tempo, energia, potência, densidade, pressão, temperatura, carga elétrica e tensão elétrica, dentre outras.

Considere agora o caso hipotético de uma embarcação com o casco avariado, em repouso em alto-mar, que receba pelo rádio a recomendação de deslocar-se em linha reta 20 milhas a fim de chegar a um estaleiro onde será realizado o reparo necessário. Ora, há infinitas maneiras de se cumprir o deslocamento sugerido, isto é, a embarcação poderá navegar a partir de sua posição inicial em infinitas direções. O deslocamento proposto não está determinado! Eis que vem, então, uma informação complementar para que o barco navegue em linha reta 20 milhas na direção norte-sul. Mas isso ainda não é tudo! Deve-se dizer também se a embarcação deverá navegar para o norte ou para o sul, ou seja, em que sentido deverá ocorrer o deslocamento. De uma forma completa, dever-se-ia informar

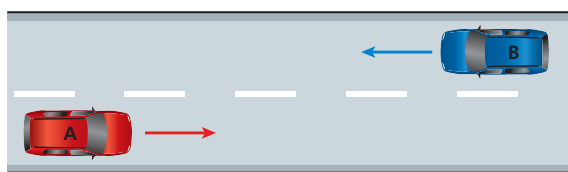
ao responsável pela embarcação que o deslocamento necessário para se atingir o estaleiro deve ter módulo de 20 milhas, direção norte-sul e sentido para o sul. Só dessa maneira a embarcação conseguiria chegar sem rodeios ao destino recomendado.

Veja com isso que a definição de um deslocamento não é tão simples como a de um comprimento. Definir plenamente um deslocamento requer um módulo, uma direção e um sentido, sendo essa grandeza física de natureza **vetorial**.

Observe, na figura abaixo, que o deslocamento sofrido pelo carro ao movimentar-se de **P** até **Q** é uma grandeza vetorial, caracterizada por um módulo (10 m), uma direção (leste-oeste) e um sentido (de oeste para leste).

O deslocamento é uma grandeza vetorial.

São também vetoriais as grandezas: velocidade, aceleração, força, impulso, quantidade de movimento (ou momento linear), vetor campo elétrico e vetor indução magnética, dentre outras.

Atenção: não confunda direção com sentido, pois são conceitos diferentes. Uma reta define uma direção. A essa direção podemos associar dois sentidos.

Na figura seguinte, os carros **A** e **B** percorrem uma mesma avenida retilínea e vão se cruzar. Suas velocidades têm a mesma direção, mas sentidos opostos.

Ricardo Azoury/Pulsar Imagens

A ponte Rio-Niterói, sobre a baía de Guanabara, é uma das maiores pontes marítimas do mundo, com aproximadamente 13 km de extensão. O trecho dessa ponte mostrado na fotografia tem uma direção de tráfego, porém dois sentidos de percurso, do Rio de Janeiro para Niterói e de Niterói para o Rio de Janeiro.

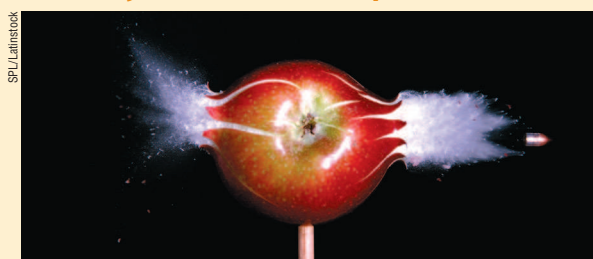
Ricardo Helou Doca

Fotografia mostrando uma placa em estrada.

Nas placas indicativas existentes em rodovias, o motorista obtém informações sobre direção e sentido a serem seguidos para chegar a um determinado destino. Essas informações se referem às grandezas vetoriais deslocamento e velocidade do veículo.

Até este capítulo, velocidade e aceleração foram tratadas com caráter escalar, isto é, não nos preocupamos com a natureza vetorial dessas grandezas, mas apenas com seus valores algébricos. Note que essa é uma simplificação conveniente e permitida quando as trajetórias são previamente conhecidas. Insistimos, entretanto, que ambas são grandezas vetoriais, cabendo-lhes, além do módulo ou intensidade, uma direção e um sentido.

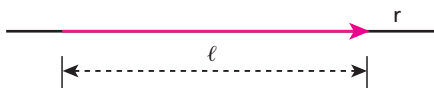
Projétil mais veloz que o som?

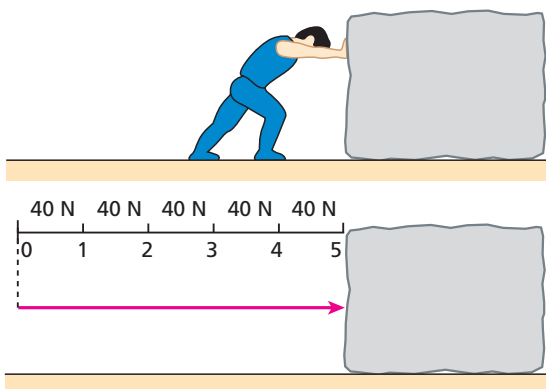
SPL/Latinstock

Nesta fotografia ultrarrápida, um projétil atravessa uma maçã. Sua velocidade tem módulo (intensidade) próximo de 600 m/s (valor supersônico), direção horizontal e sentido da esquerda para a direita.

A velocidade é uma **grandeza vetorial**, já que possui módulo, direção e sentido.

2. Vetor

Vetor é um ente matemático constituído de um módulo, uma direção e um sentido, utilizado em Física para representar as grandezas vetoriais.

Um vetor pode ser esboçado graficamente por um segmento de reta orientado (seta), como mostra a figura a seguir.

O comprimento ℓ do segmento orientado está associado ao módulo do vetor, a reta suporte **r** fornece a direção, e a orientação (ponta aguçada do segmento) evidencia o sentido.

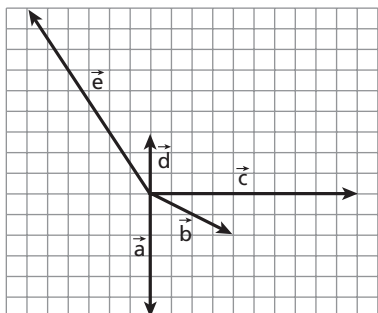
No exemplo das figuras a seguir, um homem está empurrando um bloco horizontalmente para a direita, aplicando sobre ele uma força de intensidade 200 N (N = newton, a unidade de força no SI).

A força de 200 N que o homem aplica no bloco (grandeza física vetorial) está representada pelo segmento de reta orientado, de comprimento 5,0 unidades, em que cada unidade de comprimento equivale a 40 N.

A notação de um vetor é feita geralmente se utilizando uma letra sobreposta por uma pequena seta, como, por exemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{V}$, $\vec{F}$.

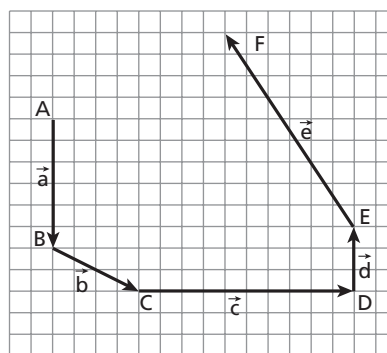
Outra notação também comum é obtida nomeando-se com letras maiúsculas as extremidades do segmento orientado que representa o vetor.

Nessa notação, faz-se sempre a letra que nomeia a ponta aguçada da seta menos a letra que nomeia a extremidade oposta (ou "origem"): $\vec{a} = B - A$.

3. Adição de vetores

Considere os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{e}$ representados abaixo.

Como podemos obter o vetor-soma (ou resultante) $\vec{s}$, dado por $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$?

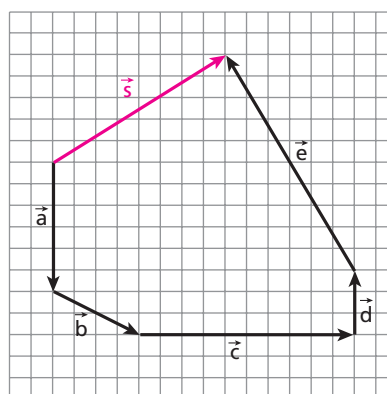
Para responder a essa questão, faremos outra figura associando sequencialmente os segmentos orientados — representativos dos vetores parcelas —, de modo que a "origem" de um coincida com a ponta aguçada do que lhe antecede. Na construção dessa figura, devemos preservar as características de cada vetor: módulo, direção e sentido.

De acordo com a figura a seguir, o que se obtém é uma linha segmentada, denominada **linha poligonal**.

Então, temos: $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - B$, $\vec{c} = D - C$, $\vec{d} = E - D$ e $\vec{e} = F - E$.

Logo:

$$\vec{s} = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + (F - E)$$

Assim: $\vec{s} = F - A$

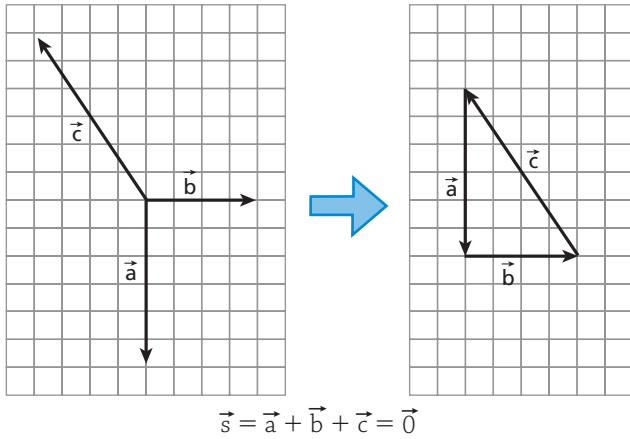
Na figura a seguir está ilustrado o vetor resultante $\vec{s}$. O segmento orientado que representa $\vec{s}$ **sempre fecha o polígono** e sua ponta aguçada coincide com a ponta aguçada do segmento orientado que representa o último vetor-parcela.

A esse método de adição de vetores damos o nome de **regra do polígono**.

Notas:

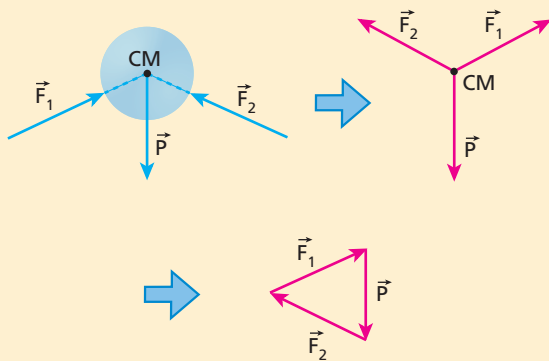
- Vale a **propriedade comutativa**, isto é, a ordem dos vetores parcelas não altera o vetor soma.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{b} + \vec{e} + \vec{d} + \vec{a} + \vec{c}$$

- Se a linha poligonal dos vetores parcelas for fechada, então o vetor soma será **nulo**, como ocorre no caso da soma dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ da figura abaixo.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

Garoto bom de bola!

Nesta fotografia, a bola está em equilíbrio sob a ação de três forças principais: seu peso, $\vec{P}$, a força de contato com a perna do garoto, $\vec{F}_1$, e a força de contato com os dedos de seu pé, $\vec{F}_2$. Estando a bola em repouso (equilíbrio estático), a resultante de $\vec{P}$, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ é nula e, para que isso ocorra, a linha poligonal constituída por essas três forças deve ser fechada.

Nas figuras a seguir você pode observar $\vec{P}$, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ alinhadas com o centro de massa, (CM), da bola, e a linha poligonal constituída por essas três forças.

4. Adição de dois vetores

Considere os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados na figura 1. Admitamos que seus segmentos orientados representativos tenham "origens" coincidentes no ponto 0 e que o ângulo formado entre eles seja θ.

Na figura 2 está feita a adição $\vec{a} + \vec{b}$ pela regra do polígono:

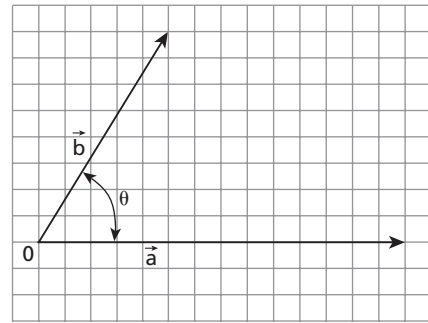



Figura 1

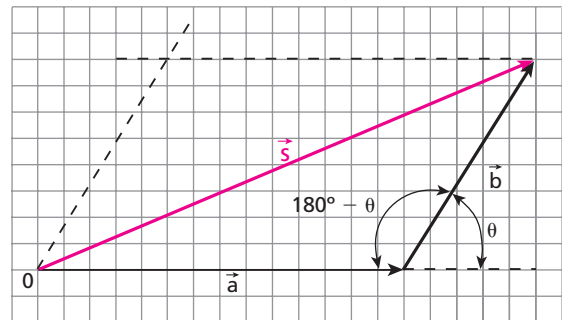



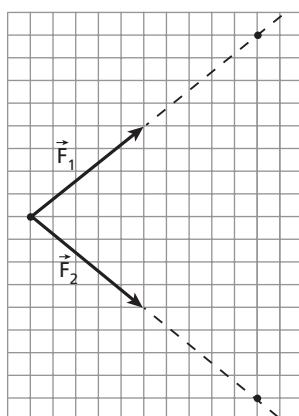
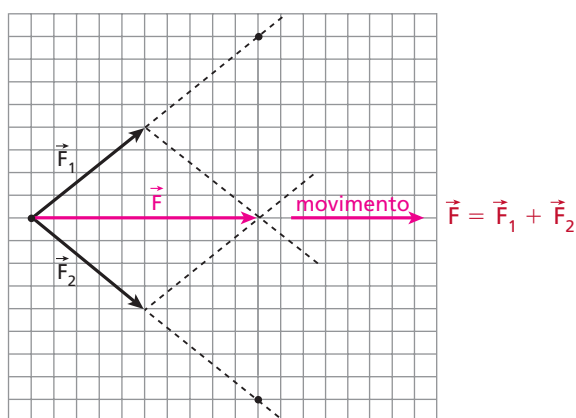
Figura 2

Observe que o segmento orientado representativo do vetor resultante $\vec{s}$ nada mais é que a **diagonal do paralelogramo** formado ao traçarmos linhas paralelas aos vetores.

Assim, dados dois vetores, é sempre possível obter graficamente o vetor-soma (resultante) pela **regra do paralelogramo**: fazemos que os segmentos orientados representativos dos vetores tenham "origens" coincidentes; da ponta aguçada do segmento orientado que representa um dos vetores, traçamos uma paralela ao segmento orientado que representa o outro vetor e vice-versa; o segmento orientado representativo do vetor resultante está na diagonal do paralelogramo obtido.

Garoto lançando uma bolinha de gude.

Na situação mostrada na fotografia, o garoto lança uma bolinha de gude sobre uma mesa horizontal, utilizando um elástico tracionado preso em dois pregos fixos.

No ato do lançamento, a bolinha recebe do elástico as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, representadas na figura abaixo.

O movimento ocorrerá na direção e no sentido da força $\vec{F}$, resultante de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, obtida na figura a seguir pela regra do paralelogramo:

Retornando agora à figura 2 na página 99, em que aparece a soma $\vec{a} + \vec{b}$ dada pela regra do paralelogramo, nota-se que o módulo do vetor-soma (resultante) $\vec{s}$ pode ser obtido aplicando-se uma importante relação matemática denominada **Lei dos cossenos** ao triângulo formado pelos segmentos orientados representativos de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{s}$.

Sendo **a** o módulo de $\vec{a}$, **b** o módulo de $\vec{b}$ e **s** o módulo de $\vec{s}$, temos:

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180° - \theta)$$

Mas:

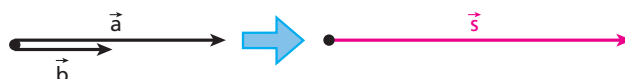
$$\cos (180° - \theta) = -\cos \theta$$

Assim:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

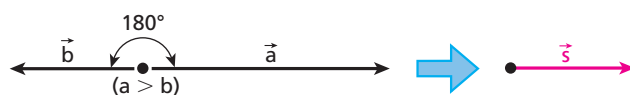
Casos particulares

I. $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido.

Neste caso, $\theta = 0°$; então, $\cos \theta = 1$.

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \Rightarrow \quad s^2 = (a + b)^2$$

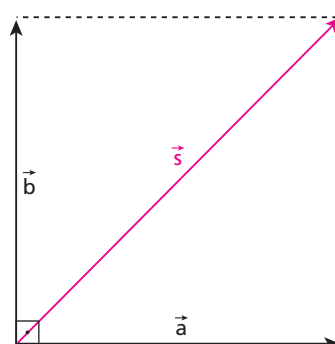
$$s = a + b$$

II. $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção e sentidos opostos.

Neste caso, $\theta = 180°$; então, $\cos \theta = -1$.

$$s^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad \Rightarrow \quad s^2 = (a - b)^2$$

$$s = a - b$$

III. $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares entre si.

Neste caso, $\theta = 90°$; então, $\cos \theta = 0$.

$$s^2 = a^2 + b^2$$

(Teorema de Pitágoras)

Exercícios — nível 1

1. A respeito das grandezas físicas escalares e vetoriais, analise as proposições a seguir:

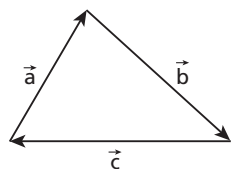
(01) As escalares ficam perfeitamente definidas, mediante um valor numérico acompanhado da respectiva unidade de medida.

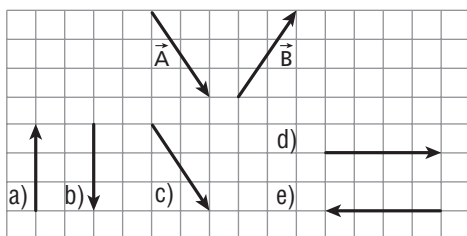
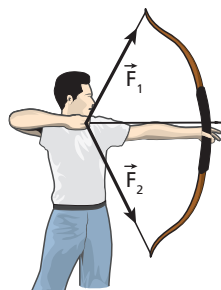
(02) As vetoriais, além de exigirem na sua definição um valor numérico, denominado módulo ou intensidade, acompanhado da respectiva unidade de medida, requerem, ainda, uma direção e um sentido.

(04) Comprimento, área, volume, tempo e massa são grandezas escalares.

(08) Deslocamento, velocidade, aceleração e força são grandezas vetoriais.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

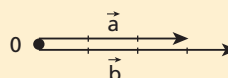
2. Na figura, temos três vetores coplanares formando uma linha poligonal fechada. A respeito, vale a relação:

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.
b) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
d) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.
e) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

3. Dados os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, a melhor representação para o vetor $\vec{A} + \vec{B}$ é:

4. Numa competição de arco e flecha, o que faz a flecha atingir altas velocidades é a ação da força resultante $\vec{R}$, obtida por meio da soma vetorial entre as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ exercidas pelo fio impulsor. A figura que melhor representa a resultante $\vec{R}$ é:

a) $\vec{R}$ (vertical, para baixo)
b) $\vec{R}$ (horizontal, para a direita)
c) $\vec{R}$ (inclinado, para baixo)
d) $\vec{R}$ (vertical, para cima)
e) $\vec{R}$ (inclinado, para cima)

5. E.R. Num plano α, temos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de mesma origem formando um ângulo θ. Se os módulos de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$ são, respectivamente, iguais a 3 u e 4 u, determine o módulo do vetor soma em cada um dos casos seguintes:

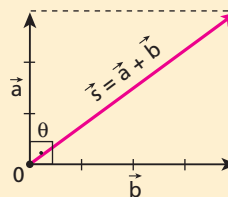
a) θ = 0°;
b) θ = 90°;
c) θ = 180°;
d) θ = 60°.

Resolução:

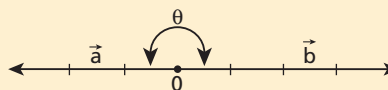
a) Se o ângulo formado pelos vetores é 0°, eles possuem a mesma direção e o mesmo sentido:

Sendo **s** o módulo do vetor soma, temos:

$$s = a + b \Rightarrow s = 3 + 4$$

$$\boxed{s = 7\ u}$$

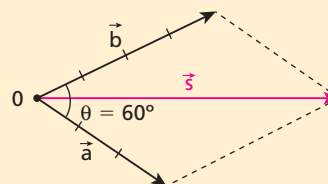
b) Se θ = 90°, podemos calcular o módulo **s** do vetor soma aplicando o **Teorema de Pitágoras**:

$$s^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow s^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\boxed{s = 5\ u}$$

c) Se o ângulo formado pelos vetores é 180°, eles possuem a mesma direção e sentidos opostos:

O módulo **s** do vetor soma fica determinado por:

$$s = b - a \Rightarrow s = 4 - 3$$

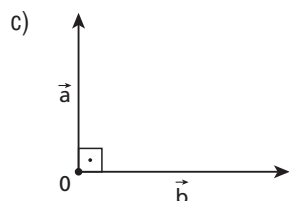
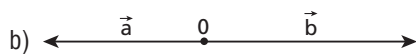
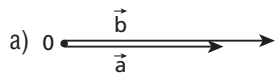
$$\boxed{s = 1\ u}$$

d) Para θ = 60°, aplicando a **Lei dos cossenos**, obtemos:

$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

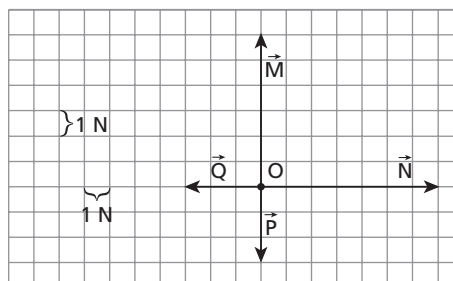
$$s^2 = 3^2 + 4^2 + 2(3)(4) \cos 60°$$

$$s^2 = 9 + 16 + 24 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow s^2 = 37$$

$$\boxed{s \cong 6\ u}$$

6. Determine o módulo do vetor soma de $\vec{a}$ ($a = 60$ u) com $\vec{b}$ ($b = 80$ u) em cada caso:

7. Considere dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de módulos respectivamente iguais a 10 unidades e 15 unidades. Qual o intervalo de valores admissíveis para o módulo do vetor $\vec{s}$, soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$?

8. Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, de mesma origem, formam entre si um ângulo $\theta = 60°$. Se os módulos desses vetores são $a = 7$ u e $b = 8$ u, qual o módulo do vetor soma?

9. (UFRN) Qual é o módulo da resultante das forças coplanares $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$ e $\vec{Q}$ aplicadas ao ponto **O**, como se mostra na figura abaixo?

Exercícios nível 2

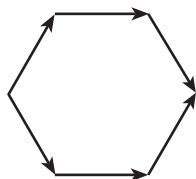
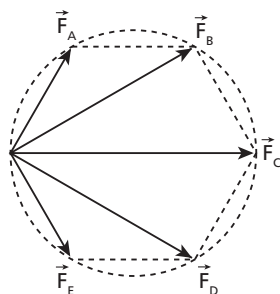
10. Considere as grandezas físicas relacionadas a seguir, acompanhadas de um código numérico:

Energia (1) — Aceleração (5)
Massa (2) — Deslocamento (6)
Força (3) — Tempo (7)
Densidade (4) — Velocidade (8)

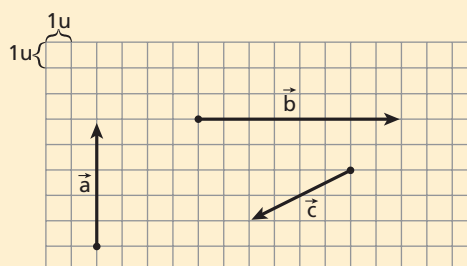
Escrevendo em ordem crescente os códigos associados às **grandezas escalares** e os códigos associados às **grandezas vetoriais**, obtemos dois números com quatro algarismos cada um. Determine:

a) o número correspondente às **grandezas escalares**;
b) o número correspondente às **grandezas vetoriais**.

11. (Mack-SP) Com seis vetores de módulos iguais a 8 u, construiu-se o hexágono regular ao lado. O módulo do vetor resultante desses seis vetores é:

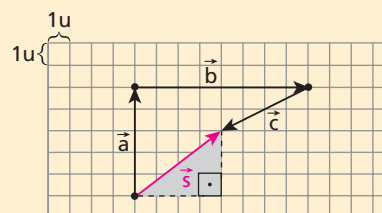
a) zero.
b) 16 u.
c) 24 u.
d) 32 u.
e) 40 u.

12. (Mack-SP) A figura mostra 5 forças representadas por vetores de origem comum, dirigindo-se aos vértices de um hexágono regular.

Sendo 10 N o módulo da força $\vec{F}_C$, a intensidade da resultante dessas 5 forças é:

a) 50 N.
b) 45 N.
c) 40 N.
d) 35 N.
e) 30 N.

13. E.R. No plano quadriculado a seguir, temos três vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$:

Qual é o módulo do vetor resultante da soma desses vetores?

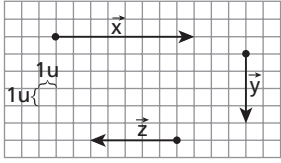
Resolução:

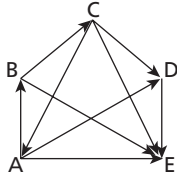
Inicialmente, devemos trasladar os vetores, de modo que a origem de um coincida com a extremidade do outro, tomando cuidado para manter as características (direção, sentido e módulo) de cada vetor sem alteração.

O vetor resultante é aquele que fecha a linha poligonal.

Observe que o vetor resultante é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 3 u e 4 u. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$s^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow s^2 = 9 + 16 \Rightarrow s^2 = 25$$

$$\boxed{s = 5\text{ u}}$$

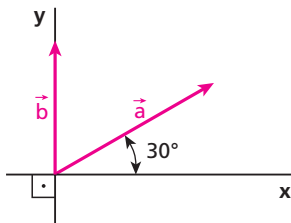
14. No plano quadriculado abaixo, estão representados três vetores: $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$.

Determine o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$.

15. (Mack-SP) O vetor resultante da soma de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{CA}$ é:

a) $\overrightarrow{AE}$. b) $\overrightarrow{AD}$. c) $\overrightarrow{CD}$. d) $\overrightarrow{CE}$. e) $\overrightarrow{BC}$.

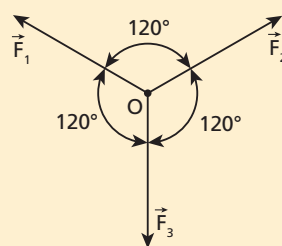
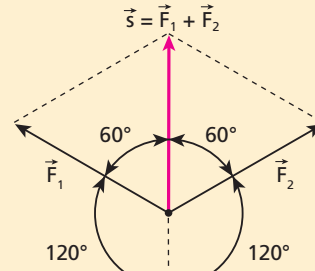
16. Considere duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ de intensidades respectivamente iguais a 18 N e 12 N, aplicadas em uma partícula **P**. A resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ **não poderá** ter intensidade igual a:
a) 30 N. b) 18 N. c) 12 N. d) 6,0 N. e) 3,0 N.

17. Suponha dois vetores de mesmo módulo **v**. A respeito da soma desses vetores, podemos afirmar que:
a) pode ter módulo $v\sqrt{10}$;
b) pode ter módulo **v**;
c) tem módulo 2v;
d) é nula;
e) tem módulo $v\sqrt{2}$.

18. (Faap-SP) A intensidade da resultante entre duas forças concorrentes, perpendiculares entre si, é de 75 N. Sendo a intensidade de uma das forças igual a 60 N, calcule a intensidade da outra.

19. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da figura ao lado têm módulos respectivamente iguais a 24 u e 21 u. Qual o módulo do vetor soma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$?
Dado:
sen 30° = cos 60° = 0,50

20. A soma de dois vetores perpendiculares entre si tem módulo igual a $\sqrt{20}$. Se o módulo de um deles é o dobro do módulo do outro, qual é o módulo do maior?

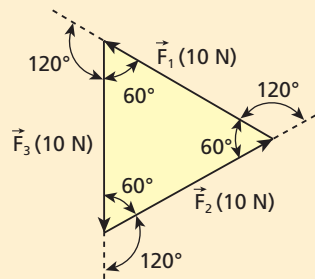
21. Duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ estão aplicadas sobre uma partícula, de modo que a força resultante é perpendicular a $\vec{F}_1$.
Se $|\vec{F}_1| = x$ e $|\vec{F}_2| = 2x$, qual o ângulo entre $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$?

22. E.R. Três forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, contidas em um mesmo plano, estão aplicadas em uma partícula **O**, conforme ilustra a figura. $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ têm módulos iguais a 10 N.
Qual deve ser o módulo de $\vec{F}_3$ para que a soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$:
a) tenha módulo nulo?
b) tenha módulo 5,0 N estando dirigida para baixo?

Resolução:
Inicialmente, vamos calcular o módulo da soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Aplicando a **Lei dos cossenos**, vem:

$$s^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 120°$$
$$s^2 = (10)^2 + (10)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$s^2 = (10)^2$$

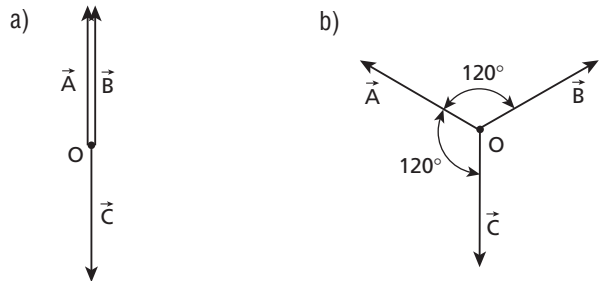
$$\boxed{s = 10 \text{ N}}$$

$\vec{F}_3$ tem a mesma direção de $\vec{s} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, porém sentido oposto, logo:
a) $F_3 - s = 0 \Rightarrow F_3 - 10 = 0$

$$\boxed{F_3 = 10 \text{ N}}$$

Nesse caso, a linha poligonal de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ forma um **triângulo equilátero**, conforme ilustra a figura a seguir:

b) $F_3 - s = 5{,}0 \Rightarrow F_3 - 10 = 5{,}0$

$$\boxed{F_3 = 15 \text{ N}}$$

23. Considere três vetores coplanares $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$, de módulos iguais a **x** e com origens coincidentes num ponto **O**. Calcule o módulo do vetor resultante da soma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ nos dois casos esquematizados abaixo:

Dado: $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

24. Três forças coplanares $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, de intensidades respectivamente iguais a 10 N, 15 N e 20 N, estão aplicadas em uma partícula. Essas forças podem ter suas direções modificadas de modo a alterar os ângulos entre elas. Determine para a resultante de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$:
a) a intensidade máxima;
b) a intensidade mínima.

5. Subtração de dois vetores

Considere os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados na figura abaixo. Admita que os segmentos orientados representativos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tenham "origens" coincidentes no ponto **0** e que o ângulo formado entre eles seja θ.

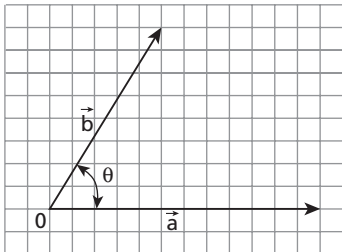



Figura 1

O vetor diferença entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ ($\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$) pode ser obtido pela soma do vetor $\vec{a}$ com o **oposto** de $\vec{b}$: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. O oposto do vetor $\vec{b}$, ou seja, o vetor $-\vec{b}$, tem mesmo módulo e mesma direção de $\vec{b}$, porém sentido contrário, o que será justificado na seção 7.

Graficamente, temos:

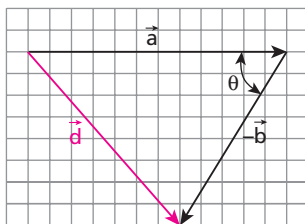
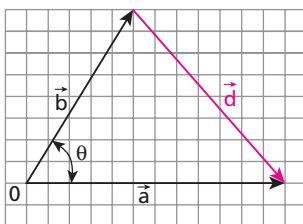



Figura 2

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

O vetor $\vec{d}$ fica então representado na figura 1 como aparece a seguir.

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

O módulo de $\vec{d}$ também fica determinado pela **Lei dos cossenos**.

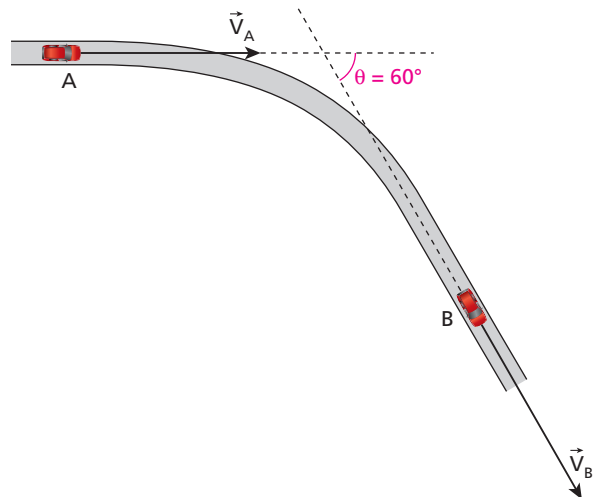
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

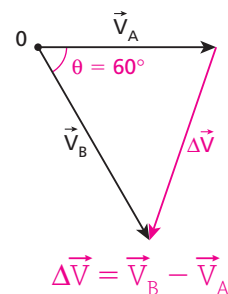
Variação de uma grandeza vetorial

A subtração de dois vetores tem caráter fundamental no estudo da Física.

A variação de uma grandeza vetorial qualquer ($\Delta\vec{G}$, por exemplo) é obtida subtraindo-se a grandeza inicial ($\vec{G}_i$) da grandeza final ($\vec{G}_f$).

$$\Delta\vec{G} = \vec{G}_f - \vec{G}_i$$

Na ilustração a seguir, vê-se de cima um carro que percorre uma curva passando pelo ponto **A** com velocidade $\vec{V}_A$ de intensidade 60 km/h e pelo ponto **B** com velocidade $\vec{V}_B$ de intensidade 80 km/h. Podemos concluir que a variação da velocidade escalar desse carro tem módulo igual a 20 km/h.

Determinemos agora as características da variação $\Delta\vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ da velocidade vetorial do veículo no percurso de **A** até **B**.

A direção e o sentido de $\Delta\vec{V}$ estão caracterizados na figura a seguir.

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

É interessante observar que $\Delta\vec{V}$ é dirigida para "dentro" da curva.

A intensidade de $\Delta\vec{V}$ é determinada pela **Lei dos cossenos:**

$$\Delta V^2 = V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B \cos\theta$$

$$\Delta V^2 = (60)^2 + (80)^2 - 2 \cdot 60 \cdot 80 \cos 60^\circ$$

$$\Delta V^2 = 3600 + 6400 - 2 \cdot 4800 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Delta V^2 = 5200 \Rightarrow \Delta V \cong 72 \text{ km/h}$$

Observe que, nesse exemplo, a intensidade da variação da velocidade vetorial (72 km/h) é diferente do módulo da variação da velocidade escalar (20 km/h).

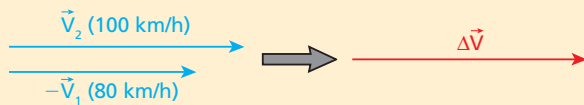
Tom Dee Ann McCarthy/CORBIS/Latinstock

Admita que, no caso dessa fotografia, o tenista receba a bola com velocidade horizontal $\vec{V}_1$ de intensidade de 80 km/h dirigida para a esquerda e realize um vigoroso voleio, devolvendo a bola também na horizontal com velocidade $\vec{V}_2$ de intensidade de 100 km/h dirigida para a direita. A variação da velocidade vetorial da bola, $\Delta\vec{V}$, fica determinada por:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{V} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$$

$\vec{V}_2$ (100 km/h)

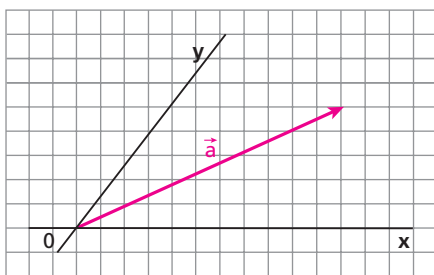
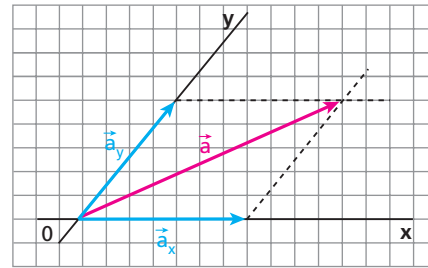
$-\vec{V}_1$ (80 km/h)

$\Delta\vec{V}$

A intensidade de $\Delta\vec{V}$ é obtida com:

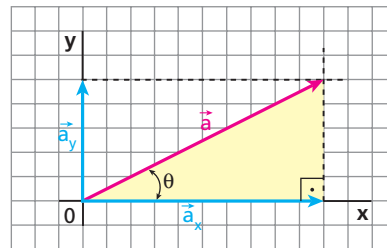
$\Delta V = (100 + 80)$ km/h

$$\boxed{\Delta V = 180 \text{ km/h}}$$

6. Decomposição de um vetor

Considere o vetor $\vec{a}$, representado na figura abaixo, e as retas **x** e **y** que se interceptam no ponto **0**, "origem" de $\vec{a}$.

Conforme a regra do paralelogramo, podemos imaginar que o vetor $\vec{a}$ é o resultante da soma de dois vetores $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$, contidos, respectivamente, nas retas **x** e **y**:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Os vetores $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$ são, portanto, componentes do vetor $\vec{a}$ nas direções **x** e **y**.

Incita especial interesse, entretanto, o caso particular das componentes do vetor $\vec{a}$ contidas em duas retas **x** e **y** perpendiculares entre si.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Levando em conta a regra do paralelogramo, teremos as componentes $\vec{a}_x$ e a_y, representadas na figura acima.

Observando o triângulo retângulo destacado na figura e sendo a_x o módulo de $\vec{a}_x$, a_y o módulo de $\vec{a}_y$, **a** o módulo de $\vec{a}$ e θ o ângulo formado entre $\vec{a}$ e a reta **x**, são aplicáveis as seguintes relações métricas e trigonométricas:

$$\cos\theta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a_x}{a}$$

Da qual: $a_x = a \cos\theta$

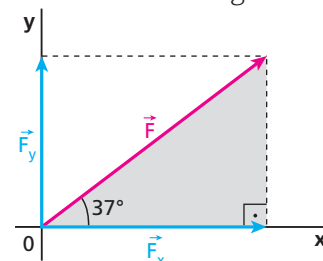
$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a_y}{a}$$

Da qual: $a_y = a\ \text{sen}\ \theta$

Teorema de Pitágoras: $a^2 = a_x^2 + a_y^2$

Exemplo:

Nesta situação, estão calculadas as intensidades das componentes $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$ da força $\vec{F}$ representada na figura:

Consideremos os seguintes dados:

$F = 20$ N

sen 37° = 0,60

cos 37° = 0,80

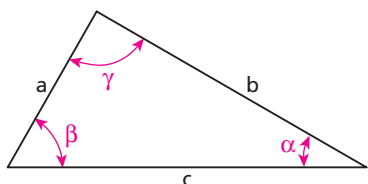
$$F_x = F \cos 37° \Rightarrow F_x = 20 \cdot 0{,}80 \text{ (N)}$$

$$\boxed{F_x = 16 \text{ N}}$$

$$F_y = F \text{ sen } 37° \Rightarrow F_y = 20 \cdot 0{,}60 \text{ (N)}$$

$$\boxed{F_y = 12 \text{ N}}$$

Por outro lado, a **Lei dos senos**, que estabelece a proporcionalidade entre a medida do lado de um triângulo qualquer e o seno do ângulo oposto a ele, pode ser muito útil no estudo dos vetores.

Considere, por exemplo, o triângulo abaixo, cujos lados têm comprimentos **a**, **b** e **c**. Sejam α, β e γ os ângulos internos desse triângulo opostos, respectivamente, aos lados de medidas **a**, **b** e **c**.

A Lei dos senos estabelece que:

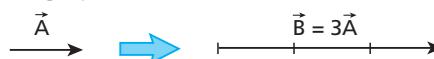
$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

7. Multiplicação de um número real por um vetor

O produto de um número real **n**, não nulo, por um vetor $\vec{A}$ é um vetor $\vec{B}$, tal que seu módulo é dado pelo produto do módulo de **n** pelo módulo de $\vec{A}$, ou seja, $|\vec{B}| = |n| \; |\vec{A}|$. Sua direção é a mesma de $\vec{A}$; seu sentido, no entanto, é o mesmo de $\vec{A}$ se **n** for positivo, mas oposto ao de $\vec{A}$ se **n** for negativo.

Exemplo 1:

Admitamos, por exemplo, $n = 3$. Sendo $\vec{A}$ o vetor representado na figura, determinamos o vetor $\vec{B} = n\vec{A} = 3\vec{A}$:

$\vec{A}$ → $\vec{B} = 3\vec{A}$

Exemplo 2:

Consideremos $n = -\frac{1}{2}$. Sendo $\vec{C}$ o vetor representado na figura, determinamos o vetor $\vec{D} = n\vec{C} = -\frac{1}{2}\vec{C}$:

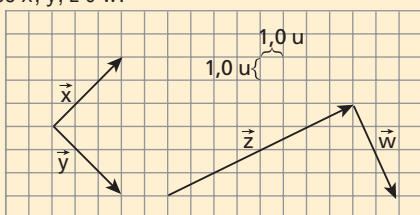
$\vec{C}$ → $\vec{D} = -\frac{1}{2}\vec{C}$

Exemplo 3:

Façamos $n = -1$. Sendo $\vec{E}$ o vetor representado na figura, determinamos o vetor $\vec{F} = n\,\vec{E} = -\vec{E}$ chamado vetor oposto de $\vec{E}$:

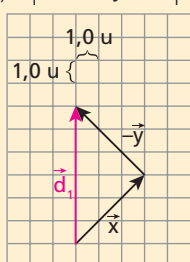
Exercícios

nível 1

25. E.R. No plano quadriculado abaixo, estão representados os vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ e $\vec{w}$.

Determine o módulo dos vetores:

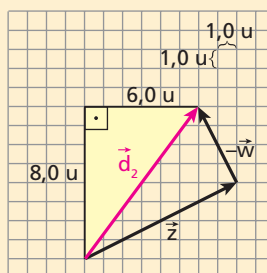
a) $\vec{d_1} = \vec{x} - \vec{y}$ b) $\vec{d_2} = \vec{z} - \vec{w}$

Resolução:

a) $\vec{d_1} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \vec{d_1} = \vec{x} + (-\vec{y})$

Observando a figura, concluímos que:

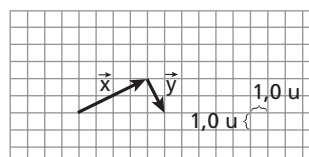
$$\boxed{|\vec{d_1}| = 6{,}0 \text{ u}}$$

b) $\vec{d_2} = \vec{z} - \vec{w} \Rightarrow \vec{d_2} = \vec{z} + (-\vec{w})$

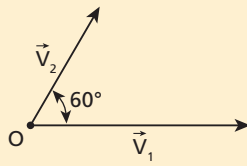
O módulo de $\vec{d_2}$ fica determinado aplicando-se o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo retângulo destacado na figura:

$$|\vec{d_2}|^2 = (8{,}0)^2 + (6{,}0)^2$$

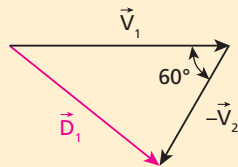
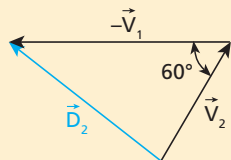
$$\boxed{|\vec{d_2}| = 10 \text{ u}}$$

26. No plano quadriculado abaixo, estão representados dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. O módulo do vetor diferença $\vec{x} - \vec{y}$ vale:

a) 1 u.
b) 2 u.
c) 3 u.
d) 4 u.
e) 5 u.

27. E.R. Dados os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, representados na figura, com $V_1 = 16$ u e $V_2 = 10$ u, pede-se:

a) representar os vetores $\vec{D}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ e $\vec{D}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$;

b) calcular os módulos de $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$.

Resolução:

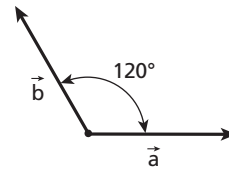
a) $\vec{D}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$

$\vec{D}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow \vec{D}_2 = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$

O vetor $\vec{D}_2$ é o **vetor oposto** de $\vec{D}_1$, isto é, $\vec{D}_2$ e $\vec{D}_1$ têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários.

b) Sendo **D** o módulo de $\vec{D}_1$ ou de $\vec{D}_2$, aplicando a **Lei dos cossenos**, vem:

$$D^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos 60°$$

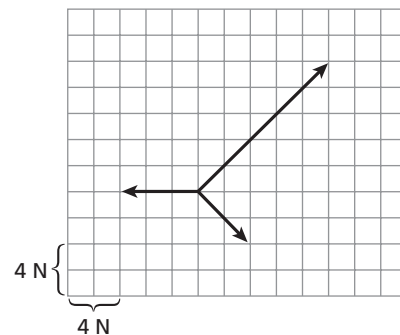
$$D^2 = (16)^2 + (10)^2 - 2(16)(10)\frac{1}{2}$$

$$\boxed{D = 14 \text{ u}}$$

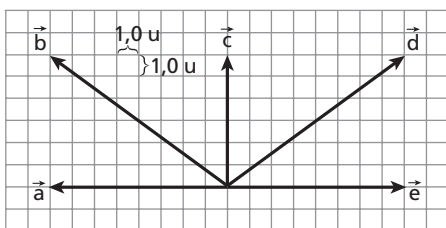
28. Observe os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados abaixo. Considerando a = 7,0 u e b = 8,0 u, pede-se:

a) represente os vetores $\vec{D}_1 = \vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{D}_2 = \vec{b} - \vec{a}$;

b) calcule os módulos de $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$.

(**Dado**: $\cos 120° = -\frac{1}{2}$)

29. Na figura, estão representadas três forças que agem em um ponto material. Levando em conta a escala indicada, determine a intensidade da resultante dessas três forças.

a) 5 N
b) 10 N
c) 15 N
d) 20 N
e) 25 N

Exercícios nível 2

30. No plano quadriculado abaixo, estão representados cinco vetores: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ e $\vec{e}$.

Aponte a alternativa **incorreta**:

a) $\vec{a} = -\vec{e}$
b) $\vec{c} - \vec{a} = \vec{d}$
c) $\vec{c} - \vec{e} = \vec{b}$
d) $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{e}$
e) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{e} + \vec{c}$

31. Considere duas forças $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ com intensidades respectivamente iguais a 12 N e 5,0 N. Calcule a intensidade das forças $\vec{S} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$ e $\vec{D} = \vec{F}_A - \vec{F}_B$ nos seguintes casos:

a) $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ têm mesma direção e sentidos opostos;

b) $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ são perpendiculares.

32. (Ufop-MG) Os módulos de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são $|\vec{F}_1| = 3$ e $|\vec{F}_2| = 5$, expressos em **newtons**. Então, é sempre verdade que:

I. $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = 2$.
II. $2 \leqslant |\vec{F}_1 - \vec{F}_2| \leqslant 8$.
III. $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 8$.
IV. $2 \leqslant |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \leqslant 8$.

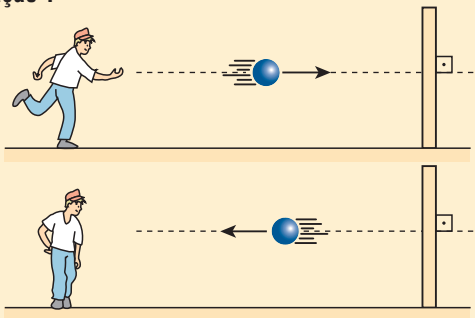
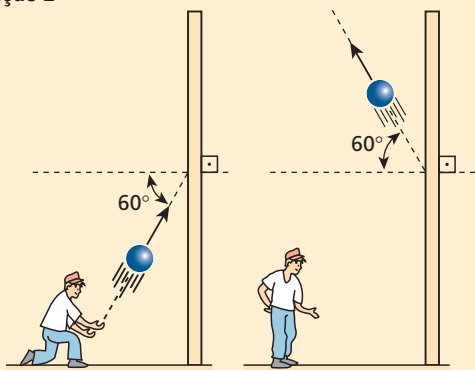
Indique a alternativa **correta**:

a) Apenas I e III são verdadeiras.
b) Apenas II e IV são verdadeiras.
c) Apenas II e III são verdadeiras.
d) Apenas I e IV são verdadeiras.
e) Nenhuma sentença é sempre verdadeira.

33. E.R. Nas duas situações esquematizadas a seguir, o garoto lança uma bola de borracha contra uma parede vertical fixa. Admita que as colisões sejam perfeitamente elásticas, isto é, que a bola conserve o módulo de sua velocidade vetorial igual a **v**.

Na **situação 1**, a bola vai e volta pela mesma reta horizontal.

Na **situação 2**, a bola incide sob um ângulo de 60° em relação à reta normal à parede no ponto de impacto, sendo refletida sob um ângulo também de 60° em relação à mesma reta.

TF1-096-132_5P_P1T5.indd 107 16/08/12 17:10

Situação 1

Situação 2

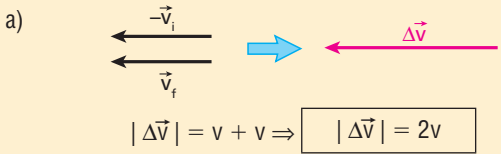
Calcule o módulo da variação da velocidade vetorial da bola:
a) na situação 1; b) na situação 2.

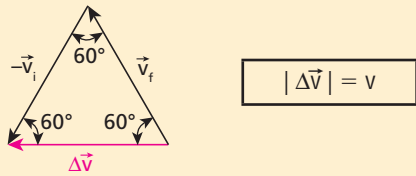
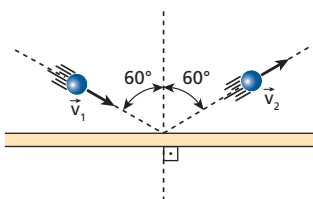
Resolução:

Em ambos os casos, a variação da velocidade vetorial da bola ($\Delta\vec{v}$) fica determinada pela diferença entre a velocidade final ($\vec{v}_f$) e a velocidade inicial ($\vec{v}_i$).

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{v}_f + (-\vec{v}_i)$$

a)

$$|\Delta\vec{v}| = v + v \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = 2v$$

b) O triângulo formado pelos vetores $\vec{v}_f$, $-\vec{v}_i$ e $\Delta\vec{v}$ é **equilátero** e, por isso, esses três vetores têm **módulos iguais**.

$$|\Delta\vec{v}| = v$$

34. Na figura, estão representadas as velocidades vetoriais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ de uma bola de sinuca, imediatamente antes e imediatamente depois de uma colisão contra uma das bordas da mesa.

Sabendo que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ têm intensidades iguais a **v**, aponte a alternativa que melhor caracteriza a intensidade, a direção e o sentido da variação da velocidade vetorial da bola no ato da colisão:

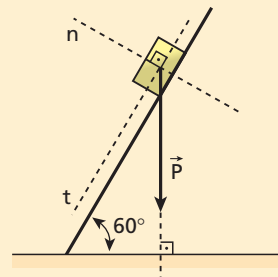
a) ↑ v

b) ↓ v

c) 60°, 2 v

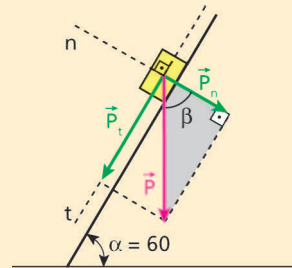
d) 60°, 2 v

e) Vetor nulo.

35. E.R. O peso de um corpo é uma força vertical, dirigida para baixo. Na figura, está representado um bloco de peso $\vec{P}$, apoiado em um plano inclinado de 60° em relação à horizontal.

Sabendo que a intensidade de $\vec{P}$ é igual a 20,0 newtons, calcule a intensidade das componentes de $\vec{P}$ segundo as retas **t** e **n**, respectivamente, tangente e normal ao plano inclinado no local em que se encontra o bloco. Adote: sen 60° ≅ 0,87 e cos 60° = 0,50.

Resolução:

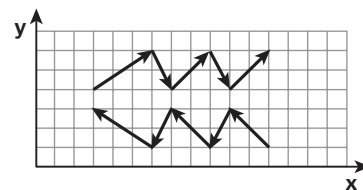
Na figura ao lado, estão representadas as componentes de $\vec{P}$ segundo as setas **t** e **n**, respectivamente, $\vec{P}_t$ (componente tangencial) e $\vec{P}_n$ (componente normal).

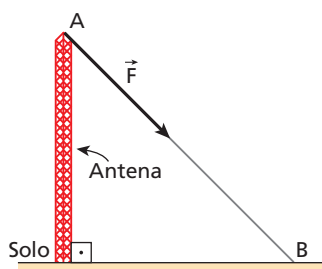
É importante observar que, no triângulo retângulo destacado, temos $\beta = \alpha = 60°$ (ângulos de lados perpendiculares têm medidas iguais).

$$P_t = P \text{ sen } \beta \Rightarrow P_t = 20{,}0 \cdot 0{,}87 \text{ (N)}$$

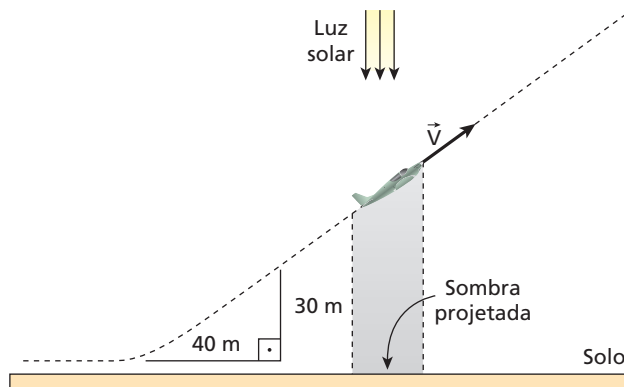
$$P_t = 17{,}4 \text{ N}$$

$$P_n = P \cos \beta \Rightarrow P_n = 20{,}0 \cdot 0{,}50 \text{ (N)}$$

$$P_n = 10{,}0 \text{ N}$$

36. (UFC-CE) Na figura abaixo, em que o reticulado forma quadrados de lado L = 0,50 cm, estão desenhados dez vetores, contidos no plano xy. O módulo da soma de todos esses vetores é, em centímetros:

a) 0,0. b) 0,50. c) 1,0. d) 1,5. e) 2,0.

37. Uma antena transmissora de TV, de comprimento igual a 32 m, é mantida em equilíbrio na posição vertical devido a um sistema de cabos de aço que conectam sua extremidade superior ao solo horizontal. Na figura, está representado apenas o cabo AB, de comprimento igual a 40 m.

Sabendo que a força $\vec{F}$ que o cabo AB exerce sobre a antena tem intensidade igual a $2{,}0 \cdot 10^3$ N, determine a intensidade das componentes horizontal e vertical de $\vec{F}$.

38. Objetivando a decolagem, um avião realiza a corrida na pista, alçando voo com velocidade $\vec{V}$, de intensidade 360 km/h, que é mantida constante ao longo de uma trajetória retilínea e ascendente, como esquematizado a seguir. O Sol está a pino, e a sombra do avião é projetada sobre o solo plano e horizontal.

Determine:

a) a intensidade da velocidade com que a sombra do avião percorre o solo;

b) o intervalo de tempo gasto pelo avião para atingir a altura de 480 m;

c) a distância percorrida pelo avião desde o instante em que alça vôo até o instante em que atinge a altura de 480 m.

Bloco 3

8. Deslocamento vetorial

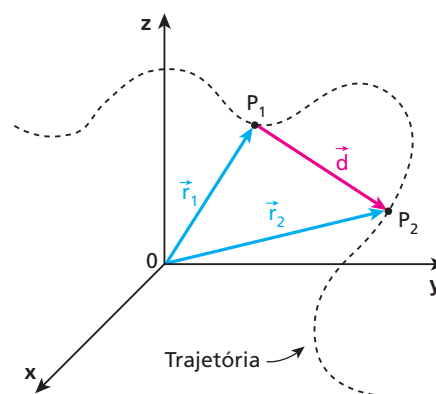
Uma compreensão mais consistente da Mecânica passa pela assimilação conceitual das grandezas físicas vetoriais que definiremos a seguir.

É importante destacar inicialmente, porém, que muito do que apresentaremos nesse ponto do presente capítulo está fundamentado no pensamento do filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650), que é considerado um dos intelectuais mais influentes do pensamento ocidental.

René Descartes: "Penso, logo existo". Pintura de Frans Hals, c. 1640. Museu do Louvre.

Como filósofo, Descartes foi o fundador do movimento chamado Racionalismo, que se baseou na valorização da dúvida, isto é, na busca das verdades essenciais por meio do questionamento: "Nenhum objeto do pensamento resiste à dúvida, mas o próprio ato de duvidar é indubitável". Ele criou um método dedutivo que obedecia a uma sequência lógica: evidência, análise, síntese e enumeração. Uma das citações de Descartes, feita originalmente em latim — *Cogito, ergo sum* —, tornou-se célebre: "Penso, logo existo".

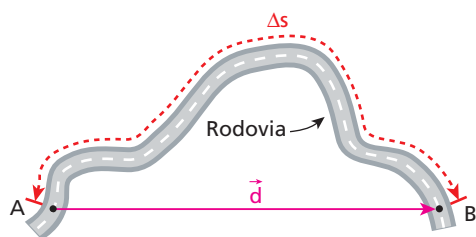
No campo da Matemática, criou a Geometria Analítica, que funde Geometria e Álgebra, tendo como elemento de sustentação um sistema de coordenadas chamado cartesiano.

Considere uma partícula em movimento com relação a um referencial cartesiano 0xyz. Na figura a seguir estão indicadas a trajetória descrita pela partícula, bem como as posições P_1 e P_2 ocupadas por ela, respectivamente, nos instantes t_1 e t_2. Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores-posição correspondentes a P_1 e P_2. Os vetores-posição "apontam" a posição da partícula em cada ponto da trajetória. Sua "origem" está sempre na origem 0 do referencial e sua extremidade (ou ponta) aguçada coincide com o ponto em que a partícula se encontra no instante considerado.

Definimos o deslocamento vetorial ($\vec{d}$) no percurso de P_1 a P_2 por meio da subtração vetorial:

$$\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

O deslocamento vetorial sempre conecta duas posições na trajetória. Sua "origem" coincide com o ponto de partida da partícula e sua extremidade (ou ponta) aguçada, com o ponto de chegada.

Na situação esquematizada na figura a seguir, um carro parte do ponto **A** e percorre a rodovia até atingir o ponto **B**. Nessa figura estão indicados o deslocamento vetorial $\vec{d}$ e o deslocamento escalar Δs.

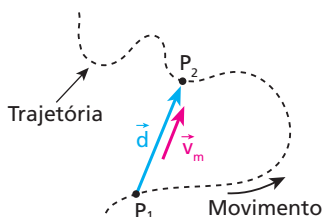
Observe que o módulo de $\vec{d}$ nunca excede o módulo de Δs.

$$|\vec{d}| \leq |\Delta s|$$

Ocorrerá o caso da igualdade $|\vec{d}| = |\Delta s|$ quando a trajetória for retilínea.

9. Velocidade vetorial média

É definida como o quociente do deslocamento vetorial $\vec{d}$ pelo respectivo intervalo de tempo Δt.

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Como Δt é um escalar positivo, a velocidade vetorial média tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento vetorial (ambos são secantes à trajetória), como representa a figura:

Vamos comparar agora o módulo da velocidade vetorial média com o módulo da velocidade escalar média.

Sabemos que:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \quad \text{e} \quad |v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

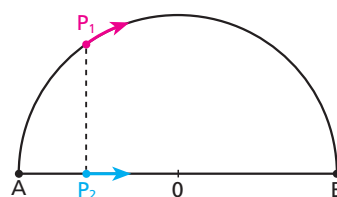
Lembrando que $|\vec{d}| \leq |\Delta s|$, podemos concluir que o módulo da velocidade vetorial média nunca excede o módulo da velocidade escalar média.

$$|\vec{v}_m| \leq |v_m|$$

Ocorrerá também o caso da igualdade $|\vec{v}_m| = |v_m|$ quando a trajetória for retilínea.

Exemplo:

No caso desta figura, uma partícula P_1 vai de **A** até **B** percorrendo a semicircunferência, enquanto outra partícula P_2 também vai de **A** até **B**, porém percorrendo o diâmetro que conecta esses dois pontos.

Supondo que as duas partículas se desloquem de **A** até **B** durante o **mesmo intervalo de tempo**, podemos concluir que:

I. os deslocamentos vetoriais são iguais: $\vec{d}_1 = \vec{d}_2$.

II. os deslocamentos escalares têm módulos diferentes: $|\Delta s_1| > |\Delta s_2|$.

III. $|\vec{d}_1| < |\Delta s_1|$; $|\vec{d}_2| = |\Delta s_2|$

IV. as velocidades vetoriais médias têm módulos iguais: $|\vec{v}_{m_1}| = |\vec{v}_{m_2}|$.

V. as velocidades escalares médias têm módulos diferentes: $|v_{m_1}| > |v_{m_2}|$.

VI. $|\vec{v}_{m_1}| < |v_{m_1}|$; $|\vec{v}_{m_2}| = |v_{m_2}|$.

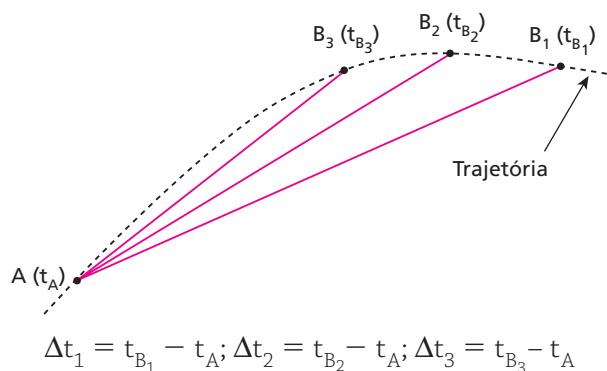
10. Velocidade vetorial (instantânea)

Frequentemente denominada apenas velocidade vetorial, a velocidade vetorial instantânea é dada matematicamente por:

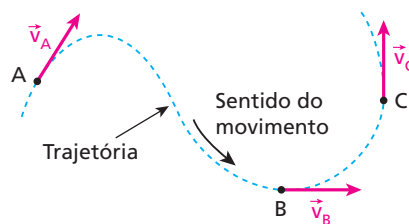
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m$$

Como vimos, a velocidade vetorial média é secante à trajetória, apresentando mesma direção e mesmo sentido do deslocamento vetorial no intervalo de tempo considerado.

A velocidade vetorial instantânea, entretanto, pelo fato de ser definida em intervalos de tempo tendentes a zero, é **tangente à trajetória** em cada ponto e **orientada no sentido do movimento**.

$$\Delta t_1 = t_{B_1} - t_A; \Delta t_2 = t_{B_2} - t_A; \Delta t_3 = t_{B_3} - t_A$$

$$\Delta t_3 < \Delta t_2 < \Delta t_1$$

Reduzindo-se a duração do intervalo de tempo, obtém-se no limite para Δt tendente a zero o ponto *B* praticamente coincidente com o ponto *A*. Com isso, no limite para Δt tendente a zero, a direção da velocidade vetorial média passa de secante a tangente à trajetória no ponto considerado.

Exemplo:

Nessa situação, uma partícula percorre de *A* para *C*, em movimento uniforme, a trajetória esquematizada. Estão representadas nos pontos *A*, *B* e *C* as velocidades vetoriais da partícula, todas tangentes à trajetória e orientadas no sentido do movimento.

Observe que, embora as três velocidades vetoriais representadas tenham módulos iguais (movimento uniforme), $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B \neq \vec{v}_C$. Isso ocorre porque os vetores representativos dessas velocidades têm direções diferentes.

Dois vetores ou mais são iguais somente quando têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

O módulo (intensidade) da velocidade vetorial instantânea é sempre igual ao módulo da velocidade escalar instantânea:

$$|\vec{v}| = |v|$$

Exercícios

nível 1

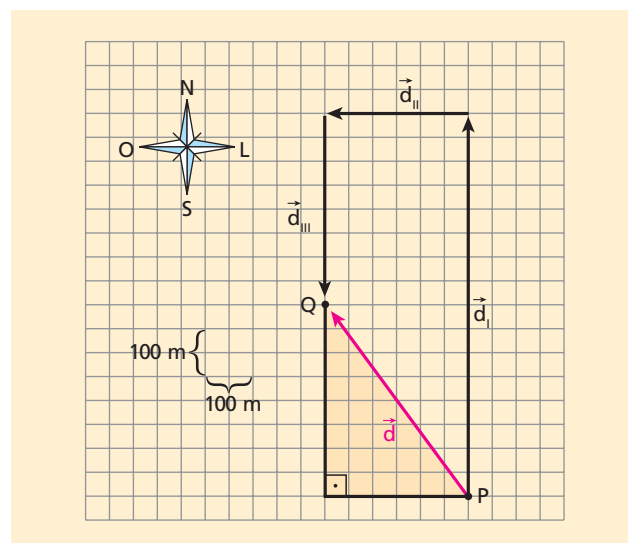
39. E.R. Um escoteiro, ao fazer um exercício de marcha com seu pelotão, parte de um ponto P e sofre a seguinte sequência de deslocamentos:

I. 800 m para o Norte;
II. 300 m para o Oeste;
III. 400 m para o Sul.

Sabendo que a duração da marcha é de 8 min 20 s e que o escoteiro atinge um ponto **Q**, determine:

a) o módulo do seu deslocamento vetorial de **P** a **Q**;
b) o módulo da velocidade vetorial média e da velocidade escalar média de **P** a **Q**. (Dê sua resposta em m/s.)

Resolução:

a) No esquema a seguir, estão representados os três deslocamentos parciais do escoteiro e também seu deslocamento total, de **P** até **Q**.

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo retângulo destacado, obtemos o módulo do deslocamento vetorial do escoteiro de **P** até **Q**.

$$|\vec{d}|^2 = (300)^2 + (400)^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{d}| = 500 \text{ m}}$$

b) O intervalo de tempo gasto pelo escoteiro de **P** até **Q** é $\Delta t = 8 \text{ min } 20 \text{ s} = 500 \text{ s}$. Logo:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{v}_m| = \frac{500 \text{ m}}{500 \text{ s}} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| = 1{,}0 \text{ m/s}}$$

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{|\vec{d}_I| + |\vec{d}_{II}| + |\vec{d}_{III}|}{\Delta t}$$

$$|v_m| = \frac{800 + 300 + 400}{500} \text{ (m/s)} \Rightarrow \boxed{|v_m| = 3{,}0 \text{ m/s}}$$

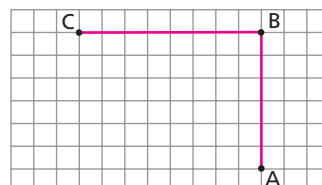
40. Três cidades **A**, **B** e **C**, situadas em uma região plana, ocupam os vértices de um triângulo equilátero de 60 km de lado. Um carro viaja de **A** para **C**, passando por **B**. Se o intervalo de tempo gasto no percurso total é de 1,0 h 12 min, determine, em km/h:

a) o valor absoluto da velocidade escalar média;

b) a intensidade da velocidade vetorial média.

41. Um carro percorreu a trajetória **ABC**, representada na figura, partindo do ponto **A** no instante $t_0 = 0$ e atingindo o ponto **C** no instante $t_1 = 20$ s. Considerando que cada quadradinho da figura tem lado igual a 10 m, determine:

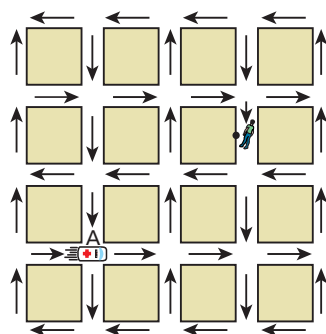
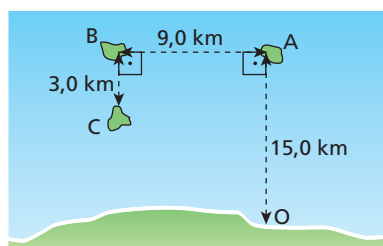
a) o módulo do deslocamento vetorial sofrido pelo carro de **A** até **C**;

b) o módulo das velocidades vetorial média e escalar média no intervalo de t_0 a t_1.

Exercícios

nível 2

42. (Unicamp-SP) A figura abaixo representa um mapa da cidade de Vectoria o qual indica o sentido das mãos do tráfego. Devido ao congestionamento, os veículos trafegam com a velocidade média de 18 km/h. Cada quadra dessa cidade mede 200 m por 200 m (do centro de uma rua ao centro da outra rua). Uma ambulância localizada em **A** precisa pegar um doente localizado bem no meio da quadra em **B**, sem andar na contramão.

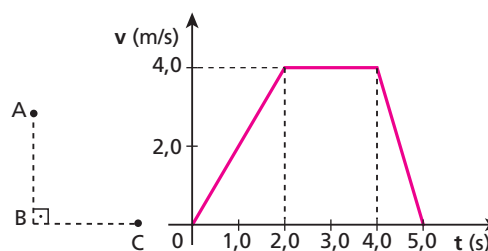
a) Qual é o menor intervalo de tempo gasto (em minutos) no percurso de **A** para **B**?

b) Qual é o módulo do vetor velocidade média (em km/h) entre os pontos **A** e **B**?

43. Uma embarcação carregada com suprimentos zarpa de um porto **O** na costa às 7 h para fazer entregas em três pequenas ilhas, **A**, **B** e **C**, posicionadas conforme representa o esquema.

A embarcação atraca na ilha **C** às 13 h do mesmo dia. Calcule para o percurso total de **O** até **C**:

a) a velocidade escalar média; b) a velocidade vetorial média.

44. Um navio navega 80 milhas de Sudoeste para Nordeste e, em seguida, 60 milhas de Sudeste para Noroeste. Sendo **X** a intensidade da velocidade vetorial média e **Y** o módulo da velocidade escalar média, esses dois valores referentes ao percurso total, é correto que:

a) $\frac{X}{Y} = \frac{3}{5}$ b) $\frac{X}{Y} = \frac{5}{7}$ c) $\frac{X}{Y} = \frac{4}{5}$ d) $\frac{X}{Y} = 1$ e) $\frac{X}{Y} = \frac{7}{5}$

45. Uma partícula parte do ponto **A** da trajetória **ABC**, esquematizada abaixo, no instante $t_0 = 0$, atinge o ponto **B** no instante $t_1 = 3{,}0$ s e para no ponto **C** no instante $t_2 = 5{,}0$ s. A variação de sua velocidade escalar pode ser observada no gráfico abaixo:

Considerando o intervalo de 0 a 5,0 s, calcule para a partícula:

a) o valor absoluto da velocidade escalar média;

b) a intensidade da velocidade vetorial média.

46. E.R. Considere uma partícula que percorre um quarto de circunferência de 2,0 m de raio em 10 s. Adotando $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ e $\pi \cong 3{,}0$, determine:

a) o módulo da velocidade escalar média da partícula;

b) a intensidade da sua velocidade vetorial média.

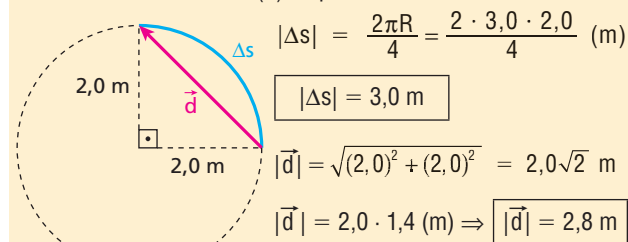
Resolução:

Na figura abaixo, estão indicados o deslocamento escalar (Δs) e o deslocamento vetorial ($\vec{d}$) da partícula:

$$|\Delta s| = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2 \cdot 3{,}0 \cdot 2{,}0}{4} \text{ (m)}$$

$$\boxed{|\Delta s| = 3{,}0 \text{ m}}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(2{,}0)^2 + (2{,}0)^2} = 2{,}0\sqrt{2} \text{ m}$$

$$|\vec{d}| = 2{,}0 \cdot 1{,}4 \text{ (m)} \Rightarrow \boxed{|\vec{d}| = 2{,}8 \text{ m}}$$

a) O módulo da velocidade escalar média é dado por:

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \frac{3{,}0 \text{ m}}{10 \text{ s}} \quad \boxed{|v_m| = 0{,}30 \text{ m/s}}$$

b) A intensidade da velocidade vetorial média é dada por:

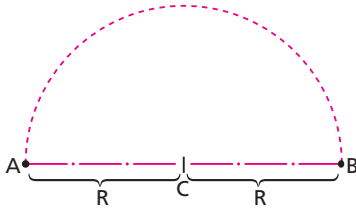
$$|\vec{v}_m| = \frac{|\vec{d}\,|}{\Delta t} = \frac{2{,}8\ \text{m}}{10\ \text{s}} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| = 0{,}28\ \text{m/s}}$$

Observe, nesse caso, que $|\vec{v}_m| < |v_m|$.

47. Um ciclista percorre a metade de uma pista circular de 60 m de raio em 15 s. Adotando $\pi \cong 3{,}0$, calcule para esse ciclista:

a) o módulo da velocidade escalar média;

b) a intensidade da velocidade vetorial média.

48. Considere o esquema seguinte, em que o trecho curvo corresponde a uma semicircunferência de raio **R**.

Duas partículas, **X** e **Y**, partem simultaneamente do ponto **A** rumo ao ponto **B**. A partícula **X** percorre o trecho curvo, enquanto a partícula **Y** segue pelo diâmetro **AB**. Sabendo que as partículas atingem o ponto **B** no mesmo instante, calcule:

a) a relação entre os módulos das velocidades escalares médias de **X** e **Y**;

b) a relação entre as intensidades das velocidades vetoriais médias de **X** e **Y**.

49. Analise as proposições a seguir:

(01) A velocidade vetorial média entre dois pontos de uma trajetória tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido do deslocamento vetorial entre esses pontos.

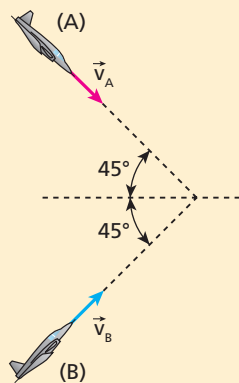
(02) A velocidade vetorial é, em cada instante, tangente à trajetória e orientada no sentido do movimento.

(04) Nos movimentos uniformes, a velocidade vetorial é constante.

(08) Nos movimentos retilíneos, a velocidade vetorial é constante.

(16) A velocidade vetorial de uma partícula só é constante nas situações de repouso e de movimento retilíneo e uniforme.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

50. E.R. Dois aviões de combate, **A** e **B**, em movimento num mesmo plano vertical, apresentam-se em determinado instante, conforme ilustra a figura, com velocidades vetoriais $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ de intensidades respectivamente iguais a 1 000 km/h. Adotando $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, determine as características da velocidade vetorial $\vec{v}_R$ do avião **B** em relação ao avião **A** no instante considerado.

Resolução:

Do ponto de vista vetorial, a velocidade de uma partícula **1** em relação a outra partícula **2** é $\vec{v}_{rel_{1,2}}$, dada pela subtração:

$$\boxed{\vec{v}_{rel_{1,2}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2}$$

em que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são as velocidades vetoriais de **1** e **2** em relação ao solo.

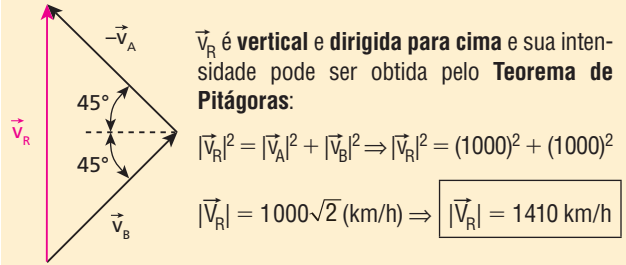
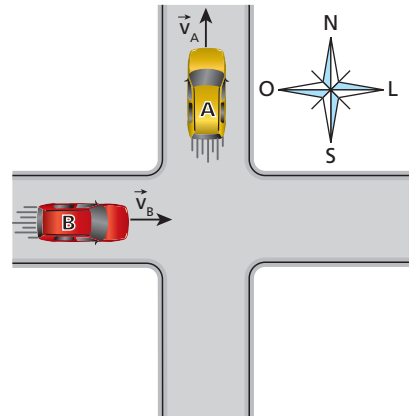
Assim, a velocidade $\vec{v}_R$ do avião **B** em relação ao avião **A** fica determinada por:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_B - \vec{v}_A \Rightarrow \vec{v}_R = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$$

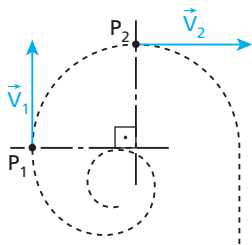
Graficamente:

$\vec{v}_R$ é **vertical** e **dirigida para cima** e sua intensidade pode ser obtida pelo **Teorema de Pitágoras**:

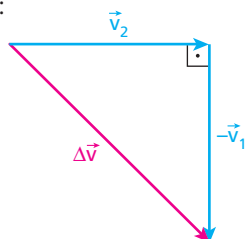
$$|\vec{v}_R|^2 = |\vec{v}_A|^2 + |\vec{v}_B|^2 \Rightarrow |\vec{v}_R|^2 = (1000)^2 + (1000)^2$$

$$|\vec{v}_R| = 1000\sqrt{2}\ \text{(km/h)} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_R| = 1410\ \text{km/h}}$$

51. Considere um carro **A** dirigindo-se para o Norte, com velocidade $\vec{v}_A$ de intensidade igual a 45 km/h, e um carro **B** dirigindo-se para o Leste, com velocidade $\vec{v}_B$ de intensidade igual a 60 km/h, conforme representa a figura a seguir.

Aponte a alternativa que melhor traduz as características da velocidade $\vec{v}_{B,A}$ do carro **B** em relação ao carro **A**:

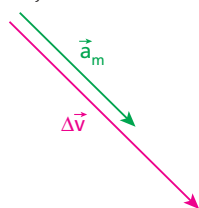
11. Aceleração vetorial média

Considere agora uma partícula que, percorrendo uma trajetória como a esquematizada na figura abaixo, passa pela posição P_1 no instante t_1 com velocidade vetorial $\vec{v}_1$ e pela posição P_2 no instante t_2 com velocidade vetorial $\vec{v}_2$.

De P_1 para P_2, a partícula experimenta uma variação de velocidade vetorial $\Delta\vec{v}$, dada por:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

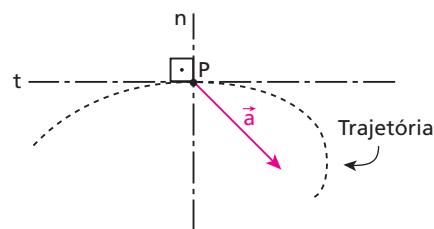
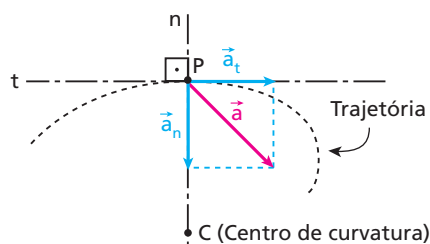
Graficamente:

A aceleração vetorial média da partícula no intervalo de t_1 a t_2 é definida por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Como Δt é um escalar positivo, a aceleração vetorial média ($\vec{a}_m$) tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido que a variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$).

12. Aceleração vetorial (instantânea)

Em muitos casos simplesmente denominada aceleração vetorial, a aceleração vetorial instantânea é definida por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m$$

Admita que, ao percorrer a trajetória esboçada na figura a seguir, uma partícula tenha no ponto **P** uma aceleração vetorial $\vec{a}$. As retas **t** e **n** são, respectivamente, **tangente** e **normal** à trajetória no ponto **P**.

Decompondo $\vec{a}$ segundo as retas **t** e **n**, obtemos, respectivamente, as componentes $\vec{a}_t$ (**tangencial**) e $\vec{a}_n$ (**normal**).

A componente normal de $\vec{a}$ ($\vec{a}_n$), pelo fato de estar dirigida para o centro de curvatura da trajetória em cada instante, recebe a denominação **componente centrípeta** ($\vec{a}_{cp}$). Preferiremos esta última denominação e adotaremos o símbolo $\vec{a}_{cp}$.

Relacionando vetorialmente $\vec{a}$, $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_{cp}$, temos:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_{cp}$$

Aplicando o **Teorema de Pitágoras** e considerando *a* o módulo de $\vec{a}$, a_t o módulo de $\vec{a}_t$ e a_{cp} o módulo de $\vec{a}_{cp}$, podemos escrever que:

$$a^2 = a_t^2 + a_{cp}^2$$

Por ter a direção do raio de curvatura da trajetória em cada ponto, a aceleração centrípeta também é denominada **aceleração radial**.

Componente tangencial ou aceleração tangencial ($\vec{a}_t$)

A **aceleração tangencial** está relacionada com as **variações de intensidade** da velocidade vetorial.

- Nos **movimentos variados**, isto é, naqueles em que a intensidade da velocidade vetorial é variável (movimentos acelerados ou retardados), **a aceleração tangencial é não nula**.
- Nos **movimentos uniformes**, isto é, naqueles em que a intensidade da velocidade vetorial é constante, **a aceleração tangencial é nula**.

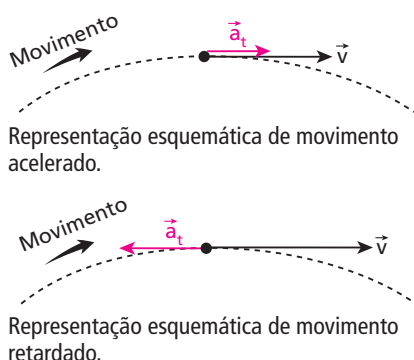
Pode-se verificar que o módulo da aceleração tangencial é igual ao módulo da aceleração escalar.

$$|\vec{a}_t| = |\alpha|$$

A direção da aceleração tangencial é sempre a mesma da tangente à trajetória no ponto considerado, e seu sentido depende de o movimento ser acelerado ou retardado.

Nos **movimentos acelerados**, $\vec{a}_t$ tem o **mesmo sentido** da velocidade vetorial; no entanto, nos **movimentos retardados**, $\vec{a}_t$ tem **sentido oposto** ao da velocidade vetorial, conforme representam as figuras abaixo.

Representação esquemática de movimento acelerado.

Representação esquemática de movimento retardado.

Componente centrípeta ou aceleração centrípeta ($\vec{a}_{cp}$)

A **aceleração centrípeta** está relacionada com as **variações de direção** da velocidade vetorial.

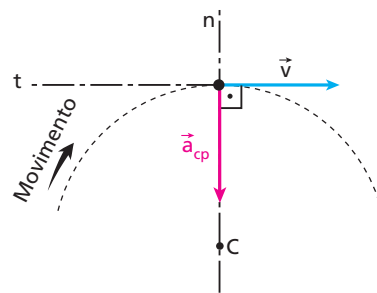
- Nos **movimentos curvilíneos**, isto é, naqueles em que a direção da velocidade vetorial é variável, **a aceleração centrípeta é não nula**.
- Nos **movimentos retilíneos**, isto é, naqueles em que a direção da velocidade vetorial é constante, **a aceleração centrípeta é nula**.

Pode-se demonstrar (veja boxe na página 116) que o módulo da aceleração centrípeta é calculado por:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{v^2}{R}$$

em que **v** é a velocidade escalar instantânea e **R** é o raio de curvatura da trajetória.

A direção da aceleração centrípeta ($\vec{a}_{cp}$) é sempre normal à trajetória e o sentido é sempre para o centro de curvatura.

Note que a aceleração centrípeta ($\vec{a}_{cp}$) e a velocidade vetorial ($\vec{v}$) são perpendiculares entre si. Isso se justifica pois, enquanto $\vec{a}_{cp}$ é normal à trajetória, $\vec{v}$ é tangencial.

Na montanha-russa: aceleração e adrenalina!

BSIP/Grupo Keystone

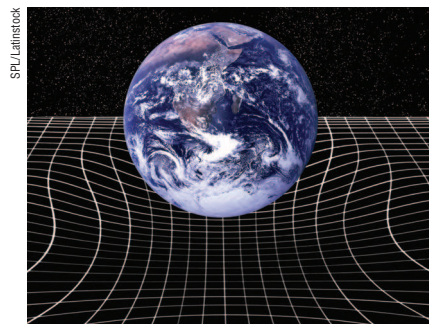
Das diversões propostas pelos parques as montanhas-russas, construídas em versões cada vez mais radicais, sempre oferecem uma dose extra de emoção. Nos trechos em que o movimento é variado (acelerado ou retardado), a aceleração vetorial admite uma componente na direção da velocidade (aceleração tangencial). Além disso, nos trechos em que a trajetória é curvilínea, a aceleração vetorial admite uma componente perpendicular à velocidade, dirigida para o centro de curvatura (aceleração centrípeta).

Retas: raridades naturais

É bastante difícil encontrar retas perfeitas na natureza. Os contornos curvos e sinuosos são muito mais comuns, como observamos na forma dos astros e dos seres vivos conhecidos. Todos os veículos de que dispomos — aviões, navios, ônibus, automóveis, bicicletas etc. —, em geral, percorrem trechos curvos até chegar ao seu destino...

O cientista alemão Albert Einstein (1879-1955) descreveu de maneira inédita e brilhante as ações gravitacionais: uma grande massa, como a de uma estrela, deforma significativamente o espaço-tempo nas suas vizinhanças.

De acordo com essa concepção, que integra a Teoria da Relatividade Especial, o Sol, por exemplo, deformaria o espaço-tempo ao seu redor, o que explicaria a manutenção dos planetas em sua órbita e as trajetórias curvas da luz, observáveis em sua propagação através do universo.

SPL/Latinstock

Representação artística da deformação do espaço-tempo proposta por Einstein. A "vala" provocada pela presença de uma grande massa possibilitaria a gravitação de outras massas ao seu redor.

O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, nascido no Rio de Janeiro em 1907 e considerado um dos profissionais mais influentes da arquitetura moderna, notabilizou-se pelos traços curvos com que desenhou estruturas de concreto armado. Isso conferiu às suas obras leveza e originalidade, que lhe trouxeram reconhecimento internacional.

Niemeyer referiu-se de maneira lírica à sua preferência pelas linhas curvas, como podemos observar neste poema de sua autoria:

Não é o ângulo reto que me atrai,
nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem.
O que me atrai é a curva livre e sensual,
a curva que encontro nas montanhas do meu país,
no curso sinuoso dos seus rios,
nas ondas do mar,
no corpo da mulher preferida.
De curvas é feito todo o universo,
o universo de Einstein...

Rogério Reis/Pulsar Imagens

Museu de Arte Contemporânea de Niterói, Rio de Janeiro, 2000 — projeto de Niemeyer.

Leitura

Demonstrações de $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$

1. Tratamento vetorial

Na figura 1, uma partícula realiza movimento circular e uniforme ao longo de uma circunferência de raio **R**. Sua velocidade vetorial tem intensidade **v**, sendo representada pelo vetor $\vec{V}_A$ no ponto **A** e pelo vetor $\vec{V}_B$ no ponto **B**.

Figura 1

Sendo Δt o intervalo de tempo gasto no percurso de **A** até **B**, o módulo da aceleração vetorial média da partícula fica determinado por:

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} \quad \text{(I)}$$

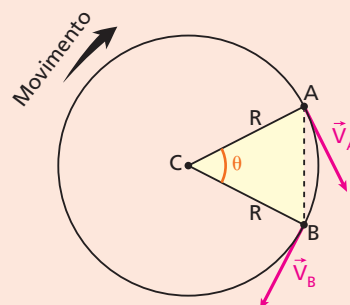
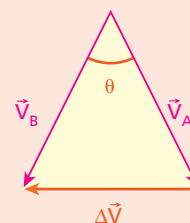
A variação de velocidade vetorial $\Delta\vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$ está representada na figura 2.

Observando-se na figura 2 que o ângulo formado entre $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$ é igual ao ângulo formado entre os raios da circunferência nos pontos **A** e **B** da figura 1 (ângulos de lados perpendiculares têm medidas iguais), pode-se concluir que os triângulos destacados nas duas figuras são semelhantes; logo:

$$\frac{|\Delta\vec{V}|}{AB} = \frac{|\vec{V}_A|}{R}$$

Figura 2

Admitindo-se Δt muito pequeno, a medida do segmento AB fica praticamente igual à do arco AB. Observando-se que $\overline{AB} \cong \overset{\frown}{AB} = v\,\Delta t$ e que $|\vec{V}_A| = v$, tem-se:

$$\frac{|\Delta\vec{V}|}{v\,\Delta t} = \frac{v}{R} \Rightarrow \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad \text{(II)}$$

Comparando as equações (I) e (II), vem:

$$|\vec{a}_m| = \frac{v^2}{R}$$

Para intervalos de tempo tendentes a zero, no entanto, a aceleração vetorial média assume caráter instantâneo, com direção radial e orientação para o centro da trajetória da mesma forma que $\Delta\vec{V}$, o que justifica a denominação **aceleração centrípeta (a_{cp})**. Finalmente:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

2. Tratamento escalar

Na figura 3, uma partícula percorre uma circunferência de raio **R** com velocidade escalar constante igual a **v** (movimento circular e uniforme).

Para intervalos de tempo tendentes a zero, o movimento descrito pela partícula pode ser assimilado a uma sucessão de pares de movimentos elementares: um uniforme na direção tangencial e outro uniformemente acelerado na direção radial. Em cada movimento tangencial, a partícula percorre uma distância $\Delta s_1 = v\,t$, e em cada movimento radial ela percorre, a partir do repouso, uma distância $\Delta s_2 = \frac{\alpha t^2}{2}$, em que α traduz a aceleração escalar nessa direção.

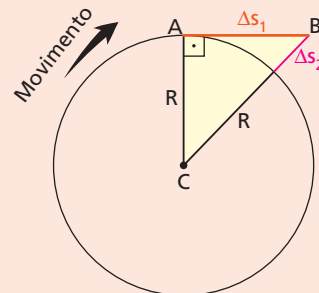



Figura 3

Aplicando-se o **Teorema de Pitágoras** ao triângulo ABC destacado na figura, em que aparecem as distâncias Δs_1 e Δs_2 com dimensões exageradas para melhor visualização, vem:

$$(R + \Delta s_2)^2 = (\Delta s_1)^2 + R^2 \Rightarrow R^2 + 2R\,\Delta s_2 + (\Delta s_2)^2 = (\Delta s_1)^2 + R^2 \Rightarrow 2R\,\Delta s_2 + (\Delta s_2)^2 = (\Delta s_1)^2$$

Para pequenos intervalos de tempo:

$$\Delta s_2 << R \Rightarrow (\Delta s_2)^2 << R\,\Delta s_2$$

Logo, na soma $2R\,\Delta s_2 + (\Delta s_2)^2$, pode-se desprezar a parcela $(\Delta s_2)^2$, já que seu valor é muito menor que o da parcela $2R\,\Delta s_2$. Assim:

$$2R\,\Delta s_2 \cong (\Delta s_1)^2 \Rightarrow 2R\frac{\alpha}{2}t^2 = (vt)^2$$

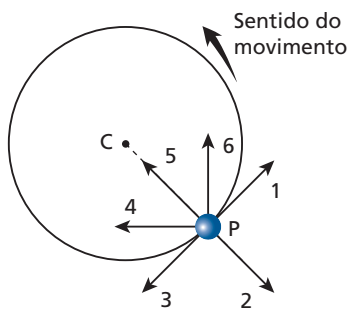
$$R\,\alpha\,t^2 = v^2t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{v^2}{R}$$

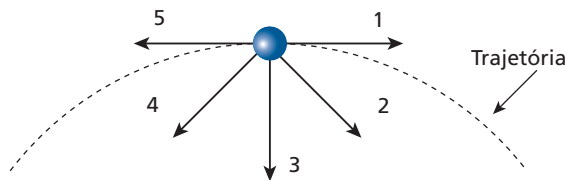
Como a aceleração calculada ocorre na direção radial e no sentido do centro da trajetória, trata-se de uma **aceleração centrípeta (a_{cp})**. Finalmente:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Christian Huygens (1629-1695), físico e astrônomo holandês (aqui em gravura de Gerard Edelinck baseada em pintura de Caspar Netscher, 1655; Bibliothèque Nationale, Paris), elucidou alguns fenômenos luminosos, atribuindo à luz caráter ondulatório. Isso conflitou com as teorias de Newton, que tratavam a luz como um conjunto de partículas. Huygens, ao construir telescópios sofisticados para a sua época, descobriu a lua Titã de Saturno e explicou a natureza dos anéis que circundam esse planeta. A Huygens credita-se a importante equação da aceleração centrípeta: $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$.

52. Se a aceleração vetorial de uma partícula é constantemente nula, suas componentes tangencial e centrípeta também o são. A respeito de um possível movimento executado por essa partícula, podemos afirmar que ele pode ser:
a) acelerado ou retardado, em trajetória retilínea.
b) uniforme, em trajetória qualquer.
c) apenas acelerado, em trajetória curva.
d) apenas uniforme, em trajetória retilínea.
e) acelerado, retardado ou uniforme, em trajetória curva.

53. Uma partícula movimenta-se ao longo de uma trajetória circular com velocidade escalar constante. A figura representa a partícula no instante em que passa pelo ponto **P**:

As setas que representam a velocidade vetorial e a aceleração vetorial da partícula em **P** são, respectivamente:
a) 1 e 2. b) 3 e 5. c) 1 e 4. d) 3 e 6. e) 1 e 5.

54. A figura a seguir representa um instante do movimento curvilíneo e acelerado de uma partícula:

Se o movimento ocorre da esquerda para a direita, os vetores que melhor representam a velocidade vetorial e a aceleração vetorial da partícula no instante considerado, e nessa ordem, são:
a) 1 e 2. b) 5 e 3. c) 1 e 4. d) 5 e 4. e) 1 e 1.

55. Admita que o piloto Felipe Massa entre em uma curva freando seu carro de fórmula 1. Seja $\vec{v}$ a velocidade vetorial do carro em determinado ponto da curva e $\vec{a}$ a respectiva aceleração.

A alternativa que propõe a melhor configuração para $\vec{v}$ e $\vec{a}$ é:

a)

b)

c)

d)

e)

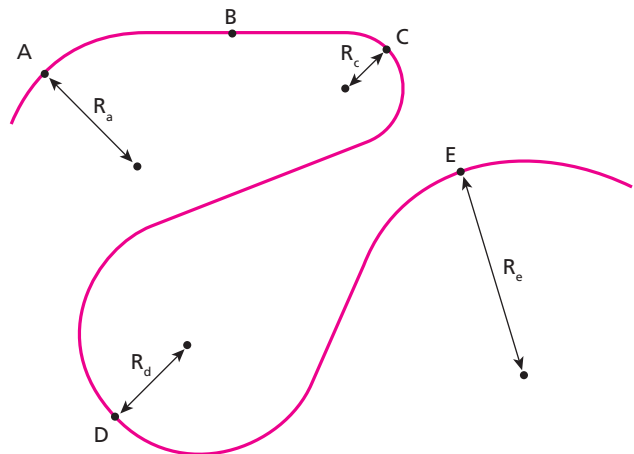
56. E.R. Um piloto consegue manter seu *kart* em movimento uniforme numa pista circular de raio 50 m. Sabendo que a velocidade escalar do *kart* é igual a 20 m/s, determine a intensidade da sua aceleração vetorial.

Resolução:
O movimento do *kart* é circular e uniforme, o que torna sua aceleração vetorial **centrípeta**.
Sendo v = 20 m/s e R = 50 m, a intensidade da aceleração centrípeta (a_{cp}) fica determinada por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_{cp} = \frac{(20)^2}{50} \ (m/s^2)$$

$$\boxed{a_{cp} = 8,0 \ m/s^2}$$

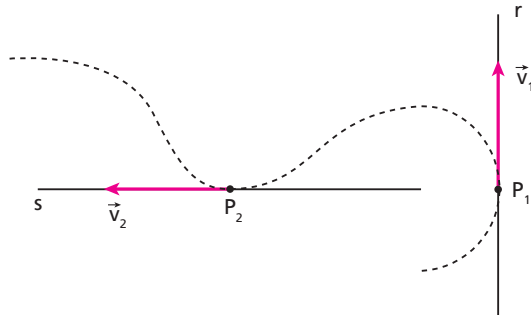
57. Um garoto monitora, por controle remoto, um aeromodelo que descreve uma circunferência de 18 m de raio com velocidade de intensidade constante e igual a 108 km/h. Determine:
a) a intensidade dos deslocamentos escalar e vetorial do aeromodelo ao completar uma volta;
b) a intensidade de aceleração vetorial do aeromodelo num instante qualquer do movimento.

58. Um móvel executa um movimento com velocidade escalar constante ao longo de uma trajetória plana, composta de trechos retilíneos e trechos em arcos de circunferências, conforme indica a figura a seguir. Os raios de curvatura nos pontos **A**, **C**, **D** e **E** estão indicados na ilustração:

R_a = 2,50 m
R_c = 1,20 m
R_d = 1,70 m
R_e = 3,50 m

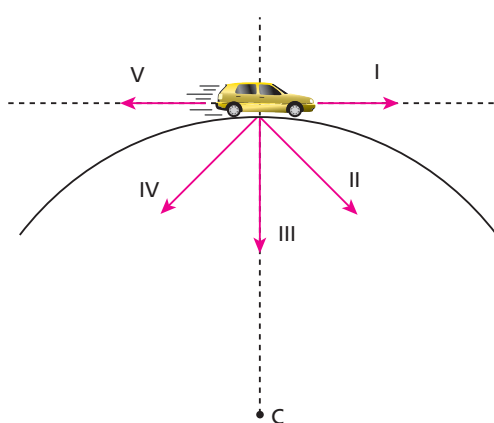
Pode-se afirmar corretamente que o valor máximo da aceleração vetorial ocorreu quando o móvel passava nas proximidades do ponto:
a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

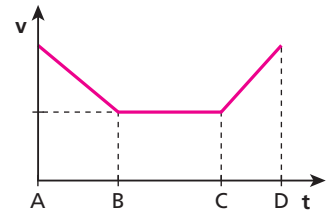
Exercícios

nível 2

59. Um carrinho percorre a trajetória representada na figura, passando pelo ponto P_1 no instante $t_1 = 5{,}0$ s, com velocidade vetorial $\vec{v}_1$, e pelo ponto P_2 no instante $t_2 = 10$ s, com velocidade vetorial $\vec{v}_2$. As retas **r** e **s** são perpendiculares entre si.

Sabendo que $|\vec{v}_1| = 15$ m/s e que $|\vec{v}_2| = 20$ m/s, calcule para o percurso de P_1 a P_2 o módulo dos seguintes vetores:
a) variação de velocidade vetorial;
b) aceleração vetorial média.

60. Analise as proposições:
I. No movimento retilíneo e acelerado, a aceleração tangencial é não nula e a aceleração centrípeta é nula.
II. No movimento parabólico e retardado, as acelerações tangencial e centrípeta são não nulas.
III. No movimento circular e uniforme, a aceleração tangencial é nula e a aceleração centrípeta é não nula.
Podemos afirmar que:
a) Todas são corretas.
b) Todas são incorretas.
c) Apenas I e II são corretas.
d) Apenas I e III são corretas.
e) Apenas II e III são corretas.

61. O carrinho esquematizado na figura a seguir percorre a trajetória circular da esquerda para a direita. I, II, III, IV e V são vetores que podem estar associados ao movimento. Indique, justificando, que vetores representam melhor a velocidade e a aceleração do carrinho nos seguintes casos:

a) o movimento é acelerado;
b) o movimento é retardado;
c) o movimento é uniforme.

62. O gráfico ao lado representa o módulo da velocidade (**v**) de um automóvel em função do tempo (**t**) quando ele percorre um trecho circular de uma rodovia.

Em relação a esse movimento, podemos afirmar que:
a) entre **A** e **B**, a aceleração tangencial é nula.
b) entre **B** e **C**, a aceleração tangencial é nula.
c) entre **B** e **C**, a aceleração centrípeta é nula.
d) entre **C** e **D**, a aceleração centrípeta é nula.
e) entre **C** e **D**, a aceleração tangencial tem sentido oposto ao da velocidade.

63. Admita que a trajetória da Terra em torno do Sol seja uma circunferência de raio $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m e que o ano terrestre tenha duração $T = 3{,}1 \cdot 10^{7}$ s. Considerando o movimento de translação da Terra em torno do Sol e adotando $\pi \cong 3{,}1$, determine:
a) o módulo da velocidade vetorial do planeta em km/s;
b) a intensidade da sua aceleração vetorial em m/s^2.

64. E.R. Uma partícula descreve uma circunferência de 12 m de raio com aceleração escalar constante e igual a 4,0 m/s^2. Determine a intensidade da aceleração vetorial da partícula no instante em que sua velocidade for de 6,0 m/s.

Resolução:

A aceleração tangencial tem intensidade igual ao módulo da aceleração escalar:

$$|\vec{a}_t| = |\alpha| = 4{,}0 \text{ m/s}^2$$

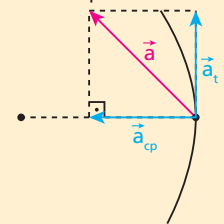
A aceleração centrípeta tem intensidade dada por:

$$|\vec{a}_{cp}| = \frac{|v^2|}{R} = \frac{(6{,}0)^2}{12} \text{ (m/s}^2\text{)} \Rightarrow a_{cp} = 3{,}0 \text{ m/s}^2$$

A aceleração vetorial tem intensidade calculada pelo Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(|\vec{a}_t|)^2 + (|\vec{a}_{cp}|)^2}$$

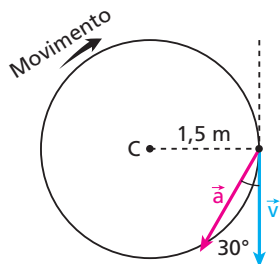
$$|\vec{a}| = \sqrt{(4{,}0)^2 + (3{,}0)^2}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = 5{,}0 \text{ m/s}^2}$$

65. A extremidade de uma das pás de um ventilador descreve uma circunferência de raio 0,50 m, com aceleração escalar de módulo 1,5 m/s^2. No instante em que a velocidade vetorial dessa extremidade tiver módulo igual a 1,0 m/s, calcule a intensidade de sua aceleração vetorial.

66. Uma partícula percorre uma trajetória circular de 6,0 m de diâmetro, obedecendo à função:

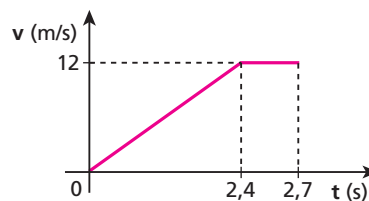
$$v = 1{,}0 + 4{,}0\,t$$

com **v** em m/s e **t** em s. Para o instante $t = 0{,}50$ s, determine:
a) a intensidade da velocidade vetorial;
b) a intensidade da aceleração vetorial.

67. Uma partícula percorre uma circunferência de 1,5 m de raio no sentido horário, como está representado na figura. No instante t_0, a velocidade vetorial da partícula é $\vec{v}$ e a aceleração vetorial é $\vec{a}$.

Sabendo que $|\vec{v}| = 3{,}0$ m/s:

a) calcule $|\vec{a}|$;

b) diga se no instante t_0 o movimento é **acelerado** ou **retardado**. Justifique sua resposta.

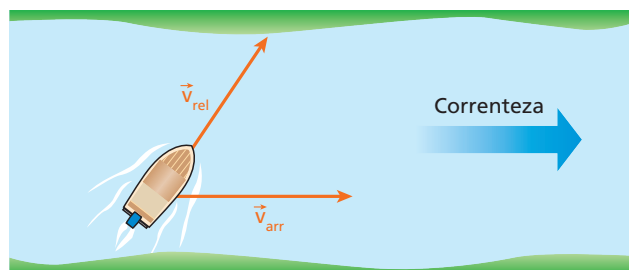
68. Uma partícula parte do repouso e dá uma volta completa numa circunferência de raio **R**, gastando um intervalo de tempo de 2,7 s. A variação da sua velocidade escalar com o tempo pode ser observada no gráfico abaixo.

Adotando $\pi \cong 3{,}0$, calcule:

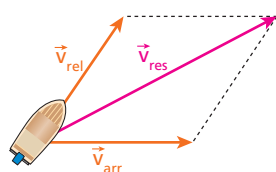
a) o valor de **R**;

b) a intensidade da aceleração vetorial da partícula no instante t = 1,2 s.

Bloco 5

13. Velocidade relativa, de arrastamento e resultante

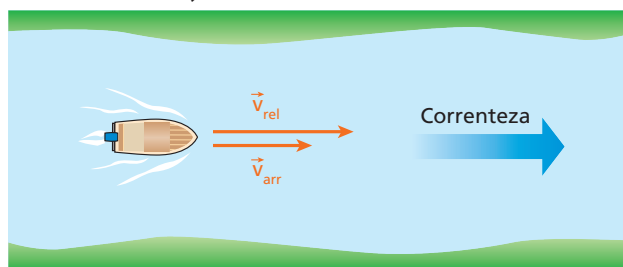
Consideremos um barco navegando em um rio, conforme ilustra a figura a seguir. Sejam $\vec{v}_{rel}$ a velocidade do barco em relação às águas e $\vec{v}_{arr}$ a velocidade das águas em relação às margens.

O barco tem, portanto, dois movimentos parciais: o **movimento relativo**, provocado pelo motor em relação às águas, com velocidade $\vec{v}_{rel}$, e o **movimento de arrastamento**, provocado pela correnteza, com velocidade $\vec{v}_{arr}$.

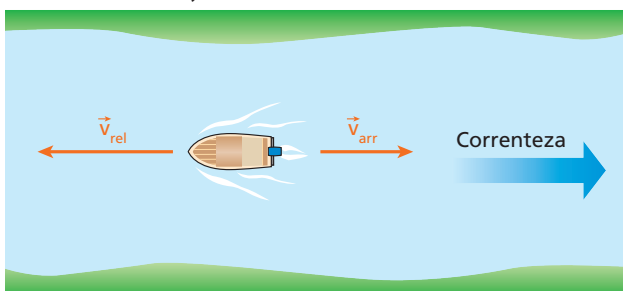
Fazendo a composição desses movimentos, o barco apresentará em relação às margens um **movimento resultante** com velocidade $\vec{v}_{rel}$, que é dada pela soma vetorial de $\vec{v}_{rel}$ com $\vec{v}_{arr}$.

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr}$$

Note que o movimento provocado pelo motor do barco (movimento relativo) é o que a embarcação teria em relação às margens se no rio não houvesse correnteza (águas estivessem em repouso).

Casos particulares notáveis

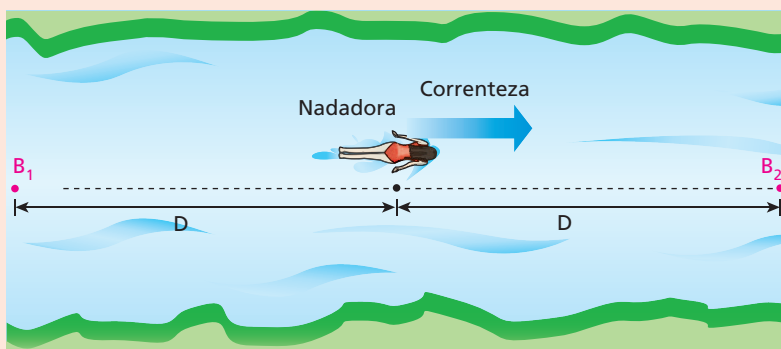
Simbolizando por v_{res}, v_{rel} e v_{arr} os módulos de $\vec{v}_{res}$, $\vec{v}_{rel}$ e $\vec{v}_{arr}$, respectivamente, temos:

I. O barco "desce o rio" (navega a favor da correnteza).

$$v_{res} = v_{rel} + v_{arr}$$

II. O barco "sobe o rio" (navega contra a correnteza).

$$v_{res} = v_{rel} - v_{arr}$$

Leitura

Uma situação intrigante!

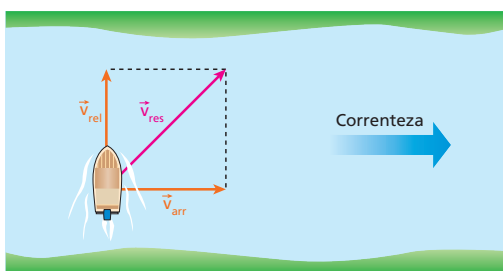
Imagine que uma nadadora esteja descendo um rio sob a ação exclusiva da correnteza, arrastada pela água com velocidade constante de intensidade V_{arr}, medida em relação às margens. Suponha que sua posição seja equidistante (distância **D**) de duas boias iguais, B_1 e B_2, que também descem o rio sob a ação exclusiva da água. Veja a ilustração ao lado.

Ela resolve, então, agarrar uma das boias e, para isso, coloca-se a nadar em linha reta rumo a uma delas com velocidade constante de intensidade V_{rel}, medida em relação à água. Qual das duas boias a nadadora conseguiria atingir no menor intervalo de tempo, B_1 ou B_2? Pense um pouco.

Se você optou por B_1 ou por B_2, você errou, já que qualquer uma das boias poderia ser alcançada em um mesmo intervalo de tempo de duração **T**!

A explicação para esse fato é a seguinte: como a água afeta igualmente o movimento da nadadora e das boias, impondo aos três a velocidade própria da correnteza (V_{arr}), podemos raciocinar como se esse arrastamento não existisse. Logo, tudo se passa como se a água e as boias estivessem em repouso e só a nadadora se movimentasse! Isso significa que as duas boias poderiam ser alcançadas em intervalos de tempo de igual duração, já que a nadadora se desloca em movimento uniforme a partir de uma posição equidistante de ambas.

O valor de **T** fica determinado por:

$$V_{rel} = \frac{D}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{D}{V_{rel}}}$$

III. O barco é dirigido perpendicularmente à correnteza.

Teorema de Pitágoras:

$$v_{res}^2 = v_{rel}^2 + v_{arr}^2$$

14. Princípio de Galileu

Analisando a situação ilustrada na figura anterior, como faríamos para calcular o intervalo de tempo Δt gasto pelo barco na travessia do rio, cuja largura admitiremos igual a **L**?

Consideramos no cálculo apenas o movimento relativo do barco, independentemente do movimento de arrastamento imposto pela água, pois a componente da velocidade associada à travessia é, nesse caso, exclusivamente $\vec{v}_{rel}$. A componente $\vec{v}_{arr}$ está relacionada com o deslocamento do barco rio abaixo, não tendo nenhuma relação com a travessia propriamente dita.

Assim, o cálculo do intervalo de tempo Δt é feito por:

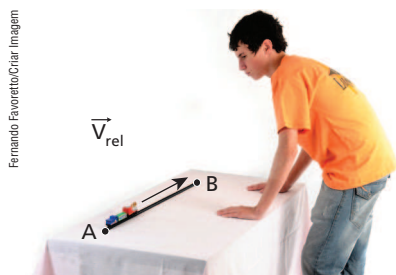
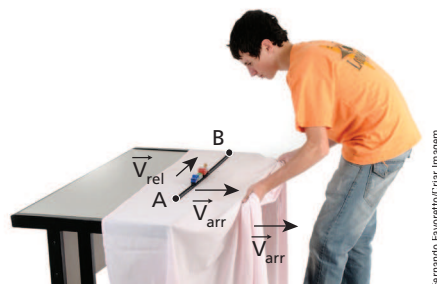
$$V_{rel} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{L}{v_{rel}}}$$

Estudando situações análogas à descrita, o cientista italiano Galileu Galilei (1564-1642) enunciou que:

> Se um corpo apresenta um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem. Consequentemente, o intervalo de tempo de duração do movimento relativo é **independente** do movimento de arrastamento.

Visando reforçar o conceito de que o movimento relativo é independente do movimento de arrastamento, vamos estudar o exemplo a seguir, em que uma locomotiva de brinquedo se deslocará com velocidade constante sobre trilhos retilíneos, montados em cima de uma mesa horizontal forrada com uma toalha, indo da extremidade **A** à extremidade **B**.

Para tanto, considere duas situações:

I. A locomotiva irá de **A** até **B** com velocidade $\vec{v}_{rel}$ em relação à toalha, que será mantida em repouso em relação à mesa.

II. A locomotiva irá de **A** até **B** com velocidade $\vec{v}_{rel}$ em relação à toalha e esta, por sua vez, será puxada com velocidade $\vec{v}_{arr}$ em relação à mesa.

Nas duas situações, o intervalo de tempo Δt gasto pela locomotiva na travessia da mesa, da extremidade **A** à extremidade **B** do trilho, será o mesmo, independentemente do movimento de arrastamento imposto pela toalha na situação II.

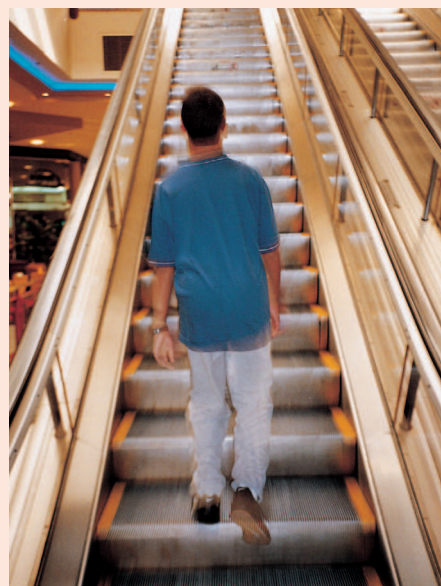
Sendo **L** a distância de **A** até **B**, o intervalo de tempo Δt fica determinado nos dois casos por:

$$v_{rel} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v_{rel}}$$

Leitura

Em escadas rolantes

É comum observarmos pessoas que sobem ou descem os degraus de escadas rolantes, mesmo com estas em funcionamento. Se os degraus de uma escada rolante estiverem subindo com velocidade de 0,50 m/s e uma pessoa subir por eles com velocidade de 1,5 m/s (em relação aos degraus), será vista por alguém em repouso em relação ao solo com velocidade de 2,0 m/s. Se essa pessoa descer pelos degraus (que sobem) da mesma escada com velocidade de 1,5 m/s (em relação aos degraus), será vista por alguém em repouso em relação ao solo com velocidade de 1,0 m/s. Em particular, se a pessoa descer por esses degraus (que sobem) com velocidade de 0,50 m/s (em relação aos degraus), apresentará velocidade nula em relação a alguém em repouso em relação ao solo.

Note que essa pessoa gastará o mesmo intervalo de tempo para subir ou descer um determinado número de degraus independentemente de a escada rolante estar ou não em funcionamento.

Homem em escada rolante.

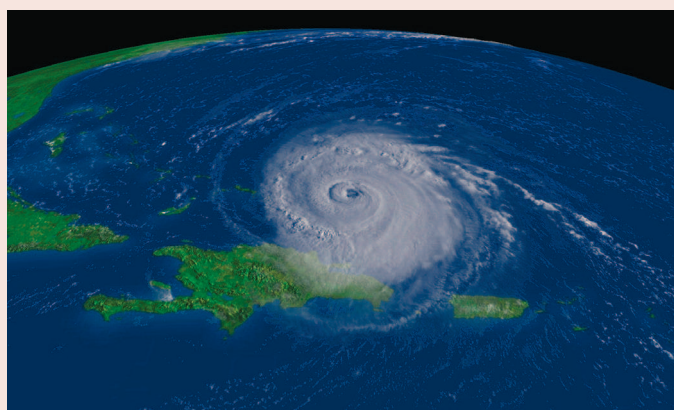
Furacão: ira da natureza

O vocábulo *furacão* vem da cultura Maia, dos povos que habitavam a península de Yucatán, na América Central. É uma referência ao Deus Huracan, divindade que se incumbia da constante tarefa de destruir e reconstruir a Natureza, sendo por isso associado a tormentas e vendavais.

Os furacões são ciclones tropicais de grande intensidade que se originam em latitudes geralmente baixas, nas regiões próximas à Linha do Equador, quando aglomerados de nuvens de chuva recebem, por convecção, o ar quente e úmido que sobe das águas mornas dos oceanos. São sistemas de baixa pressão que fazem com que

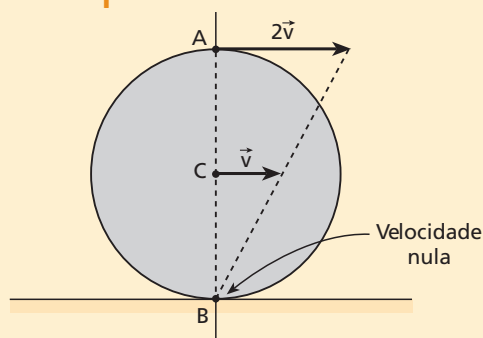
grandes massas de ar girem como um vórtice (redemoinho) em torno de um núcleo central denominado olho, provocando, em terra, tempestades muito fortes e ventos de até 320 km/h. Constituem, com os terremotos, uma força natural de imenso poder destruidor. Na maior parte dos casos, no Hemisfério Sul os ciclones tropicais têm rotação horária, ocorrendo o oposto no Hemisfério Norte. O sentido com que se movimentam as massas de ar é determinado principalmente pela rotação da Terra, que impõe às diversas camadas atmosféricas forças de cisalhamento diferentes entre si. Essas forças são mais intensas nas proximidades da Linha do Equador, onde os pontos do solo giram ao redor do eixo do planeta com velocidades tangenciais maiores, impondo ao ar das proximidades movimentos mais céleres.

Se os furacões fossem simétricos e permanecessem imóveis em relação ao solo, os ventos soprariam em posições equidistantes do olho com velocidades de mesma intensidade. Em razão de seu deslocamento paralelamente à crosta, porém, os ventos em posições equidistantes do olho apresentam velocidades distintas em relação a um referencial terrestre, fruto da composição dos movimentos relativo e de arrastamento a que ficam sujeitas as massas de ar.

O furacão **Andrew**, que atingiu o estado da Flórida em agosto de 1992, foi o mais devastador já registrado nos Estados Unidos. O pior de todos até o momento, entretanto, foi o **Mitch**, que, em outubro e novembro de 1998, provocou verdadeira desolação em Honduras, Nicarágua, El Salvador, Guatemala e sul da Flórida, tendo sido classificado como de categoria 5 na escala de **Saffir-Simpson**, que vai de 1 a 5. O Katrina, de categoria 4, atingiu de forma contundente a cidade de Nova Orleans, no estado norte-americano de Luisiana, em agosto de 2005.

NOAA/SPL/Latinstock

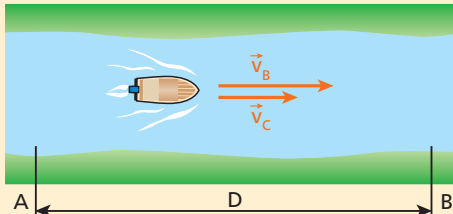
Um furacão oriundo das águas do Mar do Caribe, como o que aparece nesta fotografia de satélite, ao adentrar a costa leste norte-americana, tem maior potencial de destruição do lado direito do seu olho, já que a velocidade dos ventos nessa região é maior do que em posições simétricas do lado esquerdo.

Gotas d'água mais velozes que o caminhão?

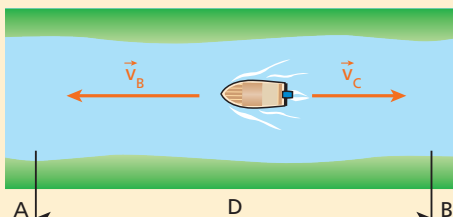
Zoran Milich/Grupo Keystone

Nesta fotografia aparecem as rodas de um caminhão de grande porte trafegando em uma pista molhada. As gotas d'água que se desprendem dos pontos mais altos dos pneus têm, em relação ao solo, velocidade equivalente ao dobro da do caminhão. Se o veículo estiver trafegando com velocidade de intensidade 100 km/h, por exemplo, estará lançando gotas d'água a partir dos pontos mais altos dos pneus com velocidade de intensidade 200 km/h. Essas gotas, depois de realizarem trajetórias parabólicas, irão molhar partes do caminhão localizadas à frente das respectivas rodas.

69. E.R. Um barco motorizado desce um rio deslocando-se de um porto **A** até um porto **B**, distante 36 km, em 0,90 h. Em seguida, esse mesmo barco sobe o rio deslocando-se do porto **B** até o porto **A** em 1,2 h. Sendo v_B a intensidade da velocidade do barco em relação às águas e v_C a intensidade da velocidade das águas em relação às margens, calcule v_B e v_C.

Resolução:

O barco desce o rio:

$$v_B + v_C = \frac{D}{\Delta t_1} \Rightarrow v_B + v_C = \frac{36 \text{ km}}{0,90 \text{ h}}$$

$$\boxed{v_B + v_C = 40 \text{ (km/h)}} \quad \text{(I)}$$

O barco sobe o rio:

$$v_B - v_C = \frac{D}{\Delta t_2} \Rightarrow v_B - v_C = \frac{36 \text{ km}}{1,2 \text{ h}}$$

$$\boxed{v_B + v_C = 30 \text{ (km/h)}} \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) + (II), vem:

$$2\,v_B = 70 \Rightarrow \boxed{v_B = 35 \text{ km/h}}$$

De (I) ou (II), obtemos:

$$\boxed{v_C = 5,0 \text{ km/h}}$$

70. Considere um rio cujas águas correm com velocidade de intensidade 3,0 km/h em relação às margens. Um barco desce esse rio, deslocando-se de um porto **A** até um porto **B** em 1,2 h. Em seguida, esse mesmo barco sobe o rio, deslocando-se do porto **B** até o porto **A** em 1,8 h. Sendo v_B a intensidade da velocidade do barco em relação às águas e **D** a distância entre os portos **A** e **B**, calcule v_B e **D**.

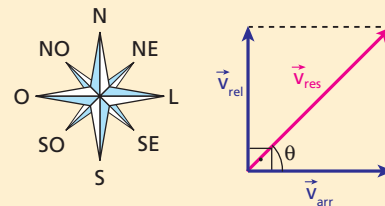
71. Um artista de cinema, ao gravar uma das cenas de um filme de aventura, vai de um extremo ao outro de um vagão de um trem, que se move em trilhos retilíneos com velocidade constante de 36 km/h, gastando 20 s. Sabendo que o vagão tem comprimento de 30 m e que o artista se move no mesmo sentido do movimento do trem, calcule:

a) a intensidade da velocidade do artista em relação ao trem;

b) o intervalo de tempo necessário para que o artista percorra 230 m em relação ao solo.

72. E.R. Ao fazer um voo entre duas cidades, um ultraleve é posicionado por seu piloto de Sul para Norte. O motor impulsiona a aeronave com velocidade constante de módulo igual a 100 km/h. Durante o trajeto, passa a soprar um vento de velocidade 100 km/h, de Oeste para Leste. Se o piloto não mudar as condições iniciais do movimento do ultraleve, qual será a nova velocidade desse aparelho em relação à Terra, em módulo, direção e sentido?

Resolução:

A velocidade que o ultraleve passa a ter, em relação à Terra, é dada pela soma vetorial a seguir:

em que:

$\vec{v}_{rel}$ é a velocidade do ultraleve em relação ao ar (100 km/h);

$\vec{v}_{arr}$ é a velocidade do ar em relação à Terra (100 km/h);

$\vec{v}_{res}$ é a velocidade do ultraleve em relação à Terra.

Dessa forma, aplicando o **Teorema de Pitágoras**, temos:

$$v_{res}^2 = v_{rel}^2 + v_{arr}^2$$

$$v_{res}^2 = 100^2 + 100^2 \Rightarrow \boxed{v_{res} \cong 141 \text{ km/h}}$$

O ângulo θ da figura, cujo valor é igual a 45°, já que $v_{rel} = v_{arr}$, define a direção da velocidade $\vec{v}_{res}$. Na rosa dos ventos, notamos que sua orientação de v_{res} é de Sudoeste (SO) para Nordeste (NE).

73. Uma pessoa deseja atravessar um rio cujas águas correm com velocidade constante de 6,0 m/s em relação às margens. Para tanto, usa um barco provido de motor de popa capaz de impulsionar a embarcação com uma velocidade constante de módulo igual a 8,0 m/s em relação às águas. Se o barco é colocado perpendicularmente às margens, e mantendo-se o leme nessa direção, sua velocidade em relação à Terra será:

a) 2,0 m/s. b) 6,0 m/s. c) 8,0 m/s. d) 10,0 m/s. e) 14,0 m/s.

74. (UFMT) Um homem tem velocidade, relativa a uma esteira, de módulo 1,5 m/s e direção perpendicular à da velocidade de arrastamento da esteira. A largura da esteira é de 3,0 m e sua velocidade de arrastamento, em relação ao solo, tem módulo igual a 2,0 m/s. Calcule:

a) o módulo da velocidade da pessoa em relação ao solo;

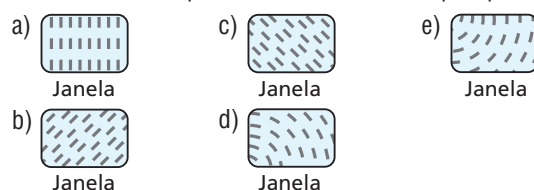
b) a distância percorrida pela pessoa, em relação ao solo, ao atravessar a esteira.

75. (Mack-SP) Um passageiro em um trem, que se move para sua direita em movimento retilíneo e uniforme, observa a chuva através da janela. Não há ventos e as gotas de chuva já atingiram sua velocidade-limite. O aspecto da chuva observado pelo passageiro é:

a)
Janela

c) Janela

e)
Janela

b) d)
Janela Janela

Exercícios

76. Um garoto vai da base de uma escada rolante até seu topo e volta do topo até sua base, gastando um intervalo de tempo total de 12 s. A velocidade dos degraus da escada rolante em relação ao solo é de 0,50 m/s e a velocidade do garoto em relação aos degraus é de 1,5 m/s. Desprezando o intervalo de tempo gasto pelo garoto na inversão do sentido do seu movimento, calcule o comprimento da escada rolante.

77. Uma balsa percorre o Rio Cuiabá de Porto Cercado a Porto Jofre (Pantanal mato-grossense), gastando 9,0 h na descida e 18 h na subida. O motor da balsa funciona sempre em regime de potência máxima, tal que a velocidade da embarcação em relação às águas pode ser considerada constante. Admitindo que a velocidade das águas também seja constante, responda: quanto tempo uma rolha, lançada na água em Porto Cercado e movida sob a ação exclusiva da correnteza, gastará para chegar até Porto Jofre?

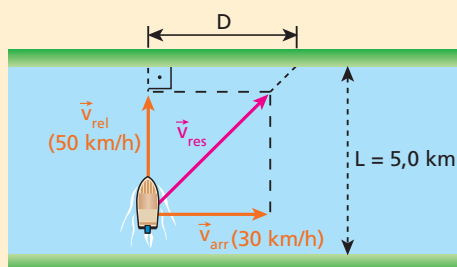
78. E.R. Um rio de margens retilíneas e largura constante igual a 5,0 km tem águas que correm paralelamente às margens, com velocidade de intensidade 30 km/h. Um barco, cujo motor lhe imprime velocidade de intensidade sempre igual a 50 km/h em relação às águas, faz a travessia do rio.

a) Qual o mínimo intervalo de tempo possível para que o barco atravesse o rio?

b) Na condição de atravessar o rio no intervalo de tempo mínimo, que distância o barco percorre paralelamente às margens?

c) Qual o intervalo de tempo necessário para que o barco atravesse o rio percorrendo a menor distância possível?

Resolução:

a) A travessia do rio é feita no menor intervalo de tempo possível quando a velocidade do barco em relação às águas é mantida **perpendicular** à velocidade da correnteza.
(O movimento relativo é independente do movimento de arrastamento.)

Travessia em tempo mínimo

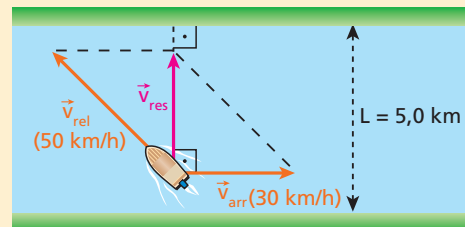
$$v_{rel} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow 50 = \frac{5,0}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta t = 0,10 \text{ h} = 6,0 \text{ min}}$$

b) A distância **D** que o barco percorre paralelamente às margens, arrastado pelas águas do rio, é calculada por:

$$v_{arr} = \frac{D}{\Delta t} \Rightarrow 30 = \frac{D}{0,10}$$

$$\boxed{D = 3,0 \text{ km}}$$

c) A travessia do rio é feita com o barco percorrendo a menor distância possível entre as margens quando sua velocidade em relação ao solo (velocidade resultante) é mantida **perpendicular** à velocidade da correnteza.

Travessia em distância mínima

I. Pelo **Teorema de Pitágoras**:

$$v^2_{rel} = v^2_{res} + v^2_{arr}$$

$$(50)^2 = v^2_{res} + (30)^2 \Rightarrow \boxed{v_{res} = 40 \text{ km/h}}$$

II. $$v_{res} = \frac{L}{\Delta t'} \Rightarrow 40 = \frac{5,0}{\Delta t'}$$

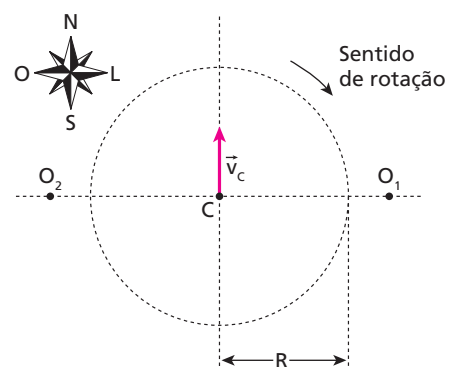
$$\boxed{\Delta t' = 0,125 \text{ h} = 7,5 \text{ min}}$$

79. Um barco provido de um motor que lhe imprime velocidade de 20 km/h em relação às águas é posto a navegar em um rio de margens paralelas e largura igual a 5,0 km, cujas águas correm com velocidade de 15 km/h em relação às margens.

a) Qual o menor intervalo de tempo para que o barco atravesse o rio? Esse intervalo de tempo depende da velocidade da correnteza?

b) Supondo que o barco atravesse o rio no menor intervalo de tempo possível, qual a distância percorrida por ele em relação às margens?

80. Seja $\vec{v}_1$ a velocidade de um barco em relação às águas de um rio de margens paralelas e $\vec{v}_2$ a velocidade das águas em relação às margens. Sabendo que $v_1 = 40$ km/h e que $v_2 = 20$ km/h, determine o ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ para que o barco atravesse o rio perpendicularmente às margens. Admita que $\vec{v}_2$ seja paralela às margens.

81. O olho **C** de um furacão desloca-se em linha reta com velocidade de intensidade $v_C = 150$ km/h em relação à Terra na direção Sul-Norte, dirigindo-se para o Norte. A massa de nuvens desse ciclone tropical, contida em um plano horizontal paralelo ao solo, realiza uma rotação uniforme no sentido horário em torno de **C** abrangendo uma região praticamente circular de raio **R** igual a 100 km, conforme ilustra a figura, em que $\mathbf{O_1}$ e $\mathbf{O_2}$ são dois observadores em repouso em relação à superfície terrestre.

Sabendo que a velocidade angular da massa de nuvens é constante e igual a 0,50 rad/h, responda:

a) Qual a intensidade da velocidade dos ventos medida por O_1?
b) Qual a intensidade da velocidade dos ventos medida por O_2?
c) De que lado (Leste ou Oeste) o furacão tem maior poder de destruição?

82. (Unifei-MG) A cidade de Belo Horizonte (BH) localiza-se a 300 km ao norte da cidade de Volta Redonda. Se um avião sai desta cidade rumo a BH num dia de vento soprando na direção Leste-Oeste, no sentido de Oeste para Leste, com velocidade de módulo 60 km/h, pergunta-se: em que direção o piloto deve aproar o eixo longitudinal do seu avião para manter o rumo Sul-Norte e completar seu percurso em 0,50 h? Considere que o voo ocorre com velocidade constante e utilize a tabela apresentada a seguir:

θ (graus)	5,0	5,7	6,0	6,7	8,0
tg θ	0,09	0,10	0,11	0,12	0,14

83. (Vunesp-SP) Sob a ação de um vento horizontal com velocidade de intensidade v = 15 m/s, gotas de chuva caem formando um ângulo de 30° em relação à vertical. A velocidade de um vento horizontal capaz de fazer com que essas mesmas gotas de chuva caiam formando um ângulo de 60° em relação à vertical deve ter intensidade, em m/s, igual a:

a) 45. b) 30. c) 20. d) 15. e) 10.

84. E.R. Num dia de chuva, um garoto em repouso consegue abrigar-se perfeitamente mantendo a haste do seu guarda-chuva vertical, conforme ilustra a Fig. 1. Movimentando-se para a direita com velocidade de intensidade 4,0 m/s, entretanto, ele só consegue abrigar-se mantendo a haste do guarda-chuva inclinada 60° com a horizontal, conforme ilustra a Fig. 2.

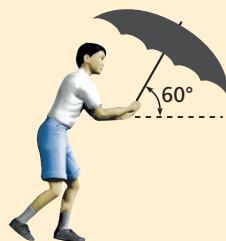
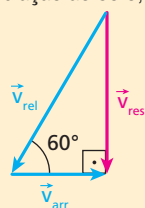



Figura (1) Figura (2)

Admitindo que as gotas de chuva tenham movimento uniforme, calcule a intensidade da sua velocidade em relação ao garoto:

a) nas condições da Fig. 1;
b) nas condições da Fig. 2.

Resolução:

Sendo $\vec{v}_{rel}$ a velocidade das gotas de chuva em relação ao garoto, $\vec{v}_{res}$ a velocidade do garoto em relação ao solo e $\vec{v}_{res}$ a velocidade das gotas de chuva em relação ao solo, temos:

$$\vec{v}_{res} = v_{rel} + \vec{v}_{arr}$$

a) $\text{tg } 60° = \frac{v_{res}}{v_{arr}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{v_{res}}{4{,}0}$

$$v_{res} = 4{,}0\sqrt{3} \text{ m/s}$$

Como o garoto está em repouso, $\vec{v}_{arr} = \vec{0}$. Logo $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{res}$.

$$v_{rel} = 4{,}0\sqrt{3} \text{ m/s} \cong 6{,}9 \text{ m/s}$$

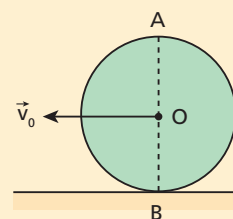
b) $\cos 60° = \frac{v_{arr}}{v_{rel}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4{,}0}{v_{rel}}$

$$v_{rel} = 8{,}0 \text{ m/s}$$

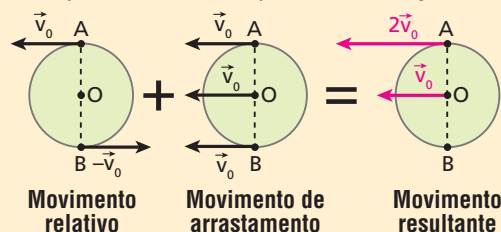
85. Um trem dotado de janelas laterais retangulares de dimensões 80 cm (base) × 60 cm (altura) viaja ao longo de uma ferrovia retilínea e horizontal com velocidade constante de intensidade 40 km/h. Ao mesmo tempo, cai uma chuva vertical (chuva sem vento), de modo que as gotas apresentam, em relação ao solo, velocidade constante de intensidade **v**. Sabendo que o trajeto das gotas de chuva observado das janelas laterais do trem tem a direção da diagonal dessas janelas, determine:

a) o valor de **v**;
b) a intensidade da velocidade das gotas de chuva em relação a um observador no trem.

86. E.R. (Fuvest-SP) Um disco rola sobre uma superfície plana, sem deslizar. A velocidade do centro **O** é $\vec{v}_0$. Em relação ao plano de rolagem, responda:

a) qual é a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto **B**?
b) qual é a velocidade $\vec{v}_A$ do ponto **A**?

Resolução:

Os pontos **A** e **B** têm **dois movimentos parciais**: o **relativo**, provocado pela **rotação** do disco, e o de **arrastamento**, provocado pela **translação**. O movimento **resultante**, observado do plano de rolagem, é a **composição** desses movimentos parciais.

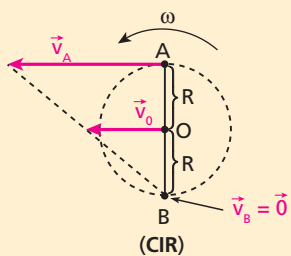
Como não há deslizamento da roda, a velocidade do ponto **B**, em relação ao plano de rolagem, é **nula**. Por isso, as velocidades desse ponto, devidas aos movimentos relativo e de arrastamento, devem ter mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos, como está representado nas figuras abaixo:

a) **Ponto B:** $\vec{v}_B = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} \Rightarrow \vec{v}_B = -\vec{v}_0 + \vec{v}_0$

$$\vec{v}_B = \vec{0}$$

b) **Ponto A:** $\vec{v}_A = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{arr} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_0$

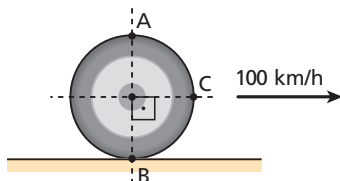
$$\vec{v}_A = 2\,\vec{v}_0$$

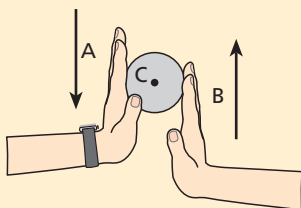
Nota:

- Em situações como essa, podemos raciocinar também em termos do **centro instantâneo de rotação** (CIR) que, no caso, é o ponto **B**. Tudo se passa como se **A** e **B** pertencessem a uma "barra rígida", de comprimento igual ao diâmetro do disco, articulada em **B**. Essa barra teria, no instante considerado, velocidade angular ω, de modo que:

Ponto A: $v_A = \omega\, 2R$

Ponto O: $v_0 = \omega\, R$

$$v_A = 2v_0$$

87. Um carro trafega a 100 km/h sobre uma rodovia retilínea e horizontal. Na figura, está representada uma das rodas do carro, na qual estão destacados três pontos: **A**, **B** e **C**.

Desprezando derrapagens, calcule as intensidades das velocidades de **A**, **B** e **C** em relação à rodovia. Adote nos cálculos $\sqrt{2} \cong 1{,}4$.

88. E.R. Considere uma pessoa que tem entre as palmas de suas mãos um cilindro de eixo **C** horizontal. Admita que em determinado instante as mãos da pessoa estejam dotadas de movimentos verticais, com a mão esquerda (mão **A**) descendo, com velocidade de intensidade 8,0 cm/s, e a mão direita (mão **B**) subindo, com velocidade de intensidade 12 cm/s, conforme representa o esquema.

Supondo que não haja escorregamento do cilindro em relação às mãos, determine no instante considerado as características (intensidade, direção e sentido) da velocidade do eixo **C**.

Resolução:

Analisemos os efeitos parciais que cada mão provoca no cilindro.

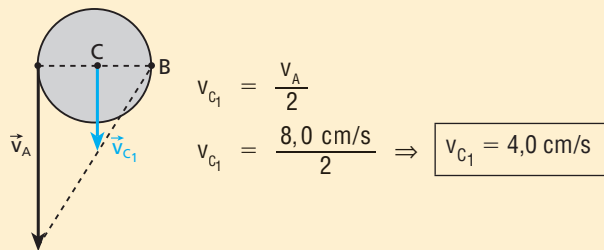
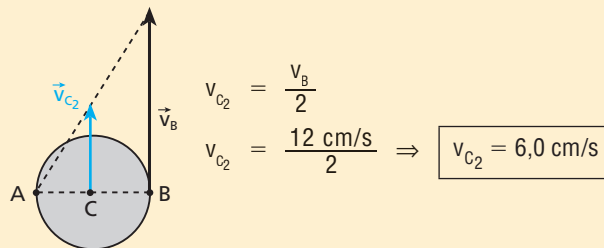
I. Devido ao movimento da mão A:

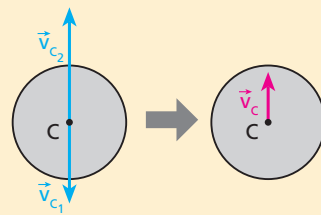
$$v_{C_1} = \frac{v_A}{2}$$

$$v_{C_1} = \frac{8{,}0 \text{ cm/s}}{2} \Rightarrow \boxed{v_{C_1} = 4{,}0 \text{ cm/s}}$$

II. Devido ao movimento da mão B:

$$v_{C_2} = \frac{v_B}{2}$$

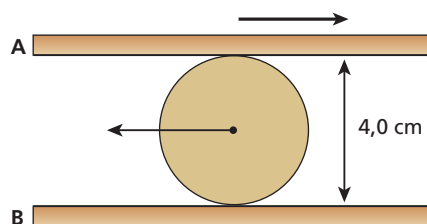
$$v_{C_2} = \frac{12 \text{ cm/s}}{2} \Rightarrow \boxed{v_{C_2} = 6{,}0 \text{ cm/s}}$$

Superpondo os efeitos parciais provocados pelas duas mãos, obtemos o efeito resultante.

III. Velocidade do eixo C:

$$v_C = v_{C_2} - v_{C_1}$$

$$v_C = 6{,}0 \frac{\text{cm}}{\text{s}} - 4{,}0 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\boxed{v_C = 2{,}0 \text{ cm/s}}$$

($\vec{v}_C$ é vertical e dirigida para cima)

89. (Fuvest-SP) Um cilindro de madeira de 4,0 cm de diâmetro rola sem deslizar entre duas tábuas horizontais móveis, **A** e **B**, como representa a figura. Em determinado instante, a tábua **A** se movimenta para a direita com velocidade de 40 cm/s e o centro do cilindro se move para a esquerda com velocidade de intensidade10 cm/s. Qual é nesse instante a velocidade da tábua **B** em módulo e sentido?

Descubra mais

1. Admita que o ponteiro dos minutos e o das horas de um determinado relógio tenham o formato de setas com pontas aguçadas e que suas dimensões lineares estejam na proporção de 4/3, com o ponteiro das horas apresentando um comprimento igual a **L**. Esses ponteiros giram em torno do centro **O** do relógio a partir da situação correspondente ao meio-dia. Se eles caracterizassem dois vetores com origens coincidentes em **O**, passíveis de serem somados vetorialmente, como seria o gráfico do módulo da soma desses vetores em função do ângulo θ, expresso em radianos, formado entre os dois? Esboce o gráfico para, pelo menos, um intervalo de tempo igual a 1 h a partir do horário inicial.

2. No Tópico 4, Movimentos circulares, você viu a definição de velocidade escalar angular, medida no SI em rad/s, e que, de forma geral, expressa a rapidez de varredura de ângulos. Em uma avaliação mais ampla, que passe pelo estudo da rotação de sólidos, a velocidade angular é uma grandeza escalar ou vetorial? Pesquise.

3. Admita que exista uma longa ferrovia retilínea denominada Norte-Sul superposta a um dos meridianos terrestres e que intercepte a Linha do Equador. Um trem-bala trafega regularmente nessa ferrovia com velocidade constante de intensidade igual a 500 km/h em relação ao solo. Considere o movimento de rotação da Terra com período de 24 h e suponha que o planeta seja esférico com raio igual a $6{,}4 \cdot 10^6$ m. Em relação a um referencial fixo no centro da Terra, qual é a intensidade da velocidade do trem, em km/h, no instante em que ele cruza a Linha do Equador?

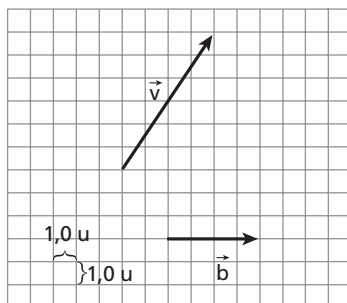
4. Se a calota de um carro que se desloca em movimento retilíneo e uniforme se desprender da roda, no instante em que ela tocar o solo, ainda em rotação em um plano perpendicular ao da estrada e deslocando-se no sentido do movimento do carro, seu centro desenvolverá uma velocidade de translação relativa ao solo menor que a do veículo. Por isso, o acessório se distanciará do automóvel, tendendo a se tornar um objeto perdido. Suponha que, no instante em que a calota toca o solo, sua velocidade angular seja igual à velocidade angular de rotação das rodas do carro. Explique por que a calota se distancia do veículo e substancie sua justificativa em expressões matemáticas.

Exercícios

nível 3

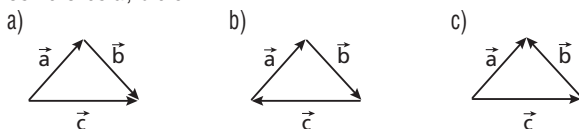
90. Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados na figura, determine o módulo de:

a) $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$;

b) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

91. Determine em cada caso a expressão vetorial que relaciona os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

a)

b)

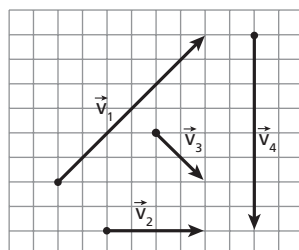
c) $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

92. No esquema, estão representados os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$. A relação vetorial correta entre esses vetores é:

a) $\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$.

b) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$.

c) $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2$.

d) $\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2$.

e) $\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_4$.

93. Seis vetores fecham um hexágono regular, dando resultante nula. Se trocarmos o sentido de três deles, alternadamente, a resultante terá módulo:

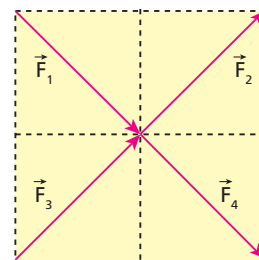
a) igual ao de um vetor componente;

b) 2 vezes o módulo de um vetor componente;

c) $2\sqrt{3}$ vezes o módulo de um vetor componente;

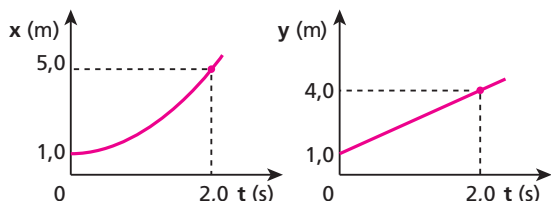
d) $3\sqrt{2}$ vezes o módulo de um vetor componente;

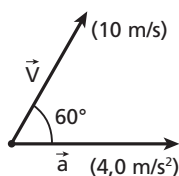
e) nulo.

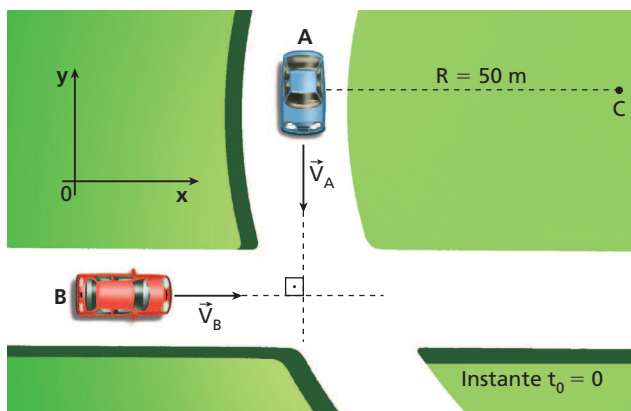
94. Na figura, estão representadas quatro forças, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$, de intensidades iguais a $\sqrt{2}$ N, superpostas às diagonais dos quadrados em que estão inseridas.

A intensidade da resultante dessas quatro forças é igual a:

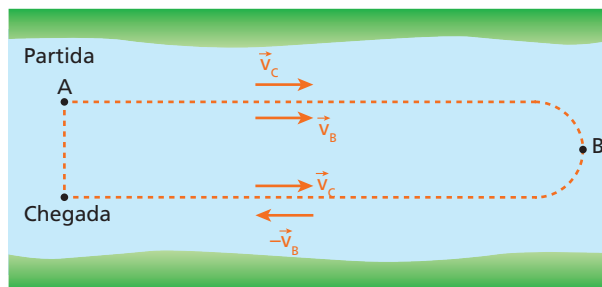
a) 0.
b) 1 N.
c) 2 N.
d) 4 N.
e) 8 N.

95. (UFC) O movimento bidimensional de uma partícula, em relação a um sistema cartesiano (x; y) é dado pelas relações:
$x = 1,0\ t^2 + 2,0\ t$ (SI)
$y = 4,0\ t^3 + 5,0$ (SI)
O vetor deslocamento entre os instantes $t_1 = 0$ e $t_2 = 1,0$ s forma com o eixo dos **x** um ângulo θ cujo cosseno vale:
a) 0,40
b) 0,60
c) 0,65
d) 0,75
e) 0,80

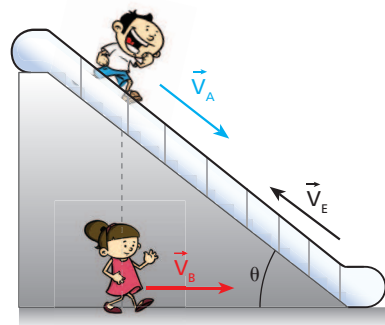
96. Considere uma partícula em movimento sobre o plano cartesiano Oxy. Suas coordenadas de posição variam em função do tempo, conforme mostram os gráficos abaixo:

No intervalo de $t_0 = 0$ a $t_1 = 2,0$ s, calcule:
a) a intensidade do deslocamento vetorial da partícula;
b) a intensidade da sua velocidade vetorial média.

97. (Fesp-SP) Em determinado instante, o vetor velocidade e o vetor aceleração de uma partícula são os representados na figura ao lado.
Qual dos pares oferecidos representa, no instante considerado, os valores da aceleração escalar α e do raio de curvatura **R** da trajetória?

a) $\alpha = 4,0\ m/s^2$ e $R = 0$.
b) $\alpha = 4,0\ m/s^2$ e $R = \infty$.
c) $\alpha = 2,0\ m/s^2$ e $R = 29$ m.
d) $\alpha = 2,0\ m/s^2$ e $R = 2,9$ m.
e) $\alpha = 3,4\ m/s^2$ e $R = 29$ m.

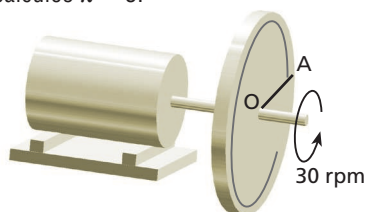
98. A figura representa dois carros, **A** e **B**, em um instante $t_0 = 0$. O referencial Oxy adotado está contido no solo, suposto plano e horizontal. O carro **A** se desloca com velocidade de módulo constante de 72 km/h em uma curva circular de centro **C** e raio R = 50 m; o carro **A** tem uma velocidade inicial de módulo 54 km/h e se desloca em uma trajetória reta.
Para evitar a colisão, o motorista do carro **B** começa a frear, no instante $t_0 = 0$, com uma aceleração de módulo 4,0 m/s².

Pede-se determinar:
a) o módulo da aceleração de **A** em relação ao solo;
b) o módulo da velocidade de **A** em relação a **B** no instante $t_0 = 0$;
c) o módulo de aceleração de **A** em relação a **B** no instante $t_0 = 0$.

99. (UFBA) Um barco vai de Manaus até Urucu descendo um rio e, em seguida, retorna à cidade de partida, conforme esquematizado na figura.

A velocidade da correnteza é constante e tem módulo v_C em relação às margens.
A velocidade do barco em relação à água é constante e tem módulo v_B.
Desconsiderando-se o tempo gasto na manobra para voltar, a velocidade escalar média do barco, em relação às margens, no trajeto total de ida e volta tem módulo dado por:

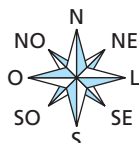
a) $\frac{V_B + V_C}{2}$.
b) $\frac{V_B - V_C}{2}$.
c) $\sqrt{V_B V_C}$.
d) $\frac{V_B^2 + V_C^2}{V_B}$.
e) $\frac{V_B^2 - V_C^2}{V_B}$.

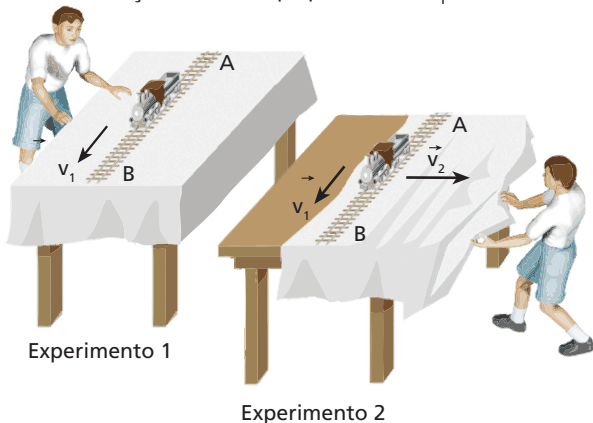
100. Ao perceber sua irmã, Beatriz, deslocando-se horizontalmente com velocidade $\vec{V}_B$ de intensidade constante 0,80 m/s ao lado de uma das escadas rolantes de um *shopping center*, cujos degraus sobem com velocidade $\vec{V}_E$ de intensidade constante 0,50 m/s, André põe-se a descer por essa escada, apresentando em relação aos degraus velocidade constante $\vec{V}_A$, de modo a manter-se sempre na mesma vertical de Beatriz. Dessa forma, eles atingem a base da escada simultaneamente, com Beatriz tendo se deslocado 6,0 m desde o instante inicial $t_0 = 0$. O esquema abaixo representa a situação proposta.

Sabendo-se que a inclinação θ da escada em relação à horizontal é de 37° (sen 37° = 0,60 e cos 37° = 0,80), pede-se determinar:
a) o instante do encontro;
b) a intensidade de $\vec{V}_A$.

101. Um inseto percorre o raio OA = 10 cm da polia representada na figura, com velocidade de intensidade constante igual a 5,0 cm/s, medida em relação à polia. Esta, por sua vez, está rigidamente acoplada ao eixo de um motor que gira de modo uniforme, realizando 30 rotações por minuto. Sabendo que o inseto passa pelo ponto O no instante $t_0 = 0$, calcule a intensidade da sua velocidade em relação à base de apoio do motor no instante $t_1 = 0{,}80$ s. Adote nos cálculos $\pi \cong 3$.

a) 8,0 cm/s
b) 10 cm/s
c) 13 cm/s
d) 15 cm/s
e) 17 cm/s

102. Um barco motorizado desenvolve, em relação às águas de um rio, velocidade constante de módulo **v**. Esse barco está subindo um trecho retilíneo do rio quando o piloto é informado de que um *container* flutuante, encerrando uma preciosa carga, caiu na água há exatamente uma hora. Nesse intervalo de tempo, a embarcação percorreu 16 km em relação às margens. Prontamente, o piloto inverte o sentido do movimento do barco e passa a descer o rio em busca do material perdido. Sabendo que as águas correm com velocidade constante de módulo 4,0 km/h, que o *container* adquire velocidade igual à das águas imediatamente após sua queda e que ele é resgatado pela tripulação do barco, determine:

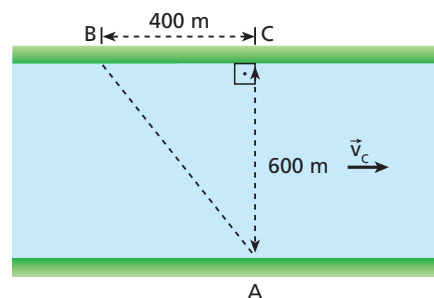
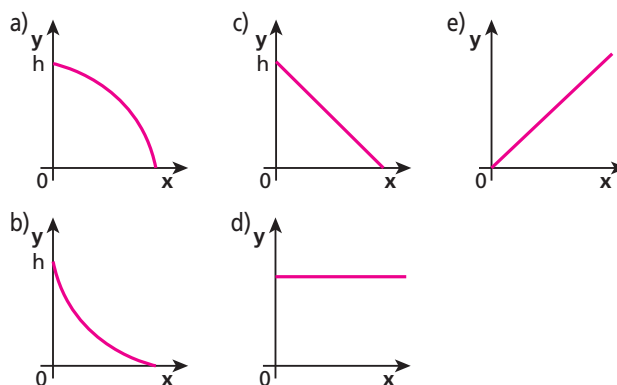
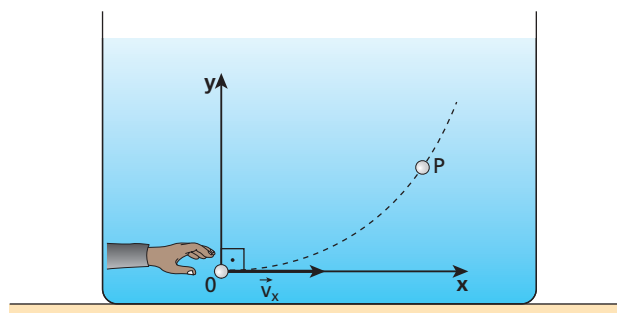
a) a distância percorrida pelo *container* desde o instante de sua queda na água até o instante do resgate;
b) o valor de **v**.

103. Um avião voa, em relação ao solo, com movimento retilíneo e uniforme de velocidade 1 000 km/h, no sentido de Leste para Oeste. O vento sopra no sentido de Norte para Sul com velocidade constante de 200 km/h. A velocidade do avião em relação ao vento tem orientação:

a) entre O e NO.
b) entre N e NE.
c) NO.
d) entre O e SO.
e) entre L e NE.

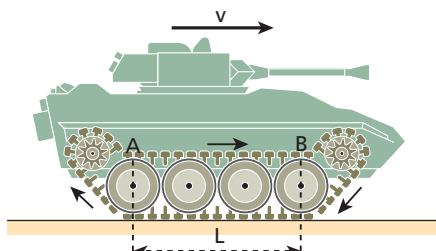
104. Nos dois experimentos esquematizados a seguir, um trem de brinquedo, percorrendo trilhos retilíneos fixos a uma toalha postada sobre uma mesa, vai de um ponto **A** a um ponto **B** com velocidade $\vec{v}_1$ de intensidade 24 cm/s. A velocidade $\vec{v}_1$ é medida em relação aos trilhos, e os pontos **A** e **B** são pontos dos trilhos. No experimento 1, o trem percorre 1,2 m de **A** até **B**. No experimento 2, o garoto puxa a toalha, sem perturbar o movimento próprio do trem, com velocidade $\vec{v}_2$ de intensidade 10 cm/s. A velocidade $\vec{v}_2$ é medida em relação à mesa e é perpendicular a $\vec{v}_1$.

Com relação ao experimento 2 e considerando o percurso de **A** até **B**, responda:

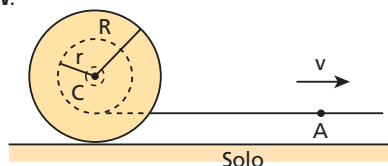
a) Qual a distância percorrida pelo trem na direção de $\vec{v}_2$?
b) Qual a distância percorrida pelo trem em relação à mesa?

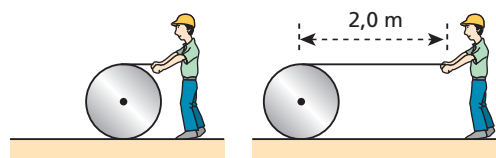
105. Considere um rio de margens paralelas e cuja correnteza tem velocidade constante de módulo v_C.
Uma lancha tem velocidade relativa às águas constante e de módulo 10 m/s.
A lancha parte do ponto **A** e atinge a margem oposta no ponto **B**, indicado na figura, gastando um intervalo de tempo de 100 s.
O valor de v_C é:

a) 2,0 m/s.
b) 4,0 m/s.
c) 6,0 m/s.
d) 8,0 m/s.
e) 10 m/s.

106. (UFPB) Uma partícula é abandonada de uma altura **h** em relação ao solo. Durante a queda, além da aceleração da gravidade, essa partícula fica sujeita a uma aceleração horizontal constante devido a uma força horizontal que atua sobre ela. Nessas condições, a trajetória da partícula está mais bem representada no gráfico:

107. No esquema a seguir, uma pequena esfera de isopor é lançada horizontalmente com velocidade $\vec{v}_x$ de intensidade 2,5 m/s no interior da água contida em um tanque. O lançamento ocorre no instante $t_0 = 0$ a partir da origem do referencial 0xy indicado. Devido à pequena influência de forças de resistência viscosa, a velocidade horizontal da esfera permanece constante e ela realiza uma trajetória parabólica de equação $y = 0{,}24x^2$, com **y** e **x** em metros, passando no ponto **P** no instante t = 2,0 s.

Determine no ponto **P**:

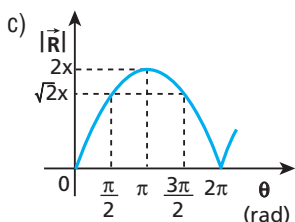
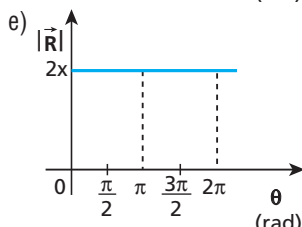
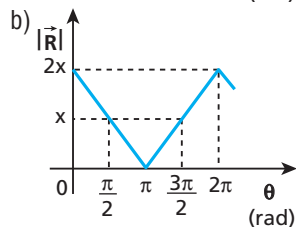
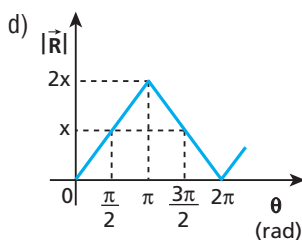
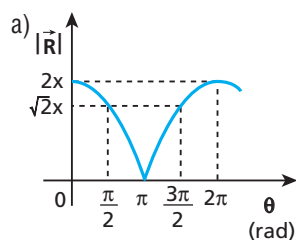
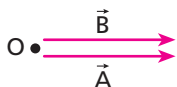
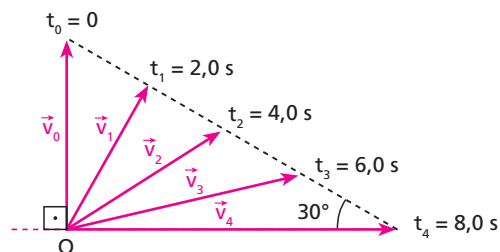
a) a intensidade da velocidade vetorial da partícula;
b) a intensidade de sua aceleração vetorial.

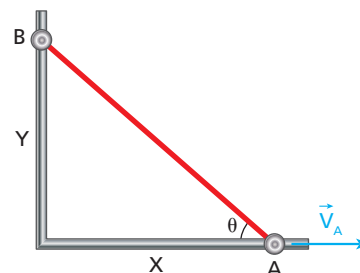
108. O tanque de guerra esquematizado na figura está em movimento retilíneo e uniforme para a direita, com velocidade de módulo **v**. Não há escorregamento das esteiras em relação ao solo nem das esteiras em relação aos roletes.

Os roletes maiores têm raio **R** e giram em torno dos respectivos eixos com frequência de 50 rpm.
Os roletes menores, das extremidades, têm raio $2\frac{R}{3}$ e também giram em torno dos respectivos eixos.
Sabendo que determinado elo da esteira da figura gasta 1,5 s para deslocar-se do ponto **A** até o ponto **B** e que nesse intervalo de tempo esse elo sofre um deslocamento de 6,0 m em relação ao solo, calcule:
a) o valor de **v**, bem como o comprimento **L** indicado na figura;
b) a frequência de rotação dos roletes menores.

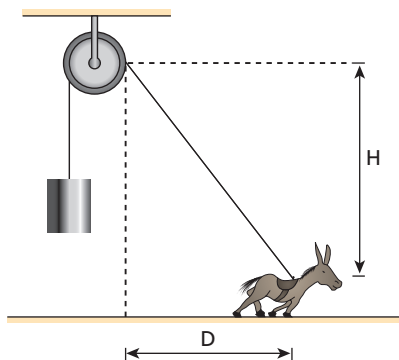
109. O esquema representa um carretel de linha sendo puxado sem escorregamento sobre o solo plano e horizontal. No instante considerado, o ponto **A** da linha tem velocidade horizontal para a direita, de intensidade **v**.

Determine nesse instante a intensidade da velocidade do ponto **C**, pertencente ao eixo longitudinal do carretel, em relação:
a) ao solo;
b) ao ponto **A**.

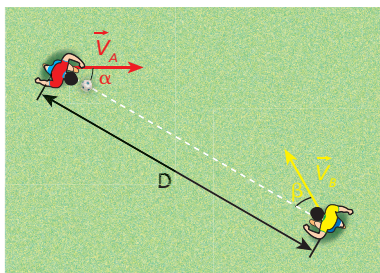
110. (AFA-SP) Um operário puxa a extremidade de um cabo que está enrolado num cilindro. À medida que o operário puxa o cabo, o cilindro vai rolando sem escorregar. Quando a distância entre o operário e o cilindro for igual a 2,0 m (ver figura abaixo), o deslocamento do operário em relação ao solo será de:

a) 1,0 m.
b) 2,0 m.
c) 4,0 m.
d) 6,0 m.

Para raciocinar um pouco mais

111. Considere dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ de módulos iguais a **x**, com origens coincidentes no ponto **O**, conforme representa a figura. O vetor $\vec{A}$ é fixo e o vetor $\vec{B}$ pode girar no plano da figura, porém mantendo sempre sua origem em **O**.
Sendo $\vec{R}$ o vetor resultante de $\vec{A} + \vec{B}$, o gráfico que melhor representa a variação do módulo de $\vec{R}$ em função do ângulo **θ** formado entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é:

a)
d)
b)
e)
c)
112. A velocidade vetorial $\vec{v}$ de uma partícula em função do tempo acha-se representada pelo diagrama vetorial da figura:

Sabendo que a intensidade de $\vec{v}_0$ é igual a 40 m/s, determine a intensidade da aceleração vetorial média da partícula no intervalo de $t_0 = 0$ a $t_4 = 8{,}0$ s.

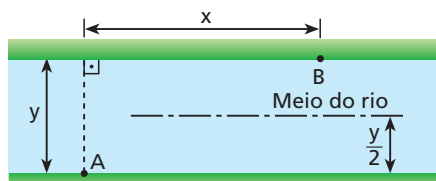
113. Na situação representada a seguir, têm-se dois trilhos perpendiculares, **X** e **Y**, com **X** na horizontal e **Y** na vertical, por onde pode deslocar-se uma barra rígida AB. Nas extremidades **A** e **B** da barra, existem dois pequenos roletes que se movimentam sem atrito acoplados aos trilhos.

Num determinado instante, verifica-se que a extremidade **A** tem velocidade vetorial horizontal dirigida para a direita, de intensidade V_A, de modo que a barra forma um ângulo θ com o trilho **X**. Qual é, nesse instante, a intensidade V_B da velocidade vetorial da extremidade **B** da barra?

114. Um burro, deslocando-se para a direita sobre o solo plano e horizontal, iça verticalmente uma carga por meio de uma polia e de uma corda inextensível, como representa a figura:

Se, no instante considerado, a velocidade da carga tem intensidade **V**, determine a intensidade da velocidade do burro em função de **V** e dos comprimentos **H** e **D** indicados no esquema.

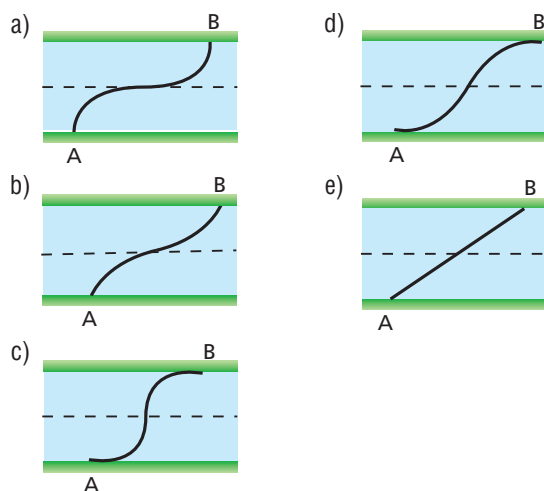
115. Numa partida de futebol, dois jogadores, **A** e **B**, deslocam-se sobre o gramado plano e horizontal com as velocidades constantes $\vec{V}_A$ e $\vec{V}_B$ representadas abaixo. No esquema, mostram-se as posições de **A** e de **B** no instante $t_0 = 0$ em que a distância que separa os dois jogadores é igual a **D**. O jogador **A** conduz a bola, enquanto **B** vai tentar desarmá-lo.

Supondo-se conhecidas as intensidades das velocidades dos jogadores, V_A e V_B, os ângulos α e β que essas velocidades formam com o segmento de reta que interliga os atletas, além da distância **D**, pede-se determinar:

a) a relação entre V_A, V_B, α e β para que ocorra encontro entre os dois jogadores.
b) na condição de encontro, com α constante, o ângulo β para que V_B seja mínima. Calcule, nesse caso, o valor de V_B.
c) o instante de encontro dos jogadores.

Enunciado para as questões 116 e 117.

Considere a figura a seguir que ilustra um rio de margens paralelas e largura **y**. A velocidade da correnteza cresce proporcionalmente com a distância a uma das margens, atingindo intensidade máxima **v** no meio do rio. Junto às margens, a velocidade da correnteza é nula.

Um barco atravessa o rio mantendo em relação às águas velocidade constante de intensidade **u** e direção perpendicular às margens. O barco parte do ponto **A** e atinge o ponto **B** depois de percorrer uma distância **x** na direção da correnteza.

A respeito dessa situação, são formulados os dois testes a seguir.

116. A alternativa que melhor representa a trajetória descrita pelo barco em relação a um observador em repouso em uma das margens é:

117. A distância **x** percorrida pelo barco na direção da correnteza vale:

a) $\frac{vy}{u}$

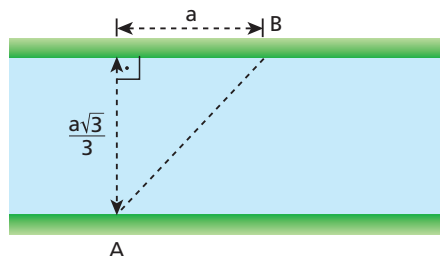
b) $\frac{vy}{2u}$

c) $\frac{vy}{4u}$

d) $\frac{uy}{2v}$

e) $\frac{uy}{4v}$

118. Uma lancha que desenvolve em relação às águas de um rio uma velocidade constante de módulo **v** deve partir do ponto **A** e chegar ao ponto **B** indicados na figura.

O rio tem largura constante e a velocidade da correnteza também é constante e de módulo v_C.

O valor mínimo possível para **v** é:

a) $v_C\sqrt{3}$

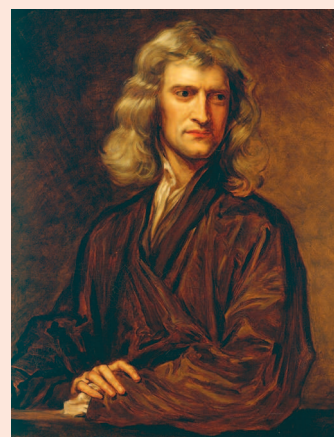
b) v_C

c) $v_C\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{v_C}{2}$

e) $\frac{v_C}{4}$

Parte II

Photo Researchers/Diomedia

Dinâmica

Science Museum, London/Diomedia

Isaac Newton (1642-1727)

Tópico 1

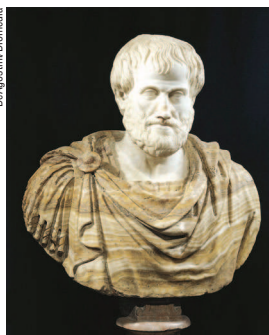
Os princípios da Dinâmica

Bloco 1

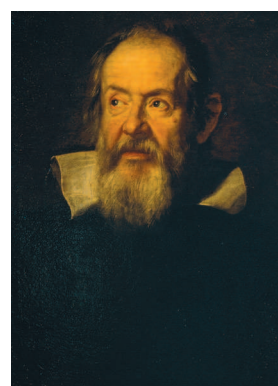
1. Introdução

Vivemos em um universo em movimento. Galáxias se movem, o mesmo acontece com estrelas, planetas, asteroides, satélites, cometas e meteoros. Uma pedra em queda, uma pessoa caminhando, um ônibus se deslocando ou um elétron se movimentando no interior de um acelerador de partículas são situações de movimento que exigem análise e compreensão.

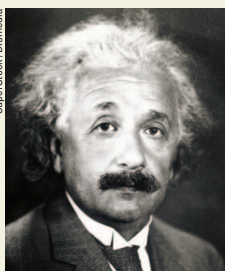
Os movimentos fascinam o espírito indagador humano desde os mais remotos tempos. Muitos pensadores formularam hipóteses na tentativa de explicá-los. O filósofo grego Aristóteles apresentou teorias que vigoraram por muitos séculos, pois se adequavam ao pensamento religioso da época. Posteriormente, entretanto, suas ideias foram em grande parte refutadas por Galileu Galilei. Depois deste, seguiram-se Isaac Newton e Albert Einstein, que deram sustentação matemática às teorias já existentes e ampliaram o conhecimento sobre os movimentos.

DeAgostini/Diomedia

Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.). Considerado um dos maiores pensadores do Ocidente, nasceu na Grécia, na cidade de Estagira (hoje Stavros), dominada na época pelos macedônios. Discípulo de Platão, durante grande parte da sua vida viveu em Atenas, onde produziu uma obra de importância fundamental para o desenvolvimento do pensamento humano, abrangendo praticamente todos os assuntos de interesse para a Filosofia e a ciência. Seus postulados constituem a base da lógica e muitas de suas citações sobre os movimentos tiveram, no mínimo, relevância histórica, já que estimularam outros pensadores a iniciar uma discussão mais fundamentada sobre o assunto.

Art Images Archive/Glow Images

Galileu Galilei (1564-1642). Italiano de Pisa, é considerado o fundador da Ciência Moderna pela introdução do **método científico** – compreensão e comprovação das leis da natureza por meio da experimentação sistemática. Estudou a queda dos corpos e inventou uma série de instrumentos científicos ligados à Hidrostática e à Astronomia. Desenvolveu o telescópio, que lhe permitiu observar a Lua, os anéis de Saturno e as manchas solares. Deu forte apoio à teoria heliocêntrica de Copérnico, o que lhe custou enfrentamentos com a Igreja, a qual lhe obrigou a abjurar perante um tribunal da Inquisição.

Art Images Archive/Glow Images

Isaac Newton (1642-1727). Inglês de Woolstorpe, fundamentou-se nos trabalhos de Galileu para apresentar as leis do movimento em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Elaborou a importantíssima Lei da Atração das Massas, que deu à Física e à Astronomia explicações essenciais. Formulou teorias sobre Óptica e estudou a decomposição da luz branca nos prismas. Ao perceber que a matemática da época era insuficiente para descrever completamente os fenômenos físicos conhecidos, desenvolveu o Cálculo Diferencial Integral, abrindo novos horizontes aos pesquisadores. Segundo Voltaire, Newton seria “o maestro que regeria a orquestra quando, um dia, todos os gênios do mundo se reunissem”.

SuperStock /Diomedia

Albert Einstein (1879--1955). Alemão de Ulm, publicou, em 1905, a Teoria da Relatividade ao descobrir que os princípios da Mecânica Clássica de Galileu e Newton eram inadequados para descrever movimentos de corpos a velocidades próximas à da luz no vácuo ($c \cong 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s). Na sua teoria, os conceitos de comprimento, massa e tempo adquiriram caráter relativo, já que dependiam da velocidade do corpo considerado. Einstein, homem genial, foi distinguido com o Nobel de Física, em 1921, por trabalhos sobre o efeito fotoelétrico. Estudou Mecânica Quântica e estabeleceu a relação de transformação de massa em energia, o que, para sua tristeza, serviu de base para a construção das bombas atômicas.

A Dinâmica é a parte da Mecânica que estuda os movimentos, considerando os fatores que os produzem e modificam. Nessa parte da Física, aparecem as leis que regem os movimentos, envolvendo os conceitos de massa, força e energia, dentre outros. Em nosso curso, abordaremos a chamada Mecânica Clássica, que é baseada nos pensamentos de Galileu e Newton. No final do volume 3, apresentaremos os fundamentos da Mecânica Relativística de Einstein.

2. O efeito dinâmico de uma força

Na Cinemática, estudamos diversas situações em que a aceleração vetorial não era nula, ou seja, as partículas movimentavam-se com velocidade vetorial variável. É o que acontece, por exemplo, nos movimentos acelerados, em que há aumento do módulo da velocidade no decorrer do tempo. Entretanto, esses movimentos de aceleração não nula foram apresentados sem que fosse feita uma pergunta fundamental: quem é o agente físico causador da aceleração? E a resposta aqui está: é a **força**.

Somente sob a ação de uma força é que uma partícula pode ser acelerada, isto é, pode experimentar variações de velocidade vetorial ao longo do tempo.

Diz-se, então, que:

Força é o agente físico cujo efeito dinâmico é a aceleração.

Aceleradíssimos!

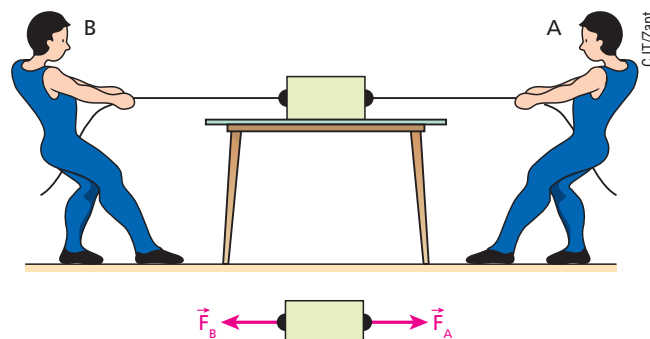
Zuma Press/Glow Images

Os *dragsters* são veículos capazes de arrancar com acelerações elevadíssimas se comparadas às dos carros comuns, conseguindo atingir 500 km/h em apenas 8 s, depois de partirem do repouso. Isso se deve a um motor especial, de grande potência, instalado em uma estrutura leve e de aerodinâmica adequada. Para obter essa aceleração, os *dragsters* requerem uma força propulsora externa que é aplicada pelo solo sobre as rodas motrizes traseiras.

3. Conceito de força resultante

Consideremos o arranjo experimental representado na figura abaixo, em que um bloco, apoiado em uma mesa horizontal e lisa, é puxado horizontalmente pelos garotos **A** e **B**.

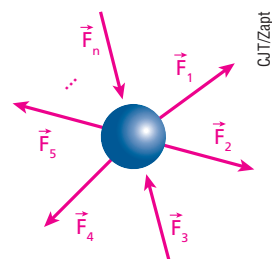
O garoto **A** puxa o bloco para a direita, aplicando-lhe uma força $\vec{F}_A$. O garoto **B**, por sua vez, puxa o bloco para a esquerda, exercendo uma força $\vec{F}_B$. Esquematicamente, temos:

CJT/Zapt

Se apenas **A** puxasse o bloco, este seria acelerado para a direita, com aceleração $\vec{a}_A$. Se, entretanto, apenas **B** puxasse o bloco, este seria acelerado para a esquerda, com aceleração $\vec{a}_B$.

Supondo que **A** e **B** puxem o bloco conjuntamente, observaremos como produto final uma aceleração $\vec{a}$, que poderá ter características diversas. Tudo dependerá da intensidade de $\vec{F}_A$ comparada à de $\vec{F}_B$:

- Se $|\vec{F}_A| > |\vec{F}_B|$, notaremos $\vec{a}$ dirigida para a direita;
- se $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$, teremos $\vec{a} = \vec{0}$;
- se $|\vec{F}_A| < |\vec{F}_B|$, $\vec{a}$ será orientada para a esquerda.

A **força resultante** de $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ equivale a uma força única que, atuando sozinha, imprime ao bloco a mesma aceleração $\vec{a}$ que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ imprimiriam se agissem em conjunto.

Considere a partícula da figura ao lado submetida à ação de um sistema de **n** forças.

A resultante ($\vec{F}$) desse sistema de forças é a soma vetorial das **n** forças que o compõem:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Nota:

- A resultante $\vec{F}$ não é uma força a mais a agir na partícula; $\vec{F}$ é apenas o resultado de uma adição vetorial.

Exercícios

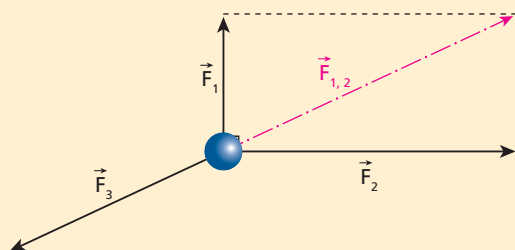
nível 1

1. E.R. Uma partícula está sujeita à ação de três forças, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, cuja resultante é nula. Sabendo que $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são perpendiculares entre si e que suas intensidades valem, respectivamente, 6,0 N e 8,0 N, determine as características de $\vec{F}_3$.

Resolução:

Inicialmente, temos que:

> Se a resultante de três forças aplicadas em uma partícula é nula, então as três forças devem estar contidas no mesmo plano.

No caso, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ determinam um plano. A força $\vec{F}_3$ (equilibrante da soma de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$) deve pertencer ao plano de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_2$ e, além disso, ser oposta em relação à resultante de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_{1,2}; \quad F_3 = F_{1,2}$$

A intensidade de $\vec{F}_3$ pode ser calculada pelo **Teorema de Pitágoras**:

$$F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 \Rightarrow F_3^2 = (6,0)^2 + (8,0)^2$$

$$F_3 = 10 \text{ N}$$

Respondemos, finalmente, que as características de $\vec{F}_3$ são:

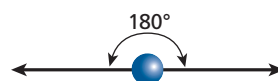
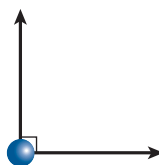
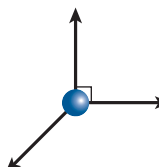
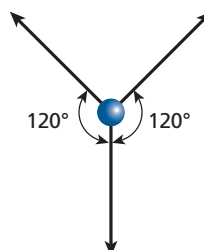
- **intensidade**: 10 N;
- **direção**: a mesma da resultante de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$;
- **sentido**: contrário ao da resultante de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

2. Nos esquemas de I a IV, é representada uma partícula e todas as forças que agem sobre ela. As forças têm a mesma intensidade **F** e estão contidas em um mesmo plano. Em que caso (ou casos) a força resultante na partícula é nula?

I. 180°

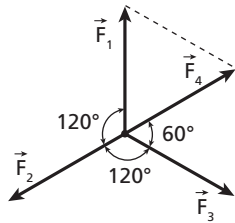
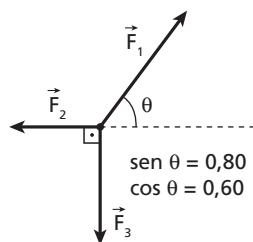
II.

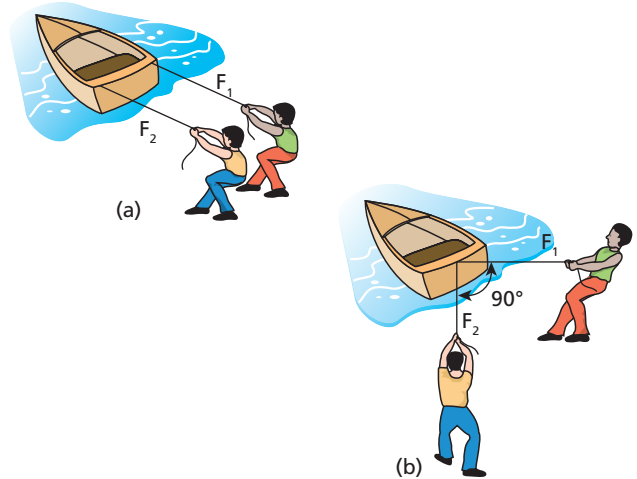
III.

IV. 120° 120°

Exercícios

nível 2

3. Com base no sistema de forças coplanares de mesma intensidade, representado abaixo, indique a alternativa correta:

a) $\vec{F}_1$ é resultante da soma de $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$.
b) $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$.
c) $\vec{F}_1$ é resultante da soma e $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$.
d) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.
e) $\vec{F}_2$ é resultante da soma de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$.

4. Um ponto material está sob a ação das forças coplanares $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ indicadas na figura abaixo.

Sabendo que as intensidades de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ valem, respectivamente, 100 N, 66 N e 88 N, calcule a intensidade da força resultante do sistema.

5. (PUC-SP) Os esquemas seguintes mostram um barco sendo retirado de um rio por dois homens. Em (**a**), são usadas cordas que transmitem ao barco forças paralelas de intensidades F_1 e F_2. Em (**b**), são usadas cordas inclinadas de 90° que transmitem ao barco forças de intensidades iguais às anteriores.

Sabe-se que, no caso (**a**), a força resultante transmitida ao barco tem valor 700 N e, no caso (**b**), 500 N. Nessas condições, calcule F_1 e F_2.

Bloco 2

4. Equilíbrio de uma partícula

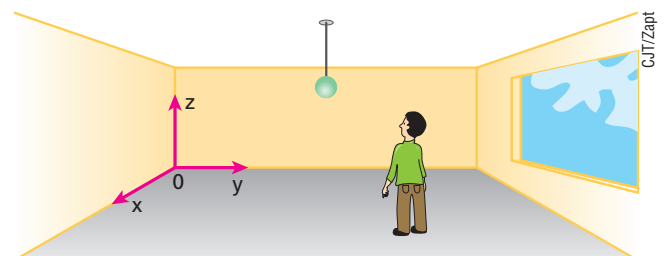
Dizemos que uma partícula está em **equilíbrio** em relação a um dado referencial quando a resultante das forças que nela agem é nula.

Distinguem-se dois tipos de equilíbrio para uma partícula: equilíbrio estático e equilíbrio dinâmico.

Equilíbrio estático

Dizemos que uma partícula está em **equilíbrio estático** quando se apresenta em repouso em relação a um dado referencial.

Estando em equilíbrio estático, uma partícula tem velocidade vetorial constante e nula ($\vec{v}$ = constante = $\vec{0}$).

Considere, por exemplo, a situação da figura abaixo, em que um homem pendurou no teto de uma sala uma pequena esfera, utilizando um cordão. Suponha que ele tenha associado a um dos cantos da sala um referencial cartesiano, formado pelos eixos **x** (abscissas), **y** (ordenadas) e **z** (cotas).

Se a posição da esfera é invariável em relação ao referencial adotado, temos aí uma situação de equilíbrio estático. A esfera está em repouso (velocidade vetorial nula) e a resultante das forças que nela agem é nula.

Livre de ações gravitacionais significativas e com os sistemas propulsores desligados, a nave encontra-se em equilíbrio dinâmico.

Luis Fernando R. Tucillo

Representação artística de nave espacial em MRU – equilíbrio dinâmico.

5. Conceito de inércia

Inércia é a tendência dos corpos em conservar sua velocidade vetorial.

Exemplifiquemos o conceito de inércia abordando uma situação conhecida de todos: trata-se do corriqueiro caso do passageiro que viaja de pé no corredor de um ônibus.

Suponhamos que o ônibus esteja parado diante de um semáforo. Quanto valem as velocidades do ônibus e do passageiro em relação à Terra? Zero! Então, o ônibus arranca e, como se diz na linguagem cotidiana, o passageiro é jogado para trás. Nesse instante, ele está manifestando **inércia de repouso**, pois tende a continuar, em relação à Terra, parado no mesmo lugar. É importante frisar que, em relação à Terra, o passageiro não foi "jogado para trás": na realidade, seu corpo apenas manifestou uma tendência de manter a velocidade nula.

Vamos supor ainda que o ônibus esteja viajando por uma estrada retilínea, plana e horizontal, com velocidade de 60 km/h. Quanto vale a velocidade do passageiro, nesse caso, em relação à Terra? Também 60 km/h. Então, o ônibus freia bruscamente e o passageiro é "atirado para a frente". Nessa situação, ele está manifestando **inércia de movimento**, pois tende a continuar, em relação à Terra, com a mesma velocidade (60 km/h), em movimento retilíneo e uniforme. É importante destacar que, em relação à Terra, o passageiro não foi "atirado para a frente": na realidade, seu corpo apenas manifestou uma tendência de manter a velocidade anterior à freada.

O passageiro entrará em movimento a partir do repouso ou será freado a partir de 60 km/h se receber do meio que o cerca uma **força**. Só com a aplicação de uma força externa adequada é que suas tendências inerciais serão vencidas e, consequentemente, sua velocidade vetorial será alterada.

Com base no que foi exposto, podemos concluir:

Tudo o que possui matéria tem inércia.
A inércia é uma característica própria da matéria.

E ainda:

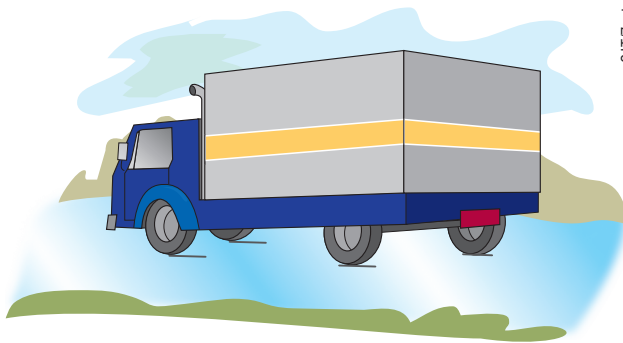
Para que as tendências inerciais de um corpo sejam vencidas, é necessária a intervenção de força externa.

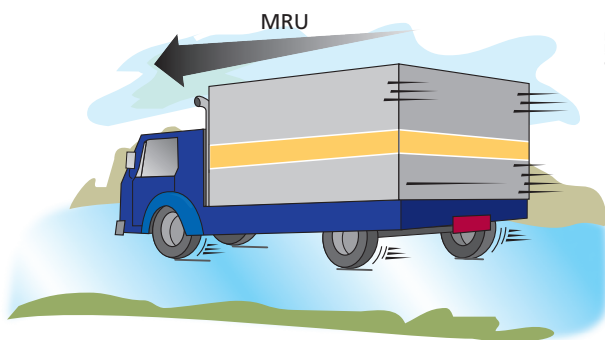
6. O Princípio da Inércia (1ª Lei de Newton)

Este princípio está implícito nos itens anteriores. Vamos agora formalizá-lo por meio de dois enunciados equivalentes.

1º Enunciado

Se a força resultante sobre uma partícula é nula, ela permanece em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

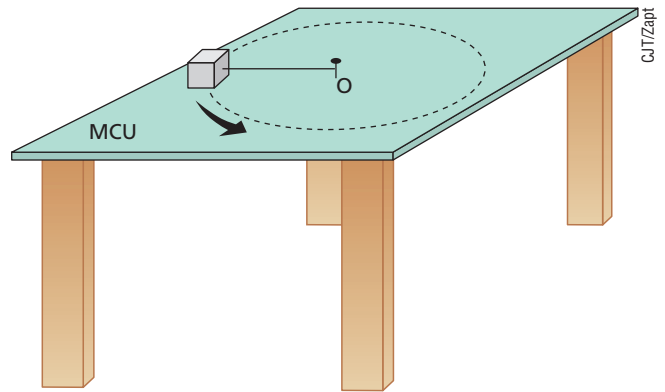
Como exemplo, admitamos um grande lago congelado, cuja superfície é perfeitamente lisa, plana e horizontal. No local, não há presença de ventos e a influência do ar é desprezível. Num caminhão parado no meio do lago, a força resultante é nula. Se o motorista tentar arrancar com o veículo, não conseguirá, pois, devido à inexistência de atrito, o caminhão permanecerá "patinando", sem sair do lugar.

Quando em repouso, enquanto a força resultante for nula, o caminhão permanecerá em repouso, por inércia.

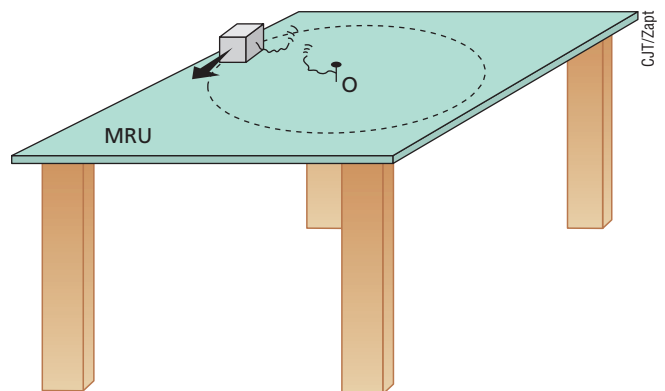
Vamos supor, no entanto, que, de algum modo, o caminhão seja colocado em movimento. Nesse caso, sua velocidade será constante, ou seja, o veículo seguirá em linha reta, em movimento uniforme. Se o motorista virar o volante para qualquer lado ou acionar os freios, nada ocorrerá. Pelo fato de a força resultante ser nula, o movimento do caminhão não será afetado.

Quando em movimento, enquanto a força resultante for nula, o caminhão seguirá em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

2º Enunciado

> Um corpo livre de uma força externa resultante é incapaz de variar sua própria velocidade vetorial.

Para entender o Princípio da Inércia sob esse ponto de vista, analisemos o exemplo a seguir.

Na figura a seguir, está representada uma mesa plana, horizontal e perfeitamente lisa, sobre a qual um bloco, ligado à mesa por um fio inextensível, realiza um movimento circular e uniforme (MCU) em torno do centro **O**.

Nesse caso, embora tenha módulo constante, a velocidade vetorial do bloco varia em direção de ponto para ponto da trajetória. Quem provoca essa variação na direção da velocidade do bloco? É a força aplicada pelo fio que, em cada instante, tem a direção do raio da circunferência e está dirigida para o centro **O**. É ela quem mantém o bloco em movimento circular.

Suponha que, em dado instante, o fio se rompe. O bloco "escapará pela tangente", passando a descrever, sobre a mesa, um movimento retilíneo e uniforme (MRU).

Pode-se concluir, então, que, eliminada a força exercida pelo fio, o bloco torna-se incapaz de, por si só, variar sua velocidade vetorial. Ele segue, por inércia, em trajetória reta com velocidade constante.

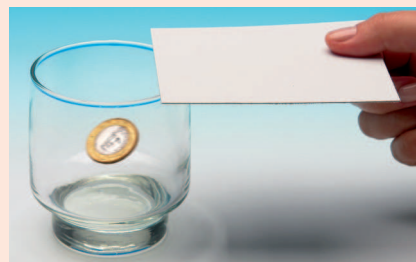
Note que, para variar a velocidade vetorial de um corpo, é necessária a intervenção de uma força resultante, fruto das ações de agentes externos ao corpo. Sozinho (livre de força resultante externa), um corpo em movimento mantém velocidade vetorial constante, por inércia.

Faça você mesmo

Consiga uma pequena placa retangular bem lisa, de acrílico ou papelão, uma moeda e um copo.

Coloque a moeda sobre a placa e esta sobre a boca do copo, apoiando todo o conjunto em cima de uma mesa, conforme sugere a fotografia.

Puxando vigorosa e rapidamente a placa, na direção horizontal, você perceberá a moeda cair dentro do copo, atingindo seu fundo.

A explicação para o ocorrido é a seguinte: durante a retirada da placa, a força resultante na moeda é aquela recebida do plano de apoio, que, além de não ter intensidade expressiva, atua durante um intervalo de tempo muito pequeno. Por isso, nesse curto intervalo de tempo, a moeda mantém-se praticamente em repouso, **por inércia**. Após a retirada da placa, entretanto, a força da gravidade (peso) faz com que a velocidade vertical da moeda cresça a partir de zero, vencendo sua inércia de repouso, conduzindo-a ao fundo do copo.

Imagens: Cristina Xavier

Exercícios

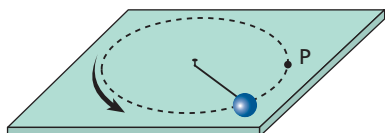
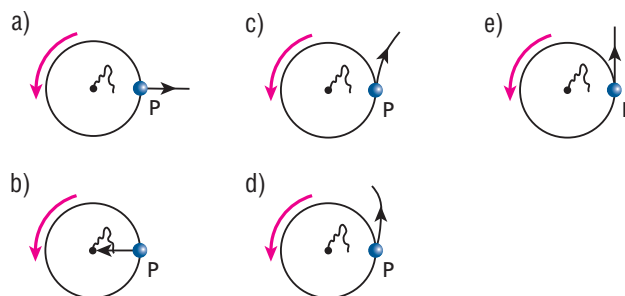
nível 1

6. Em relação a um referencial inercial, tem-se que a resultante de todas as forças que agem em uma partícula é nula. Então, é correto afirmar que:

a) a partícula está, necessariamente, em repouso;
b) a partícula está, necessariamente, em movimento retilíneo e uniforme;
c) a partícula está, necessariamente, em equilíbrio estático;
d) a partícula está, necessariamente, em equilíbrio dinâmico;
e) a partícula, em movimento, estará descrevendo trajetória retilínea com velocidade constante.

7. Indique a alternativa que está em desacordo com o Princípio da Inércia.

a) A velocidade vetorial de uma partícula só pode ser variada se esta estiver sob a ação de uma força resultante não nula.
b) Se a resultante das forças que agem em uma partícula é nula, dois estados cinemáticos são possíveis: repouso ou movimento retilíneo e uniforme.
c) Uma partícula livre da ação de uma força externa resultante é incapaz de vencer suas tendências inerciais.
d) Numa partícula em movimento circular e uniforme, a resultante das forças externas não pode ser nula.
e) Uma partícula pode ter movimento acelerado sob força resultante nula.

8. (Cesgranrio-RJ) Uma bolinha descreve uma trajetória circular sobre uma mesa horizontal sem atrito, presa a um prego por um cordão (figura seguinte).

Quando a bolinha passa pelo ponto **P**, o cordão que a prende ao prego arrebenta. A trajetória que a bolinha então descreve sobre a mesa é:

a)
c)
e)
b)
d)
9. *Superman*, famoso herói das histórias em quadrinhos e do cinema, acelera seu próprio corpo, freia e faz curvas sem utilizar sistemas propulsores, tais como asas e foguetes, entre outros. É possível a existência de um herói como o *Superman*? Fundamente sua resposta em leis físicas.

10. Analise as proposições a seguir:

I. O cinto de segurança, item de uso obrigatório no trânsito brasileiro, visa aplicar aos corpos do motorista e dos passageiros forças que contribuam para vencer sua inércia de movimento.
II. Um cachorro pode ser acelerado simplesmente puxando com a boca a guia presa à coleira atada em seu pescoço.
III. O movimento orbital da Lua ao redor da Terra ocorre por inércia.

Estão corretas:

a) I, II e III;
b) Somente I e II;
c) Somente II e III;
d) Somente I e III;
e) Somente I.

Exercícios

nível 2

11. (Uepa) Na parte final de seu livro, *Discursos e demonstrações concernentes a duas novas ciências*, publicado em 1638, Galileu Galilei trata do movimento de um projétil da seguinte maneira:

"Suponhamos um corpo qualquer, lançado ao longo de um plano horizontal, sem atrito; sabemos... que esse corpo se moverá indefinidamente ao longo desse mesmo plano, com um movimento uniforme e perpétuo, se tal plano for ilimitado."

O princípio físico com o qual se pode relacionar o trecho destacado acima é:

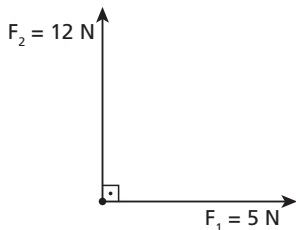
a) o Princípio da Inércia ou 1ª Lei de Newton.
b) o Princípio Fundamental da Dinâmica ou 2ª Lei de Newton.
c) o Princípio da Ação e Reação ou 3ª Lei de Newton.
d) a Lei da Gravitação Universal.
e) o Teorema da Energia Cinética.

12. A respeito de uma partícula em equilíbrio, examine as proposições abaixo:

I. Não recebe a ação de forças.
II. Descreve trajetória retilínea.
III. Pode estar em repouso.
IV. Pode ter altas velocidades.

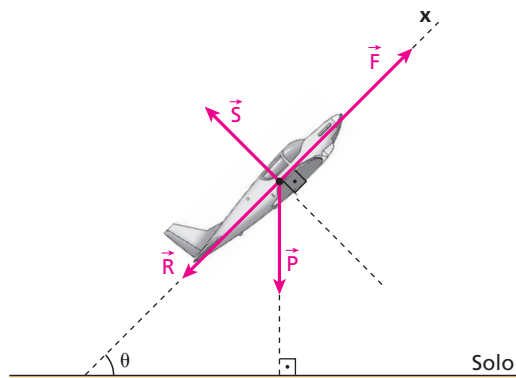
São corretas:

a) todas;
b) apenas I e II;
c) apenas I e III;
d) apenas III e IV;
e) apenas I, III e IV.

13. (Puccamp-SP) Submetida à ação de três forças constantes, uma partícula se move em linha reta com movimento uniforme. A figura abaixo representa duas dessas forças:

A terceira força tem módulo:

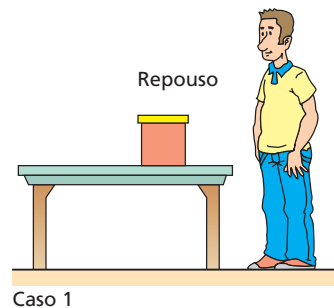
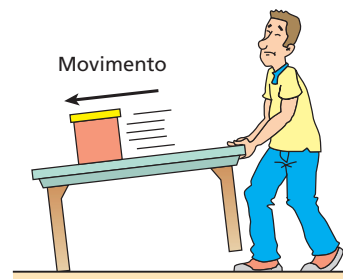
a) 5.
b) 7.
c) 12.
d) 13.
e) 17.

14. O avião esquematizado na figura está em voo ascendente, de modo que sua trajetória é uma reta **x**, inclinada de um ângulo **θ** em relação ao solo, admitido plano e horizontal. Nessa situação, o avião recebe a ação de quatro forças:

$\vec{P}$: força da gravidade ou peso (perpendicular ao solo);
$\vec{S}$: força de sustentação do ar (perpendicular a **x**);
$\vec{F}$: força propulsora (na direção de **x**);
$\vec{R}$: força de resistência do ar (na direção de **x**).

Supondo que o movimento do avião seja uniforme, analise as proposições a seguir e identifique as corretas:

(01) O avião está em equilíbrio dinâmico.
(02) $\vec{P} + \vec{S} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$
(04) $|\vec{F}| = |\vec{R}| + |\vec{P}| \text{ sen } \theta$
(08) $|\vec{S}| = |\vec{P}|$
(16) O avião está em movimento, por inércia.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

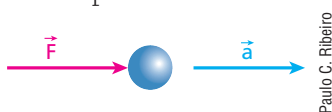
15. Nas situações 1 e 2 esquematizadas a seguir, um mesmo bloco de peso $\vec{P}$ é apoiado sobre a superfície plana de uma mesa, que é mantida em repouso em relação ao solo horizontal. No caso 1, o bloco permanece parado e, no caso 2, ele desce a mesa inclinada, deslizando com velocidade vetorial constante.

Sendo $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ as forças totais de contato que a mesa aplica sobre o bloco nos casos 1 e 2, respectivamente, aponte a alternativa **incorreta**:

a) $|\vec{F_1}| = |\vec{P}|$.
b) $\vec{F_1} = -\vec{P}$.
c) $\vec{F_2}$ é perpendicular ao solo.
d) $\vec{F_1} = \vec{F_2}$.
e) $|\vec{F_2}| > |\vec{P}|$.

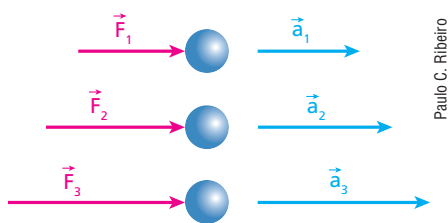
Bloco 3

7. O Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton)

Consideremos uma partícula submetida à ação de uma força resultante $\vec{F}$. O que devemos esperar que aconteça com essa partícula? Ela adquirirá uma aceleração $\vec{a}$, isto é, experimentará variações de velocidade com o decorrer do tempo.

Supondo que $\vec{F}$ seja horizontal e dirigida para a direita, qual será a direção e o sentido de $\vec{a}$? Mostra a experiência que $\vec{a}$ terá a mesma orientação de $\vec{F}$, ou seja, será horizontal para a direita.

Se $\vec{F}$ é a resultante das forças que agem em uma partícula, esta adquire uma aceleração $\vec{a}$ de mesma orientação que $\vec{F}$, isto é, $\vec{a}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido que $\vec{F}$.

Se aumentarmos a intensidade de $\vec{F}$, o que ocorrerá? Verifica-se que esse aumento provoca aumento diretamente proporcional no módulo de $\vec{a}$. A partícula experimenta variações de velocidade cada vez maiores, para um mesmo intervalo de tempo.

Considere o exemplo esquematizado abaixo, em que uma mesma partícula é submetida, sucessivamente, à ação das forças resultantes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$. Consequentemente, como já dissemos, a partícula irá adquirir, respectivamente, as acelerações $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ e $\vec{a}_3$.

Assim, se $F_3 > F_2 > F_1$, temos $a_3 > a_2 > a_1$. Lembrando que o módulo da aceleração é diretamente proporcional à intensidade da força, podemos escrever:

$$\frac{F_3}{a_3} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_1}{a_1} = k$$

em que **k** é a constante da proporcionalidade.

A constante **k** está ligada à dificuldade de se produzir na partícula determinada aceleração, isto é, refere-se à medida da inércia da partícula. Essa constante denomina-se **massa** (inercial) da partícula e é simbolizada por **m**. Daí segue que:

$$\frac{F_3}{a_3} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_1}{a_1} = m$$

Ou, de forma genérica:

$$\frac{F}{a} = m \Rightarrow F = m\,a$$

Escrevendo essa expressão na forma vetorial, temos:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Tendo em vista o exposto, cabe ao Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton) o seguinte enunciado:

> Se $\vec{F}$ é a resultante das forças que agem em uma partícula, então, em consequência de $\vec{F}$, a partícula adquire na mesma direção e no mesmo sentido da força uma aceleração $\vec{a}$, cujo módulo é diretamente proporcional à intensidade da força.
>
> A expressão matemática da 2ª Lei de Newton é:
>
> $$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

No SI, a unidade de massa é o quilograma (kg), que corresponde à massa de um protótipo cilíndrico de platina iridiada, conservado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França.

Para se ter uma noção simplificada da unidade **quilograma**, basta considerar 1 litro de água pura, que tem massa de 1 quilograma, a 4 °C.

Um litro de leite tipo C, que tem uma grande porcentagem de água, apresenta massa muito próxima de 1 kg.

Outras unidades de massa frequentemente usadas são:

- grama (g): $1\ g = 0{,}001\ kg = 10^{-3}\ kg$;
- miligrama (mg): $1\ mg = 0{,}001\ g = 10^{-6}\ kg$;
- tonelada (t): $1\ t = 1\,000\ kg = 10^{3}\ kg$.

Conforme vimos na Cinemática, a unidade SI de aceleração é o metro por segundo ao quadrado (m/s^2).

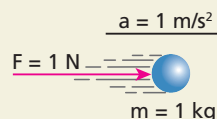
Considerando que $\vec{F} = m\,\vec{a}$, podemos deduzir a unidade de força:

$$\text{unid (F)} = \text{unid (m)} \cdot \text{unid (a)}$$

No SI:

$$\text{unid (F)} = \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{newton (N)}$$

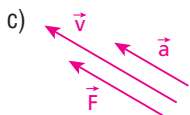
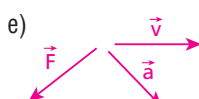
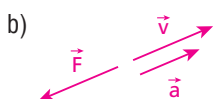
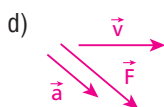
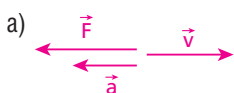
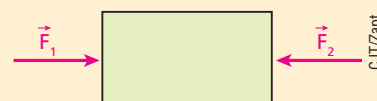
Costuma-se definir 1 newton da seguinte maneira:

Um newton é a intensidade da força que, aplicada em uma partícula de massa igual a 1 quilograma, produz na sua direção e no seu sentido uma aceleração de módulo 1 metro por segundo, por segundo.

A medição de massa e das demais grandezas físicas que com ela se relacionam – como força, energia e quantidade de movimento – depende de um objeto cilíndrico de platina-irídio com diâmetro e altura iguais a 39 mm (do tamanho de uma ameixa), confeccionado há mais de cem anos. Esse protótipo, entretanto, tem se mostrado inadequado, já que foi comprovada uma alteração de sua massa em cerca de 50 microgramas desde a sua elaboração. Por isso, está se cogitando um padrão de medida de massa baseado em algum fenômeno natural, que se repita da mesma forma independentemente de época ou condições externas. Duas abordagens despontam como mais promissoras: uma está relacionada à massa de uma determinada quantidade de carbono-12, e outra envolve fenômenos quânticos.

Outras duas grandezas físicas fundamentais – o comprimento e o tempo – já dispõem de unidades de medida no SI definidas a partir de fenômenos naturais. Um metro equivale à distância percorrida pela luz no vácuo durante 1/299 792 458 de segundo. Por outro lado, um segundo corresponde à duração de 9 192 631 770 períodos da radiação emitida pelo átomo de césio-133 na transição entre dois níveis hiperfinos do seu estado fundamental.

Fotografia de quilograma-padrão exposto no Escritório Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, França.

Exercícios — nível 1

16. Um corpúsculo desloca-se em movimento retilíneo e acelerado de modo que, num instante t, sua velocidade é $\vec{v}$. Sendo $\vec{F}$ e $\vec{a}$, respectivamente, a força resultante e a aceleração no instante referido, aponte a alternativa que traz um possível esquema para os vetores $\vec{v}$, $\vec{F}$ e $\vec{a}$.

a)
d)
b)
e)
c)
17. E.R. O bloco da figura tem massa igual a 4,0 kg e está sujeito à ação exclusiva das forças horizontais $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$:

Sabendo que as intensidades de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_2$ valem, respectivamente, 30 N e 20 N, determine o módulo da aceleração do bloco.

Resolução:

Como $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$, o bloco é acelerado horizontalmente para a direita por uma força resultante $\vec{F}$, cuja intensidade é dada por:

$$F = F_1 - F_2$$

$$F = (30 - 20)\text{ N} \Rightarrow \boxed{F = 10\text{ N}}$$

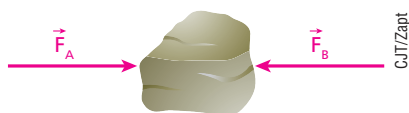
A aceleração $\vec{a}$ do bloco pode ter seu módulo calculado pelo **Princípio Fundamental da Dinâmica**:

$$F = m\,a \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{10\text{ N}}{4{,}0\text{ kg}} \Rightarrow \boxed{a = 2{,}5\text{ m/s}^2}$$

18. Uma partícula de massa 2,0 kg está em repouso quando, a partir do instante $t_0 = 0$, passa a agir sobre ela uma força resultante constante, de intensidade 6,0 N.

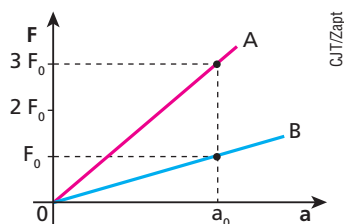
a) Calcule o módulo da aceleração da partícula.

b) Trace o gráfico de sua velocidade escalar em função do tempo desde $t_0 = 0$ até $t_1 = 4,0$ s.

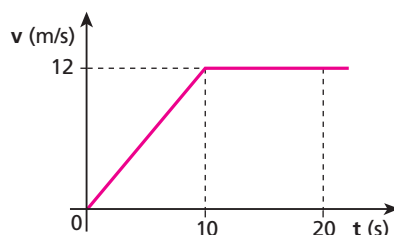
19. Um fragmento de meteorito de massa 1,0 kg é acelerado no laboratório a partir do repouso pela ação exclusiva das forças $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$, que têm mesma direção, mas sentidos opostos, como representa o esquema a seguir.

Sabendo que a aceleração do corpo tem módulo 2,0 m/s² e que $|\vec{F}_A| = 10$ N, determine:

a) $|\vec{F}_A|$, se $|\vec{F}_B| < |\vec{F}_A|$ e se $|\vec{F}_B| > |\vec{F}_A|$;

b) o módulo da velocidade do corpo ao completar 25 m de deslocamento.

20. O gráfico a seguir mostra a variação do módulo da aceleração (**a**) de duas partículas **A** e **B** com a intensidade (**F**) da força resultante que atua sobre elas.

Determine a relação m_A/m_B entre as massas de **A** e de **B**.

21. Aplica-se a mesma força resultante em duas partículas **A** e **B** de massas respectivamente iguais a **M** e a **4M**. Qual a relação entre as intensidades das acelerações adquiridas por **A** e **B**?

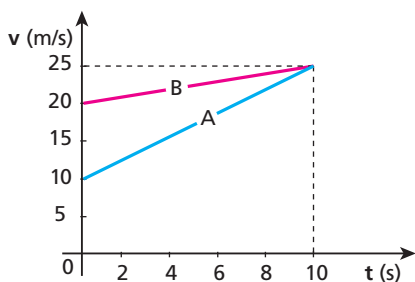
22. A velocidade escalar de um carrinho de massa 6,0 kg que percorre uma pista retilínea varia em função do tempo, conforme o gráfico ao lado. Determine:

a) a velocidade escalar média do carrinho no intervalo de 0 a 20 s;

b) a intensidade da força resultante no carrinho nos intervalos de 0 a 10 s e de 10 s a 20 s.

Exercícios nível 2

23. (Ufesp-SP) Para que um carrinho de massa **m** adquira certa aceleração de módulo **a**, é necessário que a força resultante tenha módulo **F**. Qual é o módulo da força resultante para um carrinho de massa **2m** adquirir uma aceleração de módulo **3a**?

24. Uma força resultante $\vec{F}$ produz num corpo de massa **m** uma aceleração de intensidade 2,0 m/s² e num corpo de massa **M**, uma aceleração de intensidade 6,0 m/s². Qual a intensidade da aceleração que essa mesma força produziria se fosse aplicada nesses dois corpos unidos?

25. (PUC-PR) Dois corpos, **A** e **B**, de massas M_A e M_B, estão apoiados em uma superfície horizontal sem atrito. Sobre eles são aplicadas forças iguais. A variação de suas velocidades é dada pelo gráfico. Para os corpos, é correto afirmar que:

a) $\frac{M_A}{M_B} = 4$

b) $\frac{M_A}{M_B} = 3$

c) $\frac{M_A}{M_B} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{M_A}{M_B} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{M_A}{M_B} = 2$

26. Uma partícula de massa 4,0 kg parte do repouso no instante $t_0 = 0$, sob a ação de uma força resultante constante. Sabendo que no instante $t_1 = 2,0$ s sua velocidade escalar vale 10 m/s, calcule:

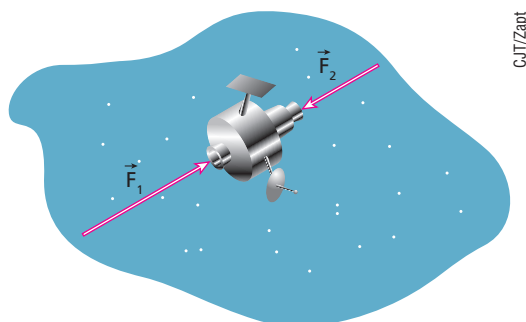
a) a aceleração escalar da partícula;

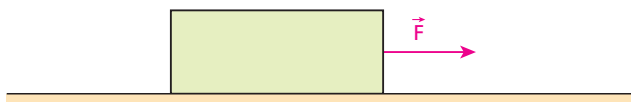
b) a intensidade da força resultante.

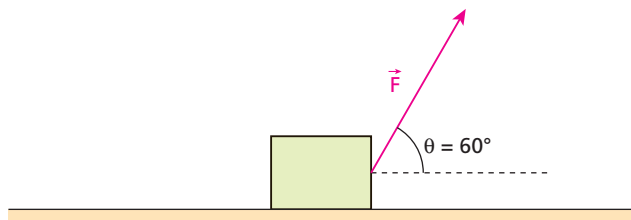
27. (Unicamp-SP) Um carro de massa 800 kg, andando em linha reta a 108 km/h, freia bruscamente e pára em 5,0 s.

a) Qual o módulo da desaceleração do carro, admitida constante?

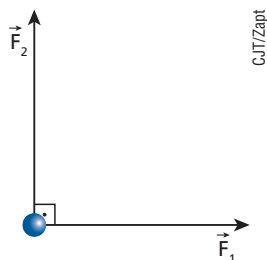
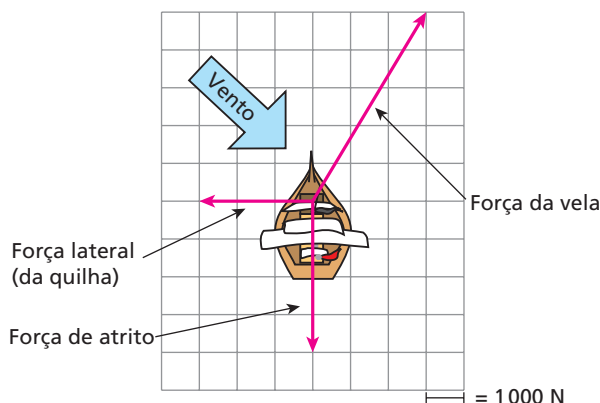
b) Qual a intensidade da força de atrito que a pista aplica sobre o carro durante a freada?

28. Uma espaçonave de massa $8,0 \cdot 10^2$ kg em movimento retilíneo e uniforme num local de influências gravitacionais desprezíveis tem ativados simultaneamente dois propulsores que a deixam sob a ação de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ de mesma direção e sentidos opostos, conforme está representado no esquema a seguir:

Sendo as intensidades de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ respectivamente iguais a 4,0 kN e 1,6 kN, determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração vetorial adquirida pela espaçonave.

29. (Puccamp-SP) Um corpo de massa 4,0 kg é arrastado num plano horizontal por uma força horizontal constante de intensidade F = 20 N, adquirindo aceleração a = 2,0 m/s².

Qual a intensidade da força de atrito que atua sobre o corpo?

30. Uma caixa contendo livros, com massa igual a 25 kg, será arrastada a partir do repouso sobre o solo plano e horizontal sob a ação de uma força constante $\vec{F}$ de intensidade 160 N, representada na figura abaixo:

Sabendo-se que ao longo do deslocamento a caixa receberá do solo uma força de atrito de intensidade 50 N, pede-se determinar:

a) a intensidade da aceleração que será adquirida pela caixa;
b) o intervalo de tempo que ela gastará para percorrer os primeiros 2,4 m.

31. O esquema a seguir representa uma partícula de massa igual a 1,0 kg, sujeita à ação exclusiva das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, perpendiculares.
Sabendo que $|\vec{F}_1| = 3{,}0$ N e que o módulo da aceleração resultante da partícula vale 5,0 m/s², determine $|\vec{F}_2|$.

32. (Unicamp-SP – mod.) Na viagem do descobrimento, a frota de Cabral precisou navegar contra o vento uma boa parte do tempo. Isso só foi possível devido à tecnologia de transportes marítimos mais moderna da época: as caravelas. Nelas, o perfil das velas é tal que a direção do movimento pode formar um ângulo agudo com a direção do vento, como indicado pelo diagrama de forças a seguir:

Considere uma caravela com massa de 20 000 kg.

a) Determine a intensidade, a direção e o sentido da força resultante sobre a embarcação.
b) Calcule o módulo da aceleração da caravela.

33. E.R. Uma bola está em repouso na marca do pênalti quando um jogador transmite a ela um poderoso chute rasteiro, fazendo-a sair com uma velocidade de 20 m/s. Sabendo que a bola tem massa de 0,50 kg e que a duração do impacto do pé do jogador com ela foi de $1{,}0 \cdot 10^{-3}$ s, calcule a intensidade da força média recebida pela bola por ocasião do chute.

Resolução:

Apliquemos à bola a **2ª Lei de Newton**, considerando que a força recebida por ocasião do chute é a resultante:

$$F_m = m\,a$$

No caso, o módulo da aceleração média que a bola adquire pode ser dado por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{final} - v_{inicial}}{\Delta t}$$

Assim:

$$F_m = m \frac{v_{final} - v_{inicial}}{\Delta t}$$

Sendo $m = 0{,}50$ kg, $v_{final} = 20$ m/s, $v_{inicial} = 0$ e $\Delta t = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ s, calculemos F_m, que é a intensidade da força média que a bola recebe por ocasião do chute:

$$F_m = 0{,}50 \frac{(20 - 0)}{1{,}0 \cdot 10^{-3}} \text{ (N)} \Rightarrow \boxed{F_m = 1{,}0 \cdot 10^4 \text{ N}}$$

34. Um projétil de massa 10 g repousa na câmara de um fuzil quando o tiro é disparado. Os gases provenientes da explosão comunicam ao projétil uma força média de intensidade $1{,}2 \cdot 10^3$ N. Sabendo que a detonação do cartucho dura $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ s, calcule o módulo da velocidade do projétil imediatamente após o disparo.

35. (Mack-SP) Um corpo em repouso de massa 1,0 t é submetido a uma resultante de forças, com direção constante, cuja intensidade varia em função do tempo (**t**), segundo a função F = 200 t, no Sistema Internacional, a partir do instante zero. A velocidade escalar desse corpo no instante t = 10 s vale:

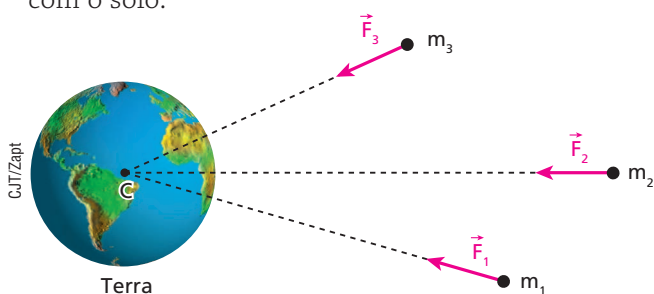
a) 3,6 km/h.
b) 7,2 km/h.
c) 36 km/h.
d) 72 km/h.
e) 90 km/h.

Bloco 4

8. Peso de um corpo

Uma caixa de isopor vazia é leve ou pesada? Um grande paralelepípedo maciço de aço é leve ou pesado? As noções de leve ou pesado fazem parte de nosso dia a dia e nos possibilitam responder de imediato a perguntas como essas: a caixa de isopor vazia é leve e o grande paralelepípedo maciço de aço é pesado.

Um corpo é tanto mais pesado quanto mais intensa for a **força de atração gravitacional** exercida pelo planeta sobre ele.

Por outro lado, todos sabemos que, se largarmos uma laranja ou outros corpos nas proximidades da Terra, eles cairão verticalmente, indo de encontro à superfície do planeta. Isso se deve também a uma interação de natureza gravitacional que ocorre entre a Terra e o corpo, que recebe uma força atrativa dirigida para o centro de massa do planeta. Essa força é o que, na ausência de atritos, faz o corpo despencar em movimento acelerado até colidir com o solo.

As massas m_1, m_2 e m_3 são atraídas gravitacionalmente por meio das forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ respectivamente. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)

Desprezando os efeitos ligados à rotação da Terra, podemos dizer em primeira aproximação que:

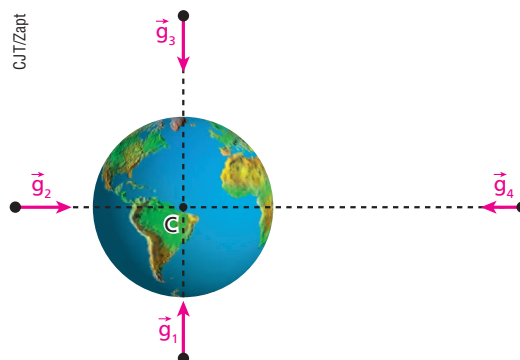
> O **peso** de um corpo é a força de atração gravitacional exercida sobre ele.

É importante destacar que a aceleração produzida pela força gravitacional (peso) é a **aceleração da gravidade** ($\vec{g}$), que constitui o vetor característico da interação de campo entre a Terra e o corpo.

Para pontos situados fora da Terra, o vetor $\vec{g}$ e a força peso têm a mesma orientação: são radiais à "esfera" terrestre e dirigidos para o seu centro.

Pegando no pesado

Na busca por um corpo bem torneado e viril, algumas pessoas, sobretudo as mais jovens, adquiriram o hábito de frequentar sistematicamente academias de ginástica e musculação. Isso deve ser feito, porém, com acompanhamento médico e de profissionais competentes para que sobrecargas e excessos não provoquem lesões ou alterações indesejáveis. Nesses ambientes, os conceitos de leve ou pesado se fazem presentes, já que cada aparelho ou utensílio requer uma regulagem adequada ao grau de dificuldade do exercício a ser praticado.

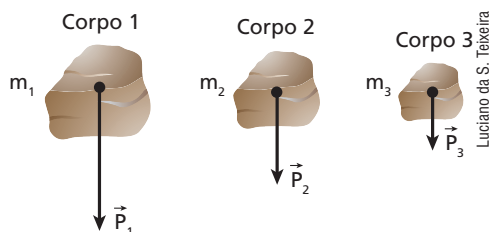
A intensidade de $\vec{g}$, por sua vez, depende do local em que é feita a avaliação. Como veremos no Tópico 4, Gravitação, quanto maior for a distância do ponto considerado à superfície terrestre, menor será a magnitude da aceleração da gravidade, o que significa que $|\vec{g}|$ decresce com a altitude. Além disso, e em razão principalmente da rotação da Terra, verifica-se que, sobre a superfície terrestre, do Equador para os polos, $|\vec{g}|$ cresce, mostrando que o valor dessa aceleração varia com a latitude.

Representação do vetor $\vec{g}$ em quatro diferentes pontos do campo gravitacional terrestre. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)

Por meio de diversos experimentos, pôde-se constatar que, ao nível do mar e em um local de latitude 45°, o módulo de $\vec{g}$ (denominado normal) vale:

$$g_n = 9{,}80665\ m/s^2$$

Como podemos, porém, calcular o peso de um corpo? Para responder a essa pergunta, vamos considerar a situação a seguir.

Sejam três corpos de pesos $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, com massas respectivamente iguais a m_1, m_2 e m_3, situados em um mesmo local.

Através de experimentos, verifica-se que a intensidade do peso é diretamente proporcional à massa do corpo considerado. À maior massa corresponde o peso de maior intensidade.

Levando em conta a proporcionalidade mencionada, podemos escrever que:

$$\frac{|\vec{P}_1|}{m_1} = \frac{|\vec{P}_2|}{m_2} = \frac{|\vec{P}_3|}{m_3} = k\ \text{(constante)}$$

A constante da proporcionalidade (**k**) é o módulo da aceleração da gravidade do local, o que nos permite escrever que:

$$\frac{|\vec{P}|}{m} = |\vec{g}| \Rightarrow |\vec{P}| = m\,|\vec{g}|$$

ou vetorialmente:

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

Observe que a massa **m** é uma grandeza escalar, enquanto o peso $\vec{P}$ é uma grandeza vetorial. Assim, o peso tem direção (da vertical do lugar) e sentido (para baixo).

De acordo com os preceitos da Mecânica Clássica, a massa de um corpo é uma característica sua, sendo constante em qualquer ponto do Universo. No entanto, o mesmo não ocorre com o peso, que é função do local, já que depende de $\vec{g}$. Na Lua, por exemplo, uma mesma pessoa pesa cerca de $\frac{1}{6}$ do que pesa na Terra, pois o módulo da aceleração da gravidade na superfície lunar é cerca de $1{,}67\ m/s^2$, o que corresponde a $\frac{1}{6}$ de $9{,}8\ m/s^2$ aproximadamente.

Afinal, as balanças são medidores de peso ou massa?

As balanças, como as encontradas em banheiros, farmácias ou supermercados, são dinamômetros acionados pela força de compressão que exercemos sobre elas, cuja intensidade é igual à do nosso peso nas condições da avaliação. Esses dispositivos, no entanto, indicam em seus mostradores uma medida de massa — em quilogramas, por exemplo — que está mais de acordo com o hábito das pessoas, que teriam dificuldade em expressar pesos em newtons ou quilogramas-força. Onde se deveria ler "980 N" ou "100 kgf", por exemplo, o fabricante grafa "100 kg".

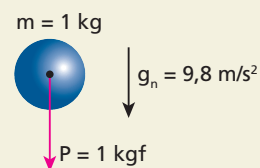
Sergio Dotta/The Next

O quilograma-força (kgf)

Um quilograma-força é uma unidade de força usada na medição da intensidade de pesos e é definida pela intensidade do peso de um corpo de 1 quilograma de massa, situado em um local onde a gravidade é normal (aceleração da gravidade com módulo $g_n \cong 9{,}8\ m/s^2$).

$$P = m\,g$$

$$1\ kgf = 1\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2$$

m = 1 kg
$g_n = 9{,}8\ m/s^2$
P = 1 kgf
Luis Fernando R. Tucillo

Destaquemos que, em um ponto onde a gravidade é normal ($g_n \cong 9{,}8\ m/s^2$), o peso de um corpo em kgf é numericamente igual à sua massa em kg.

Vejamos a relação entre as unidades quilograma-força (kgf) e newton (N):

$$1\ kgf = 1\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = 9{,}8\ kg \cdot m/s^2$$

Como $1\ N = 1\ kg\ m/s^2$, temos:

$$1\ kgf = 9{,}8\ N$$

Leitura

Corpos com "peso" nulo: levitação

Vamos admitir o caso de uma pessoa de massa **m**, apoiada sobre o piso de um elevador que se movimenta verticalmente com aceleração de intensidade **a**, dirigida para baixo.

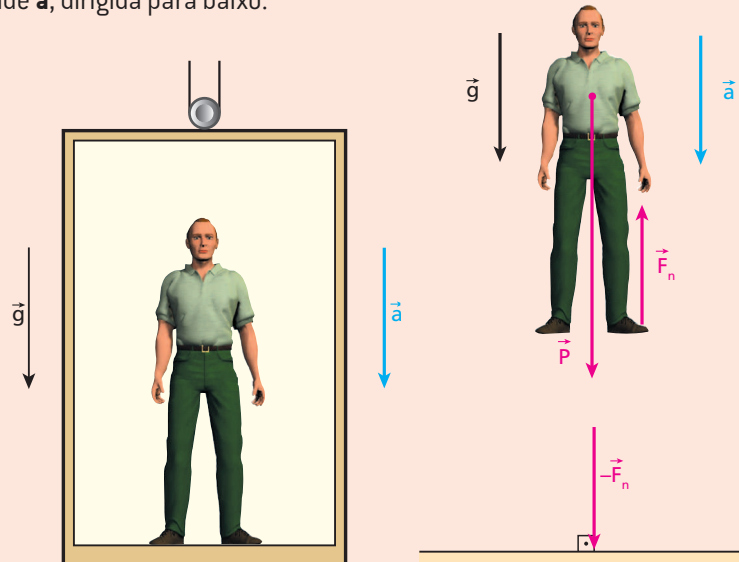
Nesse caso, apenas duas forças atuam no corpo da pessoa: seu peso $(\vec{P})$ e a reação normal exercida pelo piso $(\vec{F}_n)$, conforme indica a figura.

A intensidade da força normal de compressão $-\vec{F}_n$ que a pessoa aplica no piso do elevador constitui seu "peso aparente" (P_{ap}), isto é, aquilo que seria indicado por uma balança de mola, caso a pessoa estivesse sobre uma.

O valor de P_{ap} fica determinado aplicando-se a **2ª Lei de Newton**:

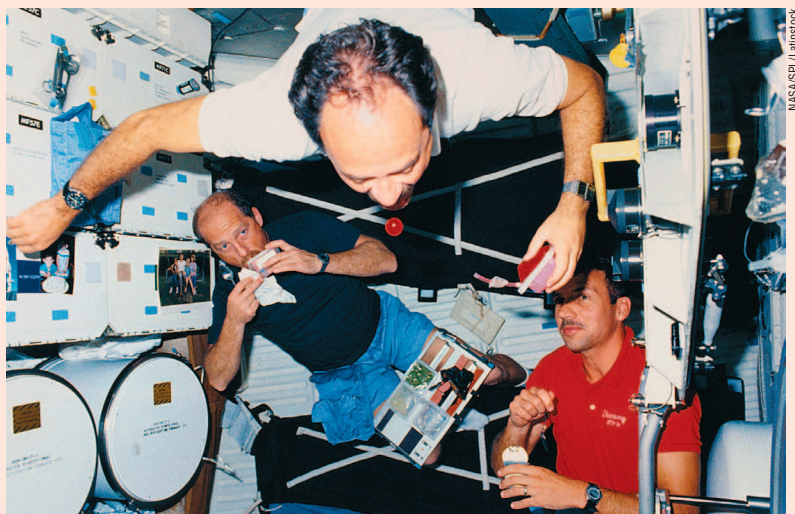
$$P - F_n = m\,a \Rightarrow m\,g - P_{ap} = m\,a$$

$$m\,g - m\,a = P_{ap}$$

Donde: $\boxed{P_{ap} = m\,(g - a)}$

O que aconteceria se, em determinado momento, a aceleração do elevador fosse igual à da gravidade (elevador em queda livre)?

Nessa circunstância, teríamos que a = g, o que implicaria **peso aparente nulo** $(P_{ap} = 0)$. Assim, a pessoa permaneceria levitando sobre o piso do elevador, isto é, não exerceria compressão alguma, tudo se passando como se a aceleração da gravidade no interior da cabine fosse nula.

Essa situação se dá, por exemplo, com um astronauta confinado em uma espaçonave em órbita de um astro. Nesse caso, a aceleração do sistema é a da gravidade e, por isso, o astronauta e os objetos no interior da nave permanecem imponderáveis, aparentando peso nulo. Dessa forma, é possível a locomoção dos corpos no interior da nave com grande facilidade, aproveitando-se os movimentos inerciais subsequentes a pequenos impulsos.

O cinema tem apresentado nos últimos tempos uma série de películas em que astronautas são mostrados levitando no interior de espaçonaves. Muitas dessas cenas são filmadas dentro de aviões especialmente adaptados que, depois de atingirem grandes altitudes, são submetidos a trajetórias parabólicas similares às de objetos lançados horizontalmente e sujeitos à ação exclusiva do campo gravitacional. Em cada "queda" do avião, os atores "pairam no ar", possibilitando a gravação das imagens.

Nesta fotografia, um grupo de astronautas goza da imponderabilidade ("ausência de peso") no interior de uma nave em órbita da Terra. Observe que um deles está tentando abocanhar um alimento que levita.

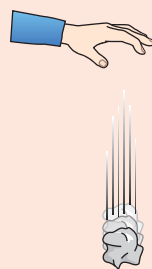
A força de resistência do ar e o estudo da queda vertical de um corpo no ar

A força de resistência do ar

Por ser um meio gasoso, o ar permite a penetração de corpos através dele. Esses corpos, porém, colidem com as moléculas do ar durante o movimento, ficando sujeitos a uma força de oposição ao avanço, denominada **força de resistência do ar**. Essa força é tanto mais intensa quanto maior for a área da superfície externa do corpo exposta às colisões com as partículas do ar.

Um experimento simples que comprova esse fato pode ser realizado com uma folha de papel. Deixando-se a folha cair aberta, ela descreverá uma trajetória irregular. Se essa mesma folha cair, do mesmo ponto, porém embolada, ela descreverá uma trajetória praticamente retilínea, gastando até o solo um intervalo de tempo menor que o gasto no caso anterior. Isso mostra que, na folha embolada, a ação do ar é menos expressiva, pois a área que colide com as moléculas torna-se menor.

Ilustrações: Luis Fernando R. Tucillo

Folha aberta: trajetória irregular e maior tempo de queda.

Folha embolada: trajetória praticamente retilínea e menor tempo de queda.

É de fácil constatação que a força de resistência do ar é tanto mais intensa quanto maior for a velocidade do corpo em relação ao ar, o que se justifica pela intensificação dos efeitos das colisões das partículas de ar contra o corpo. Verifica-se que, na maioria dos casos, a proporção é aproximadamente quadrática, isto é, do tipo:

$$\boxed{F_r = k\,v^2}$$

em que $\mathbf{F_r}$ é a intensidade da força de resistência do ar;

k é um coeficiente que depende da forma do corpo, da densidade do ar e da maior área de uma seção do corpo perpendicular à direção do movimento;

v é a intensidade da velocidade.

O *design* de um carro define sua forma aerodinâmica, que influi no coeficiente *k*. Modelos que apresentam pequenos valores de *k* percebem menos a força de resistência do ar, que cresce em qualquer caso com a velocidade.

Thinkstock/Getty Images

Em um carro em movimento, atua uma força de resistência exercida pelo ar que depende, dentre outros fatores, da forma do veículo (aerodinâmica) e da velocidade.

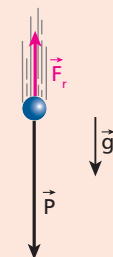
O estudo da queda vertical, no ar, de um corpo de dimensões relativamente pequenas

Consideremos um corpo esférico abandonado do repouso de uma grande altitude em relação ao solo. Desprezando-se a ação de ventos, durante a queda apenas duas forças agirão sobre ele: o peso ou força da gravidade $(\vec{P})$ e a força de resistência do ar $(\vec{F}_r)$, conforme representa a figura ao lado.

$\vec{F}_r$ $\vec{g}$ $\vec{P}$

Paulo C. Ribeiro

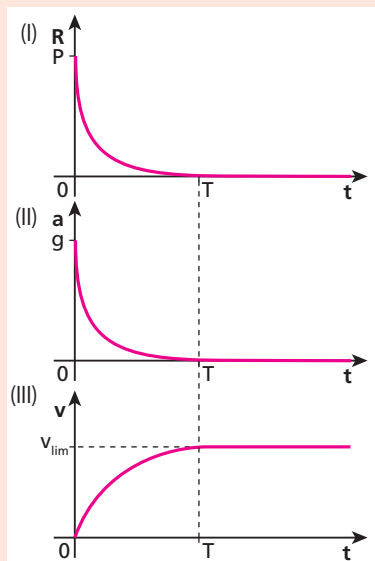
Supondo desprezíveis as variações do campo gravitacional durante a queda do corpo, seu peso permanecerá constante durante o movimento. Entretanto, o mesmo não ocorrerá com a força de resistência do ar, pois esta terá intensidade crescente à medida que o corpo for ganhando velocidade.

Esta etapa de movimento acelerado terá duração limitada, visto que, atingida certa velocidade, a força de resistência do ar assumirá intensidade igual à da força-peso. A partir daí, a força resultante será nula, de modo que o corpo prosseguirá sua queda em movimento retilíneo e uniforme por inércia. A velocidade constante apresentada durante esse movimento inercial denomina-se **velocidade-limite**.

Thinkstock/Getty Images

Um paraquedista descreve, inicialmente, um movimento acelerado na direção vertical, sob a ação da força da gravidade (peso) e da força vertical de resistência do ar. A partir do instante em que a força resistente aplicada pelo ar equilibra o peso, o movimento do esportista torna-se uniforme e a velocidade constante adquirida é a **velocidade-limite**.

Nos gráficos qualitativos (I), (II) e (III) ao lado, representamos as variações com o tempo (**t**) da intensidade da força resultante sobre o corpo (**R**), da intensidade da aceleração (**a**) e da intensidade da velocidade (**v**). Nesses gráficos, **g** é o módulo da aceleração da gravidade, v_{lim} é o módulo da velocidade-limite atingida pelo corpo e **T** é o instante em que é atingida essa velocidade.

Condição de v_{lim}: $|\vec{F}_r| = |\vec{P}|$

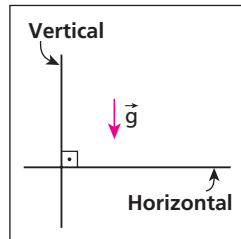
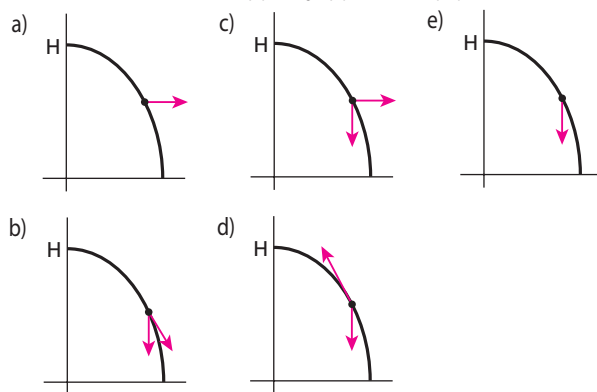
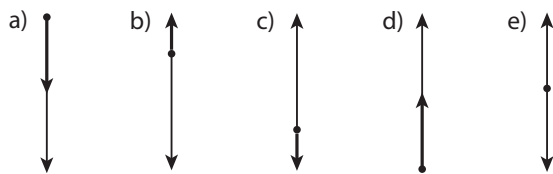
(I): intensidade da força resultante em função do tempo;
(II): intensidade da aceleração em função do tempo;
(III): intensidade da velocidade em função do tempo.

Exercícios

nível 1

36. (Cesgranrio-RJ) Considere um helicóptero movimentando-se no ar em três situações diferentes:

I. subindo verticalmente com velocidade escalar constante;
II. descendo verticalmente com velocidade escalar constante;
III. deslocando-se horizontalmente para a direita, em linha reta, com velocidade escalar constante.

A resultante das forças exercidas pelo ar sobre o helicóptero, em cada uma dessas situações, é corretamente representada por:

	I	II	III
a)	↑	↑	↑
b)	↑	↓	→
c)	↓	↑	←
d)	↓	↑	→
e)	↓	↓	↓

37. (Cesgranrio-RJ) Um pedaço de giz é lançado horizontalmente de uma altura **H**. Desprezando-se a influência do ar, a figura que melhor representa a(s) força(s) que age(m) sobre o giz é:

38. (ESPCEX-SP) Na superfície da Terra, uma pessoa lança uma pedra verticalmente para cima. Considerando-se que a resistência do ar não é desprezível, indique a alternativa que representa as forças que atuam na pedra, no instante em que ela está passando pelo ponto médio de sua trajetória durante a subida. Despreze o empuxo do ar.

39. E.R. Na Terra, um astronauta de massa **M** tem peso **P**. Supondo que na Lua a aceleração da gravidade seja um sexto da verificada na Terra, obtenha:
a) a massa do astronauta na Lua;
b) o peso do astronauta na Lua.

Resolução:

a) A massa de um corpo independe do local, sendo a mesma em qualquer ponto do Universo. Assim, na Lua, a massa do astronauta também será igual a **M**.

b) O peso **P** do astronauta na Terra é dado por:

$$P = M\,g$$

O peso (P') do astronauta na Lua será dado por:

$$P' = M\,g'$$

Sendo $g' = \frac{1}{6}\,g$, segue que:

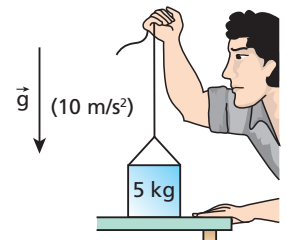
$$P' = M\frac{1}{6}g = \frac{1}{6}M\,g$$

Daí:

$$\boxed{P' = \frac{1}{6}P}$$

40. Na Terra, num local em que a aceleração da gravidade vale 9,8 m/s², um corpo pesa 49 N. Esse corpo é, então, levado para a Lua, onde a aceleração da gravidade vale 1,6 m/s². Determine:
a) a massa do corpo;
b) seu peso na Lua.

41. Num local em que a gravidade é normal (9,8 m/s²), um bloco de concreto pesa 20 kgf. Determine:
a) a massa do bloco em kg;
b) o peso do bloco em newtons.

42. (Fuvest-SP) Um homem tenta levantar uma caixa de 5 kg, que está sobre uma mesa, aplicando uma força vertical de 10 N. Nesta situação, o valor da força que a mesa aplica na caixa é de:
a) 0 N.
b) 5 N.
c) 10 N.
d) 40 N.
e) 50 N.

43. E.R. Um bloco de massa 2,0 kg é acelerado verticalmente para cima com 4,0 m/s², numa região em que a influência do ar é desprezível. Sabendo que, no local, a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s², calcule:
a) a intensidade do peso do bloco;
b) a intensidade da força vertical ascendente que age sobre ele.

Resolução:

a) O peso do bloco é calculado por: $P = m\,g$.
Com $m = 2{,}0$ kg e $g = 10$ m/s², vem:

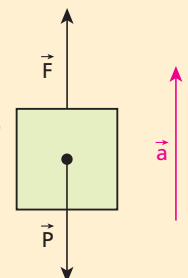
$$P = 2{,}0 \cdot 10\ (N) \Rightarrow \boxed{P = 20\ N}$$

b) O esquema ao lado mostra as forças que agem no bloco:

CJT/Zapt

Aplicando ao bloco o **Princípio Fundamental da Dinâmica**, calculemos a intensidade de $\vec{F}$:

$$F - P = m\,a \Rightarrow F - 20 = 2{,}0 \cdot 4{,}0$$

$$\boxed{F = 28\ N}$$

44. (UFMT) Um corpo de massa 5,0 kg é puxado verticalmente para cima por uma força $\vec{F}$, adquirindo uma aceleração constante de intensidade igual a 2,0 m/s², dirigida para cima. Adotando $g = 10$ m/s² e desprezando o efeito do ar, determine a intensidade de $\vec{F}$.

Exercícios   nível 2

45. Um garoto arremessa verticalmente para cima uma pedra, que passa a mover-se sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre. A influência do ar é desprezível. A alternativa que representa corretamente os vetores força resultante na pedra ($\vec{F}$), aceleração resultante ($\vec{a}$) e velocidade instantânea ($\vec{v}$), em dado instante do movimento de subida, é:

a) $\uparrow \vec{F} \uparrow \vec{a} \uparrow \vec{v}$
b) $\uparrow \vec{F} \downarrow \vec{a} \uparrow \vec{v}$
c) $\downarrow \vec{F} \downarrow \vec{a} \uparrow \vec{v}$
d) $\uparrow \vec{F} \downarrow \vec{a} \downarrow \vec{v}$
e) $\downarrow \vec{F} \downarrow \vec{a} \downarrow \vec{v}$

46. Na Terra, num local em que a aceleração da gravidade é normal, uma sonda espacial pesa $5,0 \cdot 10^2$ kgf. Levada para um planeta **X**, seu peso passa a valer $1,0 \cdot 10^4$ N. Determine:

a) a massa da sonda na Terra e no planeta **X**;
b) o módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta **X**.

47. (Unip-SP) Uma balança de farmácia (balança de mola) foi graduada em kg em um local onde $g = 9,8$ m/s^2. A balança é levada para um local onde $g = 10$ m/s^2. Nesse novo local, uma pessoa de massa 49 kg sobe na balança.
A leitura na balança será de:

a) 9,8 kg.
b) 10 kg.
c) 49 kg.
d) 50 kg.
e) 490 kg.

48. (UFMG) Na Terra, um fio de cobre é capaz de suportar, em uma de suas extremidades, massas suspensas de até 60 kg sem se romper. Considere a aceleração da gravidade, na Terra, igual a 10 m/s^2 e, na Lua, igual a 1,5 m/s^2.

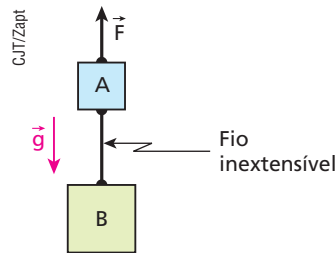
a) Qual a intensidade da força máxima que o fio poderia suportar na Lua?
b) Qual a maior massa de um corpo suspenso por esse fio, na Lua, sem que ele se rompa?

49. (Fuvest-SP) Um fio, de massa desprezível, está preso verticalmente por uma de suas extremidades a um suporte. A tração máxima que o fio suporta, sem se romper, é de 5,80 N. Foram pendurados, sucessivamente, objetos de 50 g cada, separados um do outro por uma distância de 10 cm, até o fio se romper.
Adotando $g = 10$ m/s^2, responda:

a) Quantos objetos foram pendurados?
b) Onde o fio se rompeu?

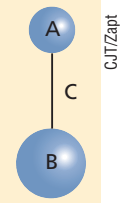
50. Um robô foi projetado para operar no planeta Marte, porém ele é testado na Terra, erguendo verticalmente a partir do repouso e ao longo de um comprimento **d** um pedaço de rocha de massa igual a 5,0 kg com aceleração constante de módulo 2,0 m/s^2. Remetido ao seu destino e trabalhando sempre com a mesma calibração, o robô iça verticalmente, também a partir do repouso e ao longo do mesmo comprimento **d**, uma amostra do solo marciano de massa idêntica à do pedaço de rocha erguido na Terra. Sabendo que na Terra e em Marte as acelerações da gravidade têm intensidades respectivamente iguais a 10,0 m/s^2 e 4,0 m/s^2, determine:

a) a intensidade da força que o robô exerce para erguer o pedaço de rocha na Terra;
b) o módulo da aceleração adquirida pela amostra do solo marciano;
c) a relação entre os tempos de duração da operação em Marte e na Terra.

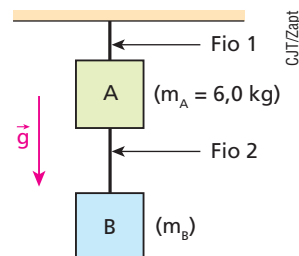
51. No esquema a seguir, os blocos **A** e **B** têm massas $m_A = 2,0$ kg e $m_B = 3,0$ kg. Desprezam-se o peso do fio e a influência do ar.

Sendo $|\vec{F}| = 80$ N e adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, determine:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) a intensidade da força que traciona o fio.

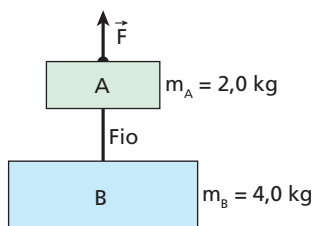
52. E.R. Uma esfera maciça, **A**, de peso **P**, está ligada por um fio inextensível, **C**, de massa desprezível, a outra esfera, **B**, também maciça, de peso P' = 2P. O conjunto é abandonado no vácuo, sem velocidade inicial, e executa um movimento de queda livre com o fio reto na vertical. A aceleração da gravidade tem intensidade **g**. Calcule:

a) os módulos das acelerações das esferas **A** e **B**;
b) a intensidade da força de tração no fio.

Resolução:

a) Como as esferas **A** e **B** estão em queda livre, sua aceleração é igual à da gravidade: **g**.
b) A força resultante em cada esfera em queda livre é o seu próprio peso. Por isso, as duas esferas não interagem com o fio, que permanece frouxo sem estar tracionado (tração nula).

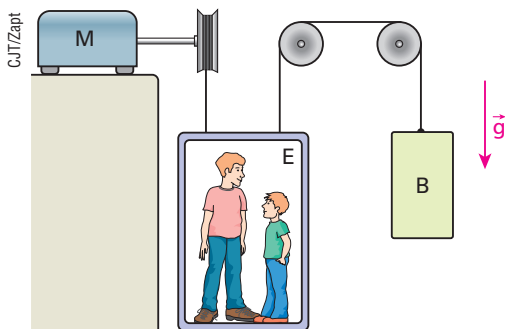
53. Na situação esquematizada na figura abaixo, os blocos **A** e **B** encontram-se em equilíbrio, presos a fios ideais iguais, que suportam uma tração máxima de 90 N.

Sabendo que $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, determine:

a) a maior massa m_B admissível ao bloco **B**, de modo que nenhum dos fios arrebente;
b) a intensidade da força de tração no fio 2, supondo que o fio 1 se rompeu e que os blocos estão em queda livre na vertical.

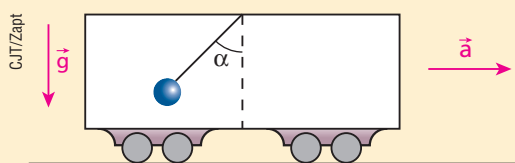
54. (PUC-PR – mod.) Sobre o bloco **A**, de massa 2,0 kg, atua a força vertical $\vec{F}$. O bloco **B**, de massa 4,0 kg, é ligado ao **A** por um fio inextensível, de massa desprezível e alta resistência à tração. Adote g = 10 m/s^2.

Considere as proposições:

I. Se F = 60 N, o sistema está em equilíbrio e a tração no fio é 50 N.
II. Se F = 120 N, o sistema está em movimento acelerado e a tração no fio é 40 N.
III. Se F = 0, o sistema tem uma aceleração de 10 m/s^2 e a tração no fio é nula.
IV. Se F = 12 N, o sistema tem aceleração dirigida para baixo e a tração no fio é 8,0 N.

a) Apenas IV está correta.
b) Todas estão corretas.
c) Apenas I está correta.
d) Apenas I, II e III estão corretas.
e) Apenas III e IV estão corretas.

55. Considere o esquema abaixo, em que estão representados um elevador **E** de massa igual a 1,0 · 10^3 kg (incluída a massa do seu conteúdo), um contra-peso **B** de massa igual a 5,0 · 10^2 kg e um motor elétrico **M** que exerce no cabo conectado em **E** uma força vertical constante $\vec{F}$. Os dois cabos têm massas desprezíveis, são flexíveis e inextensíveis e as polias são ideais. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se g = 10 m/s^2.

Se o elevador está acelerado para cima, com aceleração de módulo 0,20 m/s^2, a intensidade de $\vec{F}$ é:

a) 4,7 · 10^3 N;
b) 5,0 · 10^3 N;
c) 5,2 · 10^3 N;
d) 5,3 · 10^3 N;
e) 5,5 · 10^3 N.

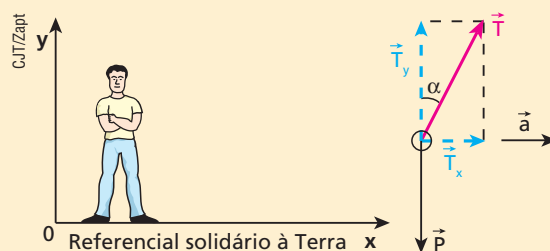
56. E.R. Considere um veículo, como o representado abaixo, em movimento retilíneo sobre um plano horizontal. Pelo fato de estar acelerado para a direita, um pêndulo preso ao seu teto desloca-se em relação à posição de equilíbrio, formando um ângulo **α** com a vertical.

São conhecidos o ângulo α, o módulo da aceleração da gravidade (**g**) e a massa da esfera (**m**) atada ao fio ideal.

a) Qual o módulo da aceleração $\vec{a}$ do veículo?
b) O módulo de $\vec{a}$ depende de **m**?

Resolução:

a) Isolemos a esfera pendular e identifiquemos as forças que nela agem em relação a um referencial inercial, isto é, todo aquele para o qual vale o Princípio da Inércia:

Na esfera pendular, agem duas forças: seu peso ($\vec{P}$) e a força de tração devida ao fio ($\vec{T}$).

Façamos a decomposição de $\vec{T}$ nas direções horizontal e vertical:

Temos que:

$$T_x = T \operatorname{sen} \alpha \quad (I) \qquad e \qquad T_y = T \cos \alpha \quad (II)$$

Para o observador fixo na Terra, a esfera pendular não é acelerada verticalmente. Isso significa que $\vec{T}_y$ equilibra $\vec{P}$, o que nos leva a escrever:

$$T_y = P \Rightarrow T_y = m\,g \quad (III)$$

Para o mesmo observador fixo na Terra, a esfera pendular possui movimento com aceleração dirigida para a direita, juntamente com o veículo. A resultante que acelera a esfera pendular em relação à Terra é $\vec{T}_x$. Aplicando a **2ª Lei de Newton**, vem:

$$T_x = m\,a \quad (IV)$$

Comparando as expressões (I) e (IV), obtemos:

$$m\,a = T \operatorname{sen} \alpha \quad (V)$$

Comparando as expressões (III) e (II), vem:

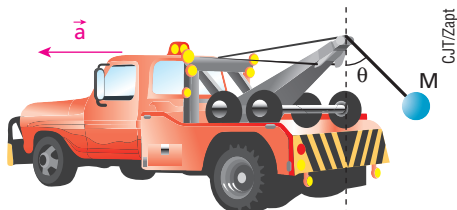
$$m\,g = T \cos \alpha \quad (VI)$$

Dividindo (V) e (VI) membro a membro, temos:

$$\frac{ma}{mg} = \frac{T \operatorname{sen} \alpha}{T \cos \alpha} \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

Assim: $\boxed{a = g \operatorname{tg} \alpha}$

b) O módulo de $\vec{a}$ não depende de **m**, que foi cancelada nos cálculos.

57. (Ufla-MG) Um caminhão-guincho em movimento retilíneo numa pista horizontal tem aceleração constante de intensidade **a**. Ele transporta uma carga de massa **M** sustentada por uma corda leve presa em sua traseira. Nessas condições, o pêndulo, constituído pela carga e a corda, permanece deslocado em um ângulo **θ** em relação à vertical, conforme representa a figura:

Sendo **g** a intensidade da aceleração da gravidade, sen $\theta = \frac{1}{2}$ e cos $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, aponte a alternativa que traz o valor correto de **a**:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}g$ b) $\frac{1}{2}g$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}g$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}g$ e) $\sqrt{3}\,g$

58. Na figura 1, mostra-se um duplo pêndulo em equilíbrio, constituído de fios leves e inextensíveis e duas esferas **A** e **B** de massas **M** e **2M**, respectivamente.

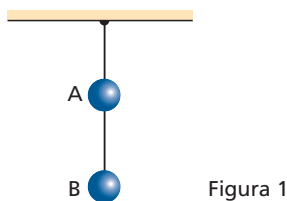



Figura 1

Na figura 2, aparece um carro em cujo teto está dependurado o duplo pêndulo. O carro, em movimento para a direita, inicia, em dado instante, uma freada com desaceleração constante.

Figura 2

Das alternativas a seguir, a que melhor representa o duplo pêndulo durante a freada é:

59. E.R. Um corpo de massa 4,0 kg cai, a partir do repouso, no campo gravitacional terrestre, suposto de intensidade constante, de módulo 10 m/s². A força de resistência que o corpo recebe do ar durante a queda tem intensidade dada, em newtons, pela expressão $F_r = 10v^2$, em que **v** é o módulo de sua velocidade. Admitindo que a altura de queda seja suficientemente grande, calcule a velocidade-limite atingida pelo corpo.

Resolução:

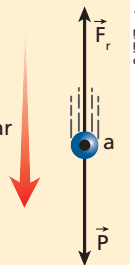
Durante a queda, duas forças agem no corpo: o peso ($\vec{P}$) e a força de resistência do ar ($\vec{F_r}$).

A intensidade de $\vec{F}$ cresce a partir de zero. A intensidade de $\vec{P}$, entretanto, é constante.

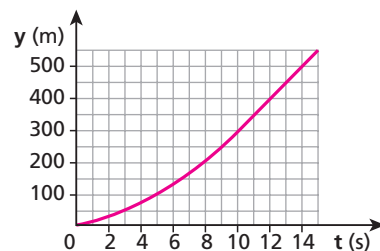
À medida que o corpo ganha velocidade durante a queda, $\vec{F}$, se intensifica, atingindo, depois de certo intervalo de tempo, o mesmo valor de $\vec{P}$.

A partir daí, a velocidade estabiliza, assumindo um valor constante denominado **velocidade-limite**.

Condição de velocidade-limite:
$$F_r = P \Rightarrow F_r = m\,g$$

$$10\,v_{lim}^2 = 4{,}0 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{v_{lim} = 2{,}0\text{ m/s}}$$

60. (Fuvest-SP) O gráfico seguinte descreve o deslocamento vertical **y**, para baixo, de um surfista aéreo de massa igual a 75 kg, em função do tempo **t**. A origem y = 0, em t = 0, é tomada na altura do salto. Nesse movimento, a força **R** de resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade **v** do surfista ($R = k\,v^2$, em que **k** é uma constante que depende principalmente da densidade do ar e da geometria do surfista). A velocidade inicial do surfista é nula; cresce com o tempo, por aproximadamente 10 s; e tende para uma velocidade constante denominada velocidade-limite (v_L).

Adotando g = 10 m/s², determine:

a) o valor da velocidade-limite v_L;
b) o valor da constante **k** no SI;
c) a aceleração do surfista quando sua velocidade é a metade da velocidade-limite.

61. (Unifesp-SP) Em um salto de paraquedismo, identificam-se duas fases do movimento de queda do paraquedista. Nos primeiros instantes do movimento, ele é acelerado. Devido à força de resistência do ar, porém, o seu movimento passa rapidamente a ser uniforme com velocidade v_1, com o paraquedas ainda fechado. A segunda fase tem início no momento em que o paraquedas é aberto. Rapidamente, ele entra novamente em um regime de movimento uniforme, com velocidade v_2. Supondo-se que a densidade do ar é constante, a intensidade da força de resistência do ar sobre um corpo é proporcional à área sobre a qual atua a força e ao quadrado de sua velocidade. Se a área efetiva aumenta 100 vezes no momento em que o paraquedas se abre, pode-se afirmar que:

a) $v_2/v_1 = 0{,}08$.
b) $v_2/v_1 = 0{,}10$.
c) $v_2/v_1 = 0{,}15$.
d) $v_2/v_1 = 0{,}21$.
e) $v_2/v_1 = 0{,}30$.

Bloco 5

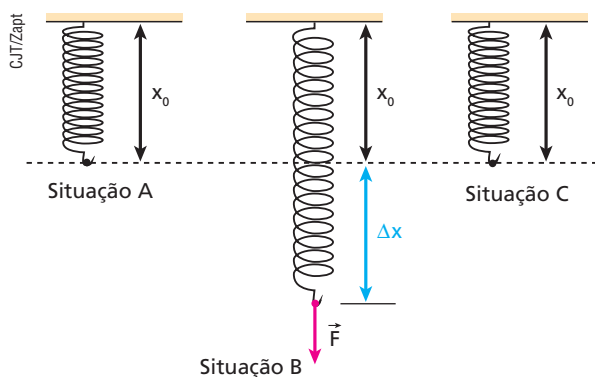
9. Deformações em sistemas elásticos

Lei de Hooke

Consideremos a figura a seguir, em que uma mola de massa desprezível tem uma de suas extremidades fixas.

O comprimento da mola na situação **A** é seu comprimento natural (x_0). Portanto, a mola não está deformada.

Na situação **B**, uma força $\vec{F}$ foi aplicada à extremidade livre da mola, provocando nela uma deformação (alongamento) Δx.

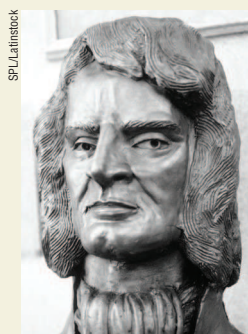
Na situação **C**, $\vec{F}$ foi suprimida e a mola recobrou seu comprimento natural x_0.

Pelo fato de a mola ter recobrado seu comprimento natural (x_0) depois de cessada a ação da força, dizemos que ela experimentou uma deformação **elástica**.

Em seus estudos sobre deformações elásticas, Robert Hooke chegou à seguinte conclusão, que ficou conhecida por **Lei de Hooke**:

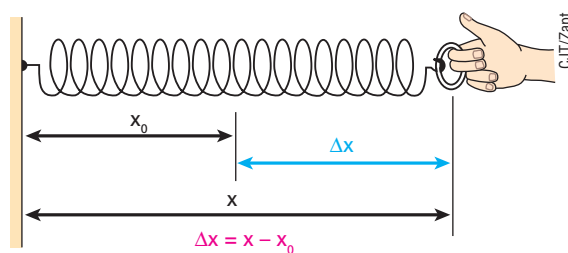
> Em regime elástico, a deformação sofrida por uma mola é **diretamente proporcional** à intensidade da força que a provoca.

A expressão matemática da Lei de Hooke é dada a seguir:

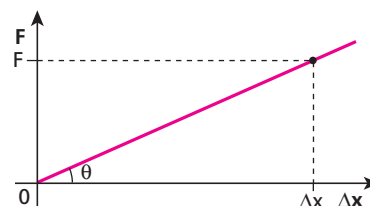
$$F = K\,\Delta x$$

em que: **F** é a intensidade da força deformadora;
K é a constante de proporcionalidade;
Δx é a deformação (alongamento ou encurtamento sofrido pela mola).

Robert Hooke (1635-1705). Cientista inglês de raro senso prático, notabilizou-se como antagonista de muitas ideias do seu contemporâneo Isaac Newton. Desenvolveu mecanismos operados por molas que permitiram a construção de relógios de maior precisão. Aperfeiçoou o microscópio e, ao observar pedaços de cortiça com esse instrumento, notou a existência de uma unidade construtiva, que chamou de célula (do latim *cellula*: pequenos cômodos ou celas adjacentes). Esse termo se tornou usual entre os biólogos para denominar estruturas elementares de matéria viva.

A constante de proporcionalidade **K** é uma qualidade da mola considerada que depende do material de que é feita a mola e das dimensões que ela possui, dentre outras características. A constante **K** é comumente chamada de **constante elástica** e tem por unidade no SI o N/m.

Consideremos o modelo experimental representado na figura a seguir, em que uma mola, de eixo horizontal, é puxada, por uma pessoa, para a direita.

Admitindo-se que a mola esteja em regime de deformação elástica, o gráfico da intensidade da força exercida pela pessoa em função da deformação é representado abaixo.

Esse comportamento linear dura até o limite de elasticidade da mola. A partir daí, o formato do gráfico modifica-se.

TF1-133_183_5P_P2T1.indd 155 16/08/12 17:10

Notas:

- Embora na apresentação da Lei de Hooke tenhamos nos baseado na deformação de uma mola, a conclusão a que chegamos estende-se a quaisquer sistemas elásticos de comportamento similar. Como exemplo, podemos destacar uma tira de borracha ou um elástico que, ao serem tracionados, também podem obedecer a essa lei.
- A declividade do gráfico anterior (tg θ) fornece a constante elástica da mola. De fato:

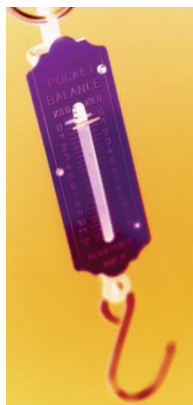
$$\text{tg}\,\theta = \frac{F}{\Delta x} = K$$

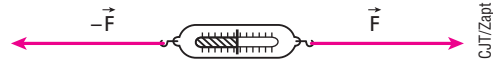
O dinamômetro

Emilio Ereza/AGE/Fotostock/Grupo Keystone

O **dinamômetro** (ou "balança de mola") é um dispositivo destinado a indicar intensidade de forças.

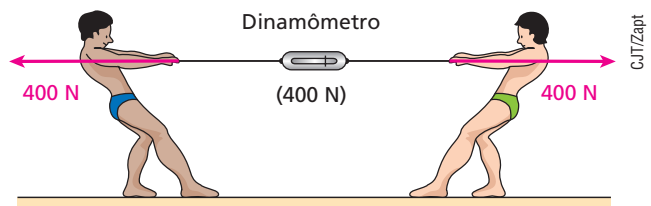
O funcionamento desse aparelho baseia-se nas deformações elásticas sofridas por uma mola que tem ligado a si um cursor. À medida que a mola é deformada, o cursor corre ao longo de uma escala impressa no aparato de suporte.

A calibração da escala, que pode ser graduada em newtons, em kgf ou em qualquer outra unidade de força, é feita utilizando-se corpos-padrão de pesos conhecidos.

A força resultante no dinamômetro, suposto de massa desprezível – dinamômetro ideal –, é nula. Isso significa que suas extremidades são puxadas por forças opostas, isto é, de mesma intensidade e direção, mas de sentidos contrários.

CJT/Zapt

Uma importante característica funcional de um dinamômetro é o fato de ele indicar a intensidade da força aplicada **em uma de suas extremidades**. No caso da figura anterior, o dinamômetro indica a intensidade de $\vec{F}$ (ou de $-\vec{F}$) e não o dobro desse valor, como poderia ser imaginado.

No caso de ambas as extremidades estarem interligadas a um fio tracionado, o dinamômetro indica a intensidade da força de tração estabelecida no fio.

Veja o exemplo a seguir, em que dois rapazes tracionam uma corda que tem intercalado a si um dinamômetro:

CJT/Zapt

Como ambos puxam as extremidades da corda em sentidos opostos com 400 N, o dinamômetro registra 400 N, que é o valor da tração estabelecida no fio.

Leitura

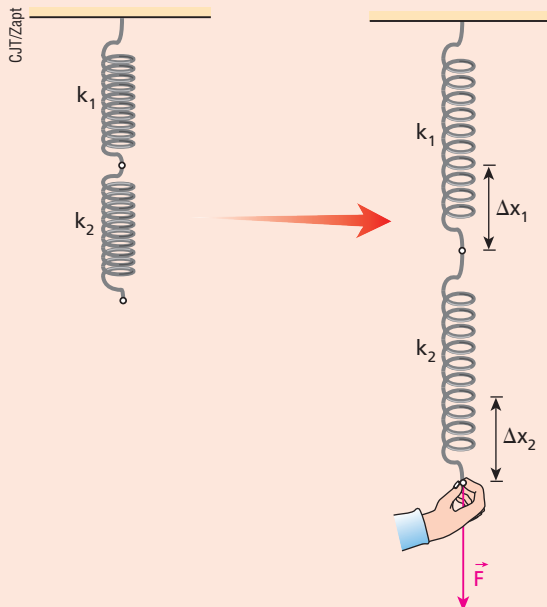
Associação de molas

Thinkstock/Getty Images

Admita que você disponha de duas molas de massas desprezíveis com constantes elásticas respectivamente iguais a k_1 e k_2 que obedeçam à Lei de Hooke nas associações analisadas a seguir.

Há duas maneiras de você associar essas molas para realizar determinadas tarefas: em **série** ou em **paralelo**. Como seria calculada a constante elástica equivalente à associação em cada caso?

1. Associação em série

As molas são dispostas como representa a ilustração a seguir.

Observe que, nesse caso, a intensidade da força aplicada nas duas molas é igual e a deformação total do sistema, Δx, é obtida pela soma das deformações individuais exibidas em cada mola, isto é:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

Mas $F = k\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{k}$

Logo, representando k_s a constante elástica equivalente à associação, vem:

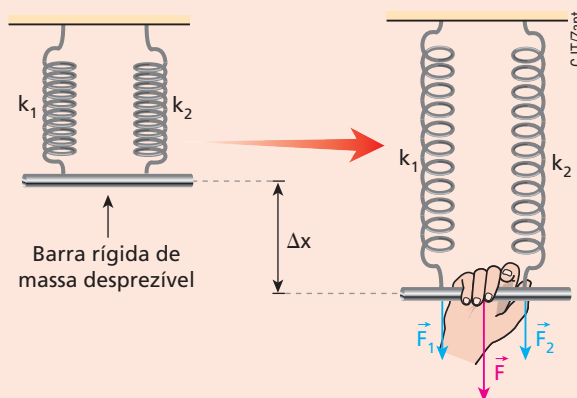
$$\frac{F}{k_s} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

O que corresponde a: $k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

No caso de **n** molas associadas em série, a constante elástica equivalente k_s fica determinada por:

$$\boxed{\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + ... + \frac{1}{k_n}}$$

2. Associação em paralelo

As molas são dispostas como representa a ilustração a seguir.

Aplicando-se uma força $\vec{F}$ em um ponto bem determinado da barra, as duas molas sofrem deformações iguais e a intensidade da força total aplicada na barra é dada pela soma das intensidades das forças aplicadas em cada mola, isto é:

$$F = F_1 + F_2$$

Representando k_p a constante elástica equivalente à associação, decorre que:

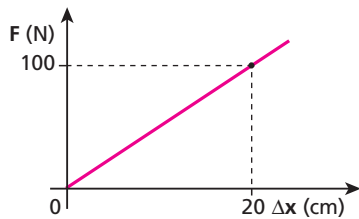
$$k_p \Delta x = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_p = k_1 + k_2}$$

No caso de **n** molas associadas em paralelo, a constante elástica equivalente k_p fica determinada por:

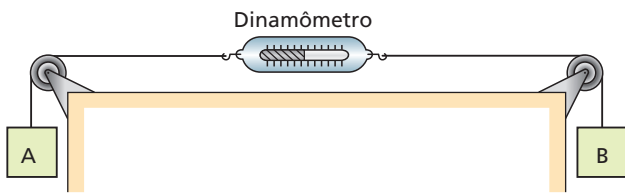
$$\boxed{k_p = k_1 + k_2 + ... + k_n}$$

Exercícios — nível 1

62. O gráfico ao lado mostra como varia a intensidade da força de tração aplicada em uma mola em função da deformação estabelecida:

Determine:

a) a constante elástica da mola (em N/m);

b) a intensidade da força de tração para a deformação de 5,0 cm.

63. Na montagem do esquema, os blocos **A** e **B** têm pesos iguais a 100 N cada um:

A indicação do dinamômetro ideal, que está graduado em newtons, é de:

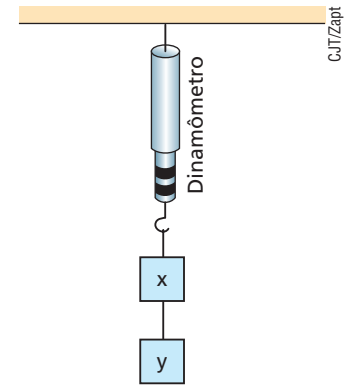
a) 400 N;

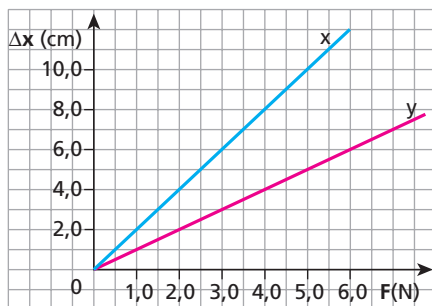
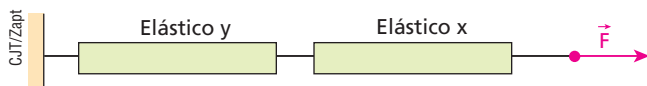
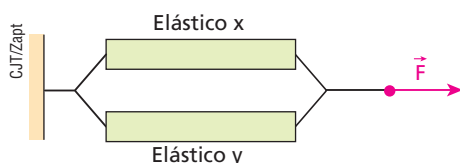
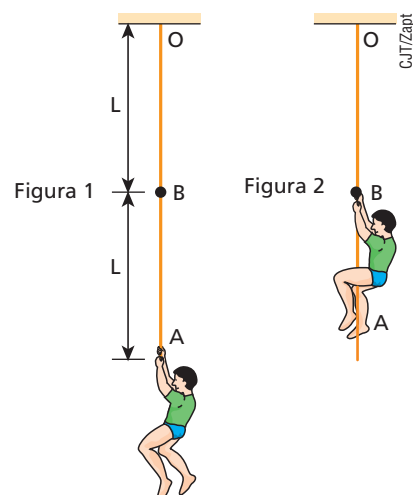
b) 200 N;

c) 100 N;

d) 50 N;

e) zero.

64. (UFRGS) Um dinamômetro fornece uma leitura de 15 N quando os corpos **x** e **y** estão pendurados nele, conforme mostra a figura. Sendo a massa de **y** igual ao dobro da de **x**, qual a tração na corda que une os dois corpos?

Exercícios — nível 2

65. (UFRN) No gráfico seguinte, estão representadas as distensões (Δx) de dois elásticos (**x** e **y**) em função do módulo (**F**) da força de tração aplicada em cada um deles separadamente:

a) Suponha que os elásticos sejam associados em série, como mostra a figura abaixo. Qual é o valor da constante elástica deste sistema em N/cm?

b) Se os elásticos forem associados em paralelo, como mostra a figura seguinte, qual será o valor da constante elástica do sistema em N/cm?

66. Um garoto está em repouso pendurado na extremidade **A** de uma corda elástica de massa desprezível, como ilustra a figura 1. Nesse caso, o alongamento sofrido pela corda é igual a $\mathbf{x_1}$. O garoto sobe, então, permanecendo em repouso dependurado no ponto **B**, como ilustra a figura 2. Nesse caso, o alongamento sofrido pela corda é igual a x_2.

Se a intensidade da aceleração da gravidade é constante, a expressão que relaciona corretamente x_2 e x_1 é:

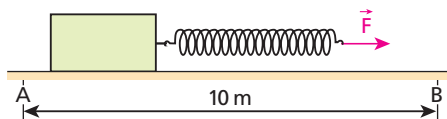
a) $x_2 = 4\,x_1$;

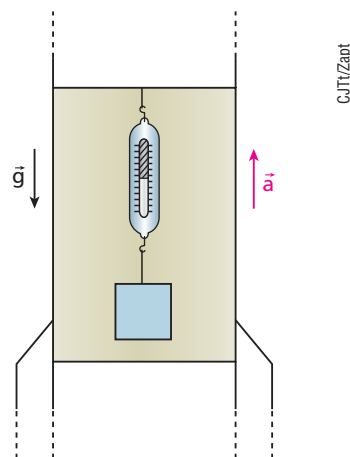
b) $x_2 = 2\,x_1$;

c) $x_2 = x_1$;

d) $x_2 = \frac{x_1}{2}$;

e) $x_2 = \frac{x_1}{4}$.

67. (FEI-SP) O bloco da figura, de massa $m = 4,0$ kg, desloca-se sob a ação de uma força horizontal constante de intensidade $\vec{F}$. A mola ideal, ligada ao bloco, tem comprimento natural (isto é, sem deformação) $\ell_0 = 14,0$ cm e constante elástica $K = 160$ N/m.

Desprezando-se as forças de atrito e sabendo-se que as velocidades escalares do bloco em **A** e **B** são, respectivamente, iguais a 4,0 m/s e 6,0 m/s, qual é, em centímetros, o comprimento da mola durante o movimento?

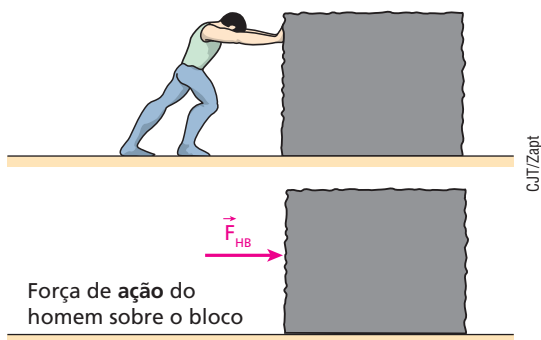
68. A figura abaixo representa o corte de um dos compartimentos de um foguete, que acelera verticalmente para cima nas proximidades da Terra.

No teto do compartimento, está fixado um dinamômetro ideal, que tem preso a si um bloco de massa 4,0 kg. Adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s^2 e admitindo que a indicação do dinamômetro seja 60 N, determine o módulo da aceleração do foguete.

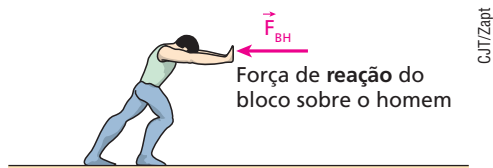
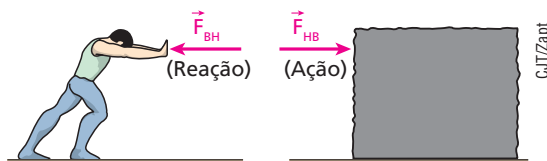
Bloco 6

10. O Princípio da Ação e da Reação (3ª Lei de Newton)

Analisemos a situação a seguir, em que um homem empurra horizontalmente para a direita um pesado bloco.

Ao empurrar o bloco, o homem aplica sobre ele uma força $\vec{F}_{HB}$, que convencionaremos chamar de **força de ação**.

Força de **ação** do homem sobre o bloco

Será que o bloco também "empurra" o homem? Sim! Mostram fatos experimentais que, se o homem exerce força no bloco, este faz o mesmo em relação ao homem. O bloco aplica no homem uma força $\vec{F}_{BH}$, dirigida para a esquerda, que convencionaremos chamar de **força de reação**.

Força de **reação** do bloco sobre o homem

Em resumo, o homem exerce no bloco uma força $\vec{F}_{HB}$, horizontal e para a direita. O bloco, por sua vez, exerce no homem uma força de reação $\vec{F}_{BH}$, horizontal e para a esquerda.

O homem e o bloco trocam entre si forças de ação e reação.

Verifica-se que as forças $\vec{F}_{HB}$ e $\vec{F}_{BH}$ são opostas, isto é, $\vec{F}_{HB} = -\vec{F}_{BH}$. Devemos entender, então, que $\vec{F}_{HB}$ e $\vec{F}_{BH}$ têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos. Supondo, por exemplo, que a intensidade da ação ($\vec{F}_{HB}$) seja 100 N, observaremos que a intensidade da reação ($\vec{F}_{BH}$) também será 100 N.

Outro detalhe importante é o fato de as forças de ação e reação estarem aplicadas em **corpos diferentes**. No caso da situação descrita, a ação ($\vec{F}_{HB}$) está aplicada no bloco, enquanto a reação ($\vec{F}_{BH}$) está aplicada no homem.

O **Princípio da Ação e da Reação** pode ser enunciado da seguinte maneira:

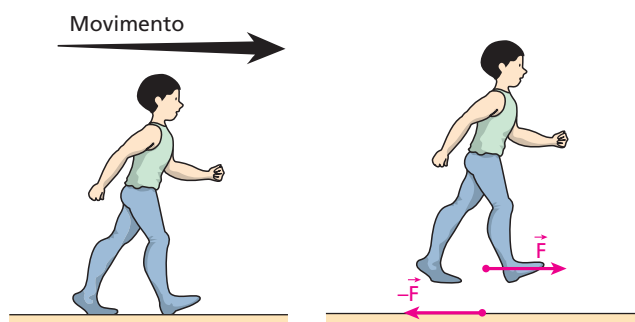
> A toda força de ação corresponde uma de reação, de modo que essas forças têm sempre mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, estando aplicadas em corpos diferentes.

É importante destacar que as forças de ação e reação, por estarem aplicadas em corpos diferentes, nunca se equilibram (isto é, nunca se anulam) mutuamente.

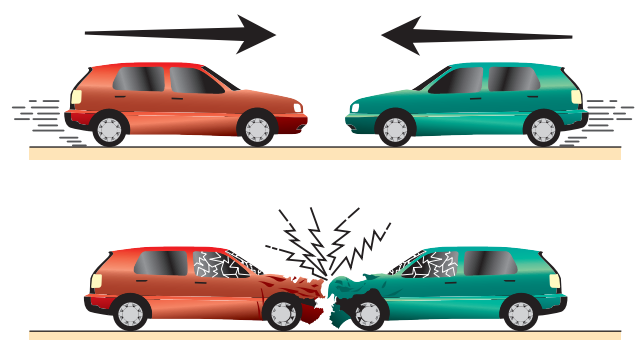
Em nossa vida prática, várias são as situações relacionadas com o Princípio da Ação e da Reação. Vejamos algumas delas.

Exemplo 1:

Ao caminhar, uma pessoa age no chão, empurrando-o "para trás". Este, por sua vez, reage na pessoa, empurrando-a "para a frente".

Observemos, nesse caso, que a ação está aplicada no solo, enquanto a reação está aplicada na pessoa.

Exemplo 2:

Na colisão entre dois automóveis, ambos deformam-se. Isso prova que, se um deles age, o outro reage em sentido contrário.

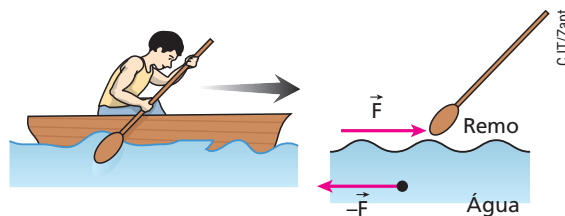
Os automóveis trocam forças de ação e reação que têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos.

Embora os carros troquem forças de intensidades iguais, ficará menos deformado aquele que receber a pancada numa região de estrutura mais resistente.

Exemplo 3:

Ao remar um barco, uma pessoa põe em prática a **Lei da Ação e da Reação**.

O remo age na água, empurrando-a com uma força $-\vec{F}$. Esta, por sua vez, reage no remo, empurrando-o em sentido oposto com uma força $\vec{F}$.

É importante notar que a ação $-\vec{F}$ está aplicada na água, enquanto a reação $\vec{F}$ está aplicada no remo.

Ação e reação aplicam-se em **corpos diferentes**.

Exemplo 4:

Consideremos um corpo sob a influência do campo gravitacional terrestre. Conforme sabemos, o corpo é atraído gravitacionalmente, sendo solicitado por uma força $\vec{P}$. Mas, se a Terra, por meio do seu campo de gravidade, age no corpo, este reage na Terra, atraindo-a com uma força $-\vec{P}$.

O corpo e a Terra interagem gravitacionalmente, trocando entre si forças de ação e reação. Observemos que $\vec{P}$ está aplicada no corpo, enquanto $-\vec{P}$ está aplicada na Terra (no seu centro de massa).

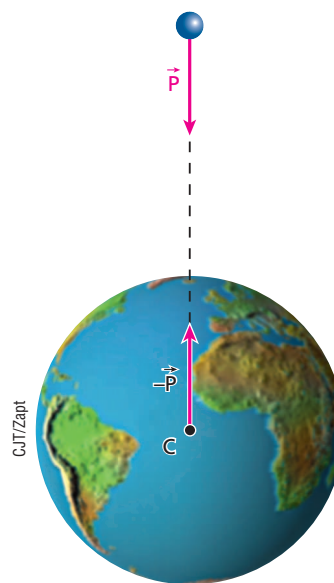



Ilustração fora de escala e em cores- fantasia.

Nota:

- Nos três primeiros exemplos, as forças de ação e de reação exercidas pelos corpos descritos são **forças de contato**. Entretanto, no exemplo 4, as forças trocadas pela Terra e pelo corpo são **forças de campo**, pois advêm de uma interação à distância, que não necessita de contato para ocorrer.
- É importante perceber que as forças de ação e reação têm sempre a mesma natureza, ou seja, são ambas de contato ou ambas de campo.

Cena chocante!

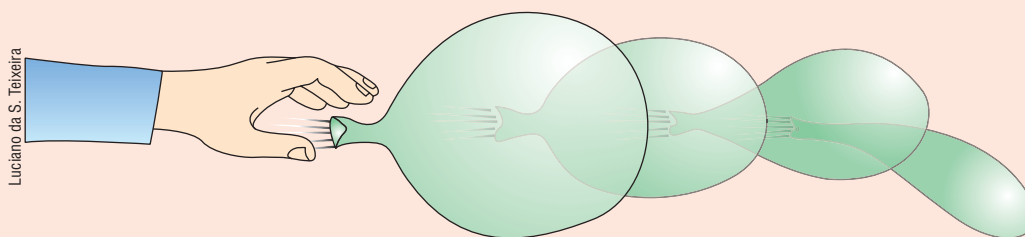
REUTERS/Latinstock

Nesta imagem, literalmente chocante, as forças trocadas entre o rosto do jogador e a bola são do tipo **ação e reação**. Por isso, essas forças têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, estando aplicadas em corpos diferentes. As deformações visíveis tanto no rosto do jogador como na bola deixam evidente que, durante o breve intervalo de tempo em que ocorre o contato, as duas partes – rosto e bola – ficam sob a ação de forças.

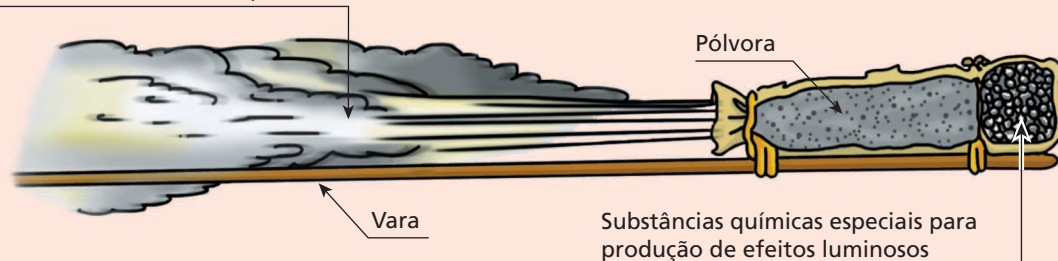
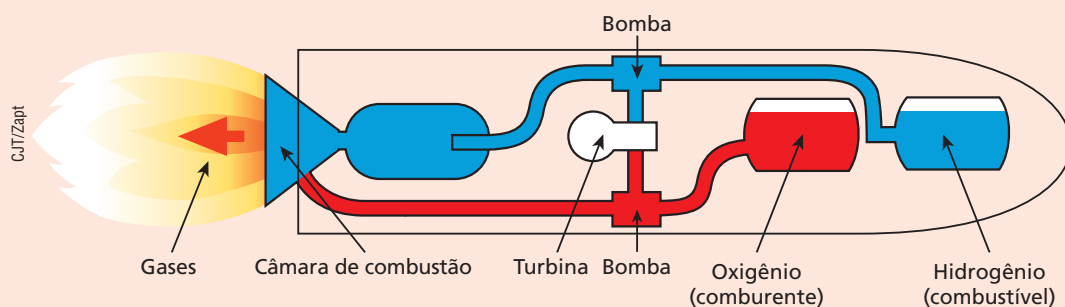
Leitura

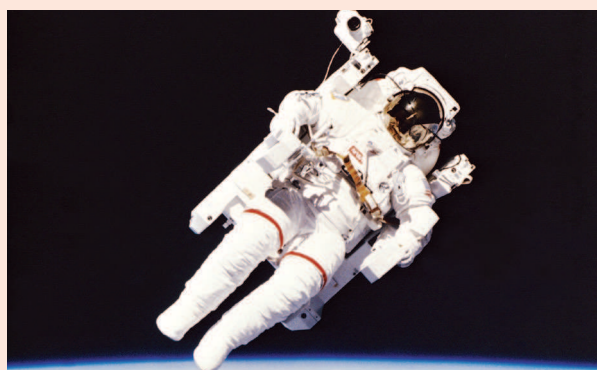
Aplicações da 3ª Lei de Newton

Um experimento simples que você já deve ter realizado está esquematizado na figura abaixo, na qual está representado um balão de borracha movimentando-se à medida que expele o ar existente em seu interior.

Luciano da S. Teixeira

Esse fenômeno pode ser explicado pelo **Princípio da Ação e da Reação**. Cada partícula do ar ejetado recebe uma "força para trás". Essas partículas, que são em grande número, reagem no balão com "pequenas forças para a frente". Essas "forças" originam uma força resultante expressiva, capaz de acelerar o corpo elástico.

Os rojões de vara juninos funcionam de modo similar. Eles utilizam propelente sólido, geralmente a pólvora. Os produtos da combustão dessa substância são lançados violentamente "para trás", reagindo no rojão "para a frente", o que determina a aceleração.

Luís Augusto Ribeiro

Os foguetes que equipam as naves espaciais também se comportam de forma semelhante. Eles operam, por exemplo, com uma combinação de dois propelentes líquidos: o **hidrogênio** (combustível) e o **oxigênio** (comburente). Veja:

Por meio de bombas acionadas por uma turbina, o hidrogênio e o oxigênio são introduzidos na câmara de combustão, na qual se combinam, passando bruscamente para o estado gasoso.

Os gases produzidos na câmara de combustão são lançados "para trás", reagindo no foguete "para a frente", o que provoca a aceleração.

Fotografia de astronauta fora da nave, equipado com uma mochila espacial.

Os foguetes espaciais, ao contrário dos aviões comuns, dispensam o ar, podendo se mover inclusive em regiões de vácuo. Isso ocorre porque as forças propulsoras requeridas por eles não provêm do ar, mas sim das partículas oriundas da queima do propelente.

As mochilas espaciais são equipamentos que operam com base no **Princípio da Ação e da Reação**, permitindo a um astronauta se locomover autonomamente no espaço.

Jatos estrategicamente posicionados, dotados de um dispositivo de acionamento individual, expelem um gás acondicionado em alta pressão. As partículas desse gás recebem forças no ato da ejeção e reagem na mochila em sentido contrário, o que possibilita o deslocamento do astronauta. Isso propicia uma série de atividades fora da nave, como reparos, observações e experimentos.

O conjunto astronauta-mochila troca forças de ação e reação com as partículas de gás expelidas pelos jatos e também com o planeta, já que ambos se atraem mutuamente com forças de origem gravitacional (forças de campo).

Jogando com as Leis de Newton

O rapel é um esporte radical, derivado do alpinismo, que permite descidas verticais em montanhas, cachoeiras e, até mesmo, em pontes e edifícios. Os praticantes utilizam cordas, argolas-mosquetões, argolas em 8 (que têm a função de freio), além, é claro, do capacete. A prática do rapel, que também é empregado em salvamentos e resgates, requer coragem, perícia e treinamento especializado.

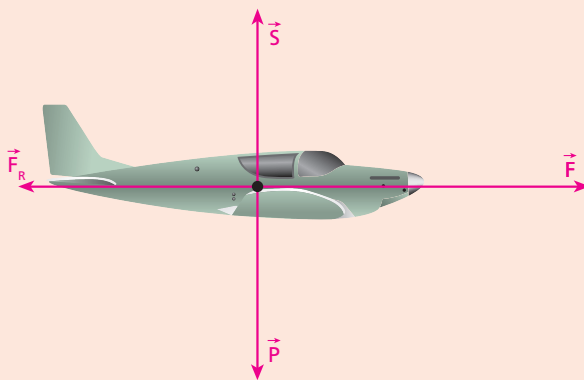
Numa descida vertical, desprezada a influência do ar, o corpo de um praticante de rapel fica sujeito a duas forças de mesma direção: o peso, $\vec{P}$, e a força exercida pela corda, ou força de tração, $\vec{T}$, como ilustra a figura.

Rapel: emoção e adrenalina em descidas radicais.

Conforme o Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton), deve-se inferir que, se $|\vec{P}| = |\vec{T}|$, o corpo da pessoa permanece em repouso ou desloca-se para baixo em movimento retilíneo e uniforme.

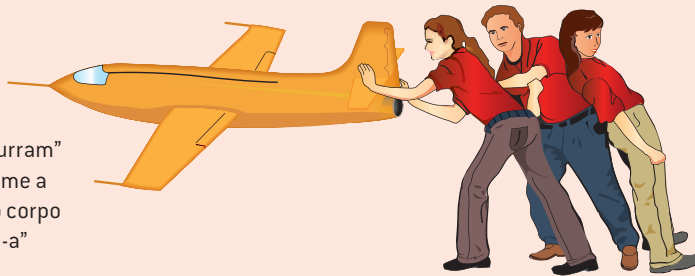
Já, se $|\vec{P}| > |\vec{T}|$, a força resultante e a correspondente aceleração ficam dirigidas para baixo e a pessoa desce em movimento acelerado. Ainda, se $|\vec{P}| < |\vec{T}|$, a força resultante e a correspondente aceleração ficam dirigidas para cima e a pessoa desce em movimento retardado.

O avião, por outro lado, é um dos meios de transporte mais seguros em operação, permitindo deslocamentos rápidos entre dois locais quaisquer do planeta. Prevê-se para meados deste século aeronaves ainda mais rápidas, para pouco mais de 100 passageiros, que voarão a altitudes da ordem de 30 000 m, com velocidades em torno de *Mach 4* (quatro vezes a velocidade do som no ar, ou cerca de 4 900 km/h). Dessa forma, serão possíveis voos entre Nova Iorque e Paris em pouco mais de uma hora.

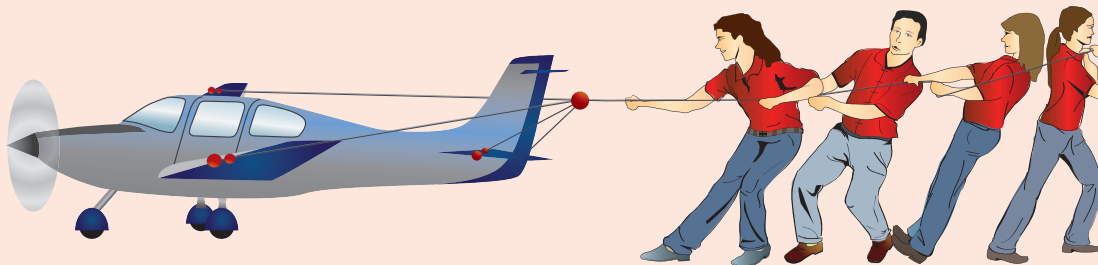
Pilotar aviões, desde os mais simples até os mais sofisticados, implica administrar quatro forças: a de sustentação aerodinâmica $\vec{S}$, a de propulsão, ou empuxo, $\vec{F}$, o peso, $\vec{P}$, e a resistência ao avanço, $\vec{F}_r$, representadas no esquema a seguir.

A sustentação aerodinâmica $(\vec{S})$ provém de diferenças de pressão do ar entre a parte de baixo da aeronave e a parte de cima, como será mais bem explicado em Hidrodinâmica.

A fuselagem e as asas do avião são desenhadas de modo a receberem do ar que escoa em sentido contrário ao do voo a força de sustentação aerodinâmica.

A propulsão ($\vec{F}$) vem da interação entre os motores da aeronave (hélices ou turbinas) e o ar.

Os motores do avião "empurram" o ar para trás e o ar, conforme a 3ª Lei de Newton, reage no corpo da aeronave, "empurrando-a" para frente.

O peso ($\vec{P}$) é a força aplicada pela gravidade.

O peso é vertical e dirigido para baixo, atuando no sentido de "derrubar" a aeronave.

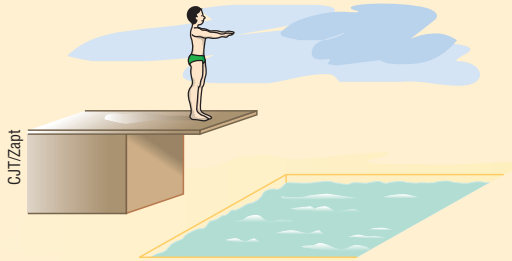
A força de resistência ao avanço ($\vec{F}_R$), por sua vez, também é imposta pelo ar, mas no sentido de resistir o movimento do avião.

A força de resistência ao avanço se deve à fricção entre o corpo do avião e o ar.

Vamos admitir um avião em pleno voo. De forma simples e admitindo-se um referencial fixo no solo terrestre, podemos dizer que:

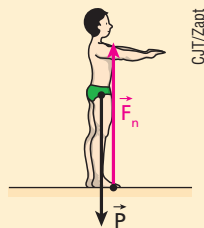
1. Se $\vec{S} + \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_R = \vec{0}$, a aeronave segue em movimento retilíneo e uniforme. Este é o momento de realizar o serviço de bordo, com oferta de lanches e bebidas aos passageiros, já que a aeronave está equilibrada (equilíbrio dinâmico).
2. Se $\vec{F} > \vec{F}_R$, a aeronave avança em movimento acelerado.
3. Se $\vec{F} < \vec{F}_R$, a aeronave avança em movimento retardado.
4. Se $\vec{S} > \vec{P}$, a aeronave realiza movimento com aceleração dirigida para cima (sobe em movimento acelerado ou desce em movimento retardado).
5. Se $\vec{S} < \vec{P}$, a aeronave realiza movimento com aceleração dirigida para baixo (desce em movimento acelerado ou sobe em movimento retardado).

Exercícios

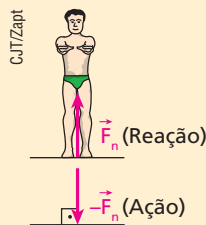
nível 1

69. E.R. Um garoto encontra-se em pé sobre o trampolim de uma piscina, conforme representa o esquema seguinte:

A deflexão do trampolim é desprezível, de forma que este pode ser considerado horizontal. Desprezando-se os efeitos do ar, caracterize todas as forças que agem no corpo do garoto, dizendo quais as outras que formam, com aquelas primeiras, pares ação-reação.
A massa do garoto vale 60 kg e, no local, $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$.

Resolução:

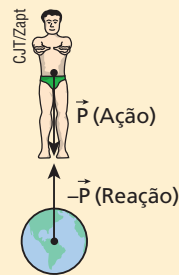
Se o garoto está em repouso na extremidade do trampolim, a resultante das forças que agem em seu corpo é nula (o garoto está em equilíbrio estático).
Apenas duas forças verticais e de sentidos opostos agem no corpo do garoto, conforme representa o esquema a seguir.

$\vec{P}$ = ação gravitacional (exercida pela Terra);
$\vec{F}_n$ = reação normal do apoio (exercida pelo trampolim).
As forças $\vec{P}$ e $\vec{F}_n$ equilibram-se mutuamente, portanto, têm intensidades iguais:

$$|\vec{F}_n| = |\vec{P}| = m\,|\vec{g}| \Rightarrow |\vec{F}_n| = |\vec{P}| = 60 \cdot 10\ (N)$$

$$|\vec{F}_n| = |\vec{P}| = 600\ N$$

A ação correspondente à reação $\vec{F}_n$ é a força de compressão $-\vec{F}_n$ que o garoto exerce no trampolim.

$$|\vec{F}_n| = |-\vec{F}_n| = 600\ N$$

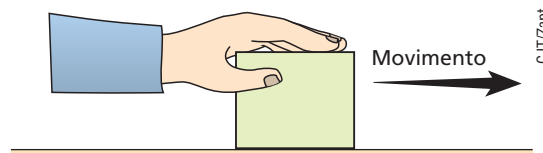
CJT/Zapt

$\vec{P}$ (Ação)

$-\vec{P}$ (Reação)

A reação correspondente à ação $\vec{P}$ é a força $-\vec{P}$, que o garoto exerce no centro de massa da Terra.

$$|\vec{P}| = |-\vec{P}| = 600\ N$$

Nota:
- As forças $\vec{P}$ e $\vec{F}_n$ têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, porém, não constituem entre si um par ação-reação, uma vez que estão aplicadas no mesmo corpo (o do garoto).

70. Um homem empurra um bloco sobre uma mesa horizontal perfeitamente sem atrito, aplicando-lhe uma força paralela à mesa, conforme ilustra a figura:

Faça um esquema representando todas as forças que agem no bloco, bem como as que, com elas, formam pares ação-reação.

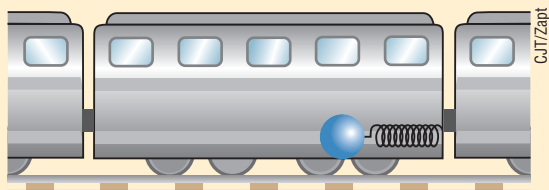
71. Leia a tirinha a seguir:

Papai Noel, o personagem da tirinha, é reconhecidamente bastante opulento e rechonchudo.
Suponha que ele esteja na Terra, na Lapônia, e que a balança se encontre em repouso, apoiada sobre o solo horizontal.

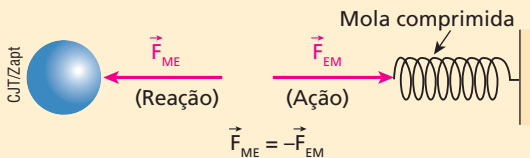
Considere que, na situação de repouso, Papai Noel exerça sobre a plataforma da balança uma compressão de intesidade 1 200 N. A respeito do descrito, são feitas as seguintes afirmações:

I. O peso do Papai Noel, na Terra, tem intensidade 1 200 N.
II. A plataforma da balança exerce sobre Papai Noel uma força de intensidade 1 200 N.
III. Papai Noel exerce no centro de massa da Terra uma força atrativa de intensidade menor que 1 200 N.
IV. O peso de Papai Noel e a força que a plataforma da balança exerce sobre ele constituem entre si um par ação-reação.

É (são) verdadeiras(s):
a) somente I e II;
b) somente II e III;
c) somente I, II e III;
d) somente I, III e IV;
e) todas as afirmativas.

72. E.R. Um trem está se deslocando para a direita sobre trilhos retilíneos e horizontais, com movimento uniformemente variado em relação à Terra.
Uma esfera metálica, que está apoiada no piso horizontal de um dos vagões, é mantida em repouso em relação ao vagão por uma mola colocada entre ela e a parede frontal, como ilustra a figura. A mola encontra-se comprimida.

Supondo desprezível o atrito entre a esfera e o piso do vagão:
a) esquematize a força $\vec{F}_{EM}$, que a esfera exerce na mola, e a força $\vec{F}_{ME}$ que a mola exerce na esfera.
b) determine a direção e o sentido da aceleração do trem em relação à Terra.
c) verifique se o movimento do trem é uniformemente acelerado ou uniformemente retardado.

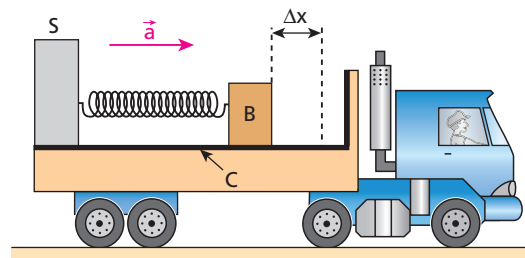
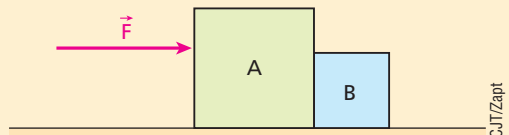
Resolução:

a) Se a mola encontra-se **comprimida**, a força de contato (ação) $\vec{F}_{EM}$ que ela recebe da esfera é dirigida para a direita.
A mola, por sua vez, reage na esfera com a força $\vec{F}_{ME}$ dirigida para a esquerda, conforme está esquematizado abaixo:

b) A força resultante na esfera é $\vec{F}_{ME}$. Como essa força está dirigida para a esquerda, o mesmo ocorre com a correspondente aceleração (2ª Lei de Newton), que é igual à do trem, já que a esfera está em repouso em relação ao seu piso.

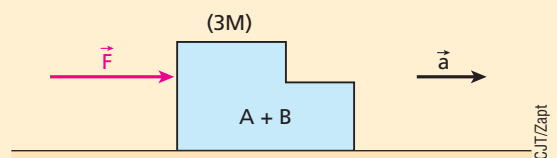
> A aceleração da esfera, que é igual à do trem, é horizontal e dirigida para a esquerda.

c)

O movimento é **uniformemente retardado**, uma vez que o vetor aceleração ($\vec{a}$) tem sentido oposto ao do movimento do trem.

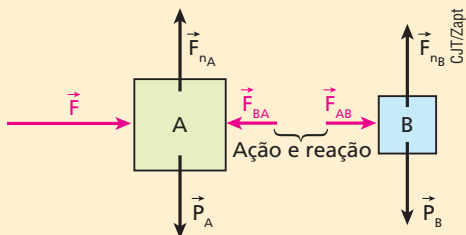
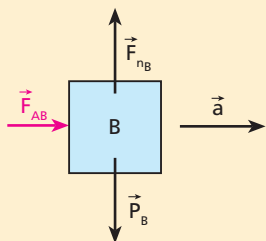
73. (UFPE – mod.) Uma mola de constante elástica $K = 1{,}5 \cdot 10^3$ N/m é montada horizontalmente em um caminhão, ligando um bloco **B** de massa $m = 30$ kg a um suporte rígido **S**. A superfície de contato entre o bloco **B** e a base **C** é perfeitamente lisa. Observa-se que, quando o caminhão se desloca sobre uma superfície plana e horizontal com aceleração $\vec{a}$, dirigida para a direita, a mola sofre uma compressão $\Delta x = 10$ cm. Determine o módulo de $\vec{a}$ em m/s².

74. E.R. Os dois blocos indicados na figura encontram-se em contato, apoiados em um plano horizontal sem atrito. Com os blocos em repouso, aplica-se em **A** uma força constante, paralela ao plano de apoio e de intensidade **F**. Sabe-se que as massas de **A** e **B** valem, respectivamente, **2M** e **M**.

Não considerando a influência do ar, determine:
a) o módulo da aceleração adquirida pelo sistema;
b) a intensidade da força de contato trocada pelos blocos.

Resolução:

a) A resultante externa que acelera o conjunto A + B é $\vec{F}$:

Aplicando ao conjunto A + B (de massa total 3M) o **Princípio Fundamental da Dinâmica**, vem:

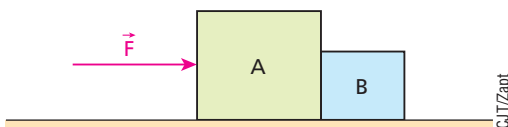
$$F = (m_A + m_B)\, a \Rightarrow F = 3M\, a$$

$$\boxed{a = \frac{F}{3M}}$$

b) Isolando os blocos e fazendo o esquema das forças que agem em cada um:

Na região de contato, os blocos trocam as forças $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$, que constituem um par ação-reação.
A intensidade de $\vec{F}_{AB}$ (ou de $\vec{F}_{BA}$) pode ser facilmente calculada aplicando-se a **2ª Lei de Newton** ao bloco **B**. Assim:

$\vec{F}_{nB}$ e $\vec{P}_B$ equilibram-se, já que a aceleração vertical é nula. Logo, quem acelera exclusivamente o bloco **B** é $\vec{F}_{AB}$.

$$F_{AB} = m_B\, a \Rightarrow F_{AB} = M\, \frac{F}{3M}$$

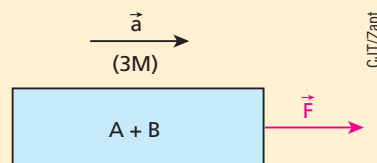
$$\boxed{F_{AB} = F_{BA} = \frac{F}{3}}$$

75. Na figura abaixo, os blocos **A** e **B** têm massas $m_A = 6{,}0$ kg e $m_B = 2{,}0$ kg e, estando apenas encostados entre si, repousam sobre um plano horizontal perfeitamente liso.

A partir de um dado instante, exerce-se em **A** uma força horizontal $\vec{F}$, de intensidade igual a 16 N. Desprezando a influência do ar, calcule:
a) o módulo da aceleração do conjunto;
b) a intensidade das forças que **A** e **B** trocam entre si na região de contato.

76. E.R. A figura seguinte representa dois blocos, **A** (massa **M**) e **B** (massa **2M**), interligados por um fio ideal e apoiados em uma mesa horizontal sem atrito:

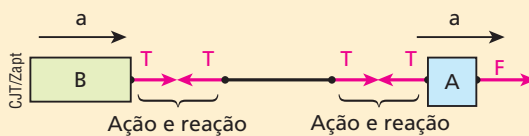
Aplica-se em **A** uma força paralela à mesa, de intensidade **F** e que acelera o conjunto. Desprezando a influência do ar, calcule:
a) o módulo da aceleração do sistema;
b) a intensidade da força que traciona o fio.

Resolução:

a) A resultante externa que acelera o conjunto A + B é $\vec{F}$:

O módulo da aceleração $\vec{a}$ é calculado pelo **Princípio Fundamental da Dinâmica**:

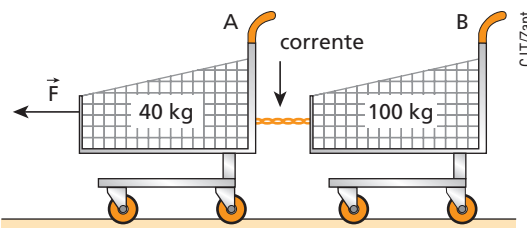
$$F = (m_A + m_B)\, a \quad \Rightarrow \quad F = 3M\, a$$

$$\boxed{a = \frac{F}{3M}}$$

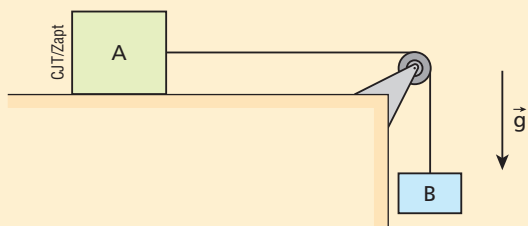
b) As forças verticais (peso e normal) equilibram-se em cada bloco, assim, isolando os blocos e o fio, obtemos o seguinte esquema de forças horizontais:

A força que traciona o fio tem a mesma intensidade daquela que acelera o bloco **B**. Assim, aplicando a **B** a **2ª Lei de Newton**, vem:

$$T = m_B\, a \quad \Rightarrow \quad T = 2M\, \frac{F}{3M}$$

$$\boxed{T = \frac{2}{3}\, F}$$

77. (FGV-SP) Dois carrinhos de supermercado, **A** e **B**, podem ser acoplados um ao outro por meio de uma pequena corrente de massa desprezível, de modo que uma única pessoa, em vez de empurrar dois carrinhos separadamente, possa puxar o conjunto pelo interior do supermercado. Um cliente aplica uma força horizontal constante de intensidade **F** sobre o carrinho da frente, dando ao conjunto uma aceleração de intensidade 0,5 m/s^2.

Sendo o piso plano e as forças de atrito desprezíveis, o módulo da força **F** e o da força de tração na corrente são, em N, respectivamente:
a) 70 e 20. b) 70 e 40. c) 70 e 50. d) 60 e 20. e) 60 e 50.

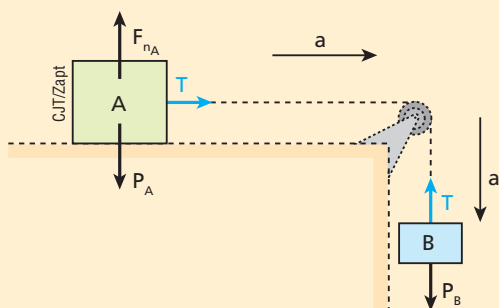
78. E.R. Na montagem representada na figura, o fio é inextensível e de massa desprezível; a polia pode girar sem atrito em torno de seu eixo, tendo inércia de rotação desprezível; as massas dos blocos **A** e **B** valem, respectivamente, m_A e m_B; inexiste atrito entre o bloco **A** e o plano horizontal em que se apoia e a influência do ar é insignificante:

TF1-133_183_5P_P2T1.indd 167 16/08/12 17:11

Em determinado instante, o sistema é abandonado à ação da gravidade. Assumindo para o módulo da aceleração da gravidade o valor **g**, determine:

a) o módulo da aceleração do sistema;

b) a intensidade da força que traciona o fio.

Resolução:

Façamos, inicialmente, o esquema das forças que agem em cada bloco:

Apliquemos o **Princípio Fundamental da Dinâmica** a cada um deles:

Bloco **B**: $P_B - T = m_B\,a$ (I)

Bloco **A**: $T = m_A\,a$ (II)

a) Somando (I) e (II), calculamos o módulo da aceleração do sistema:

$$P_B = (m_A + m_B)\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{P_B}{m_A + m_B}$$

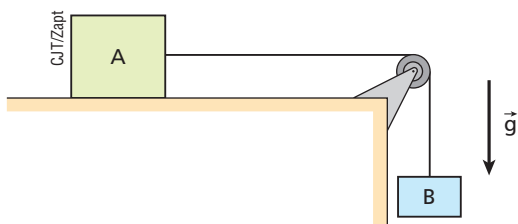
$$\boxed{a = \frac{m_B}{m_A + m_B}\,g}$$

Nota:

• A força resultante que acelera o conjunto A + B é o peso de **B**.

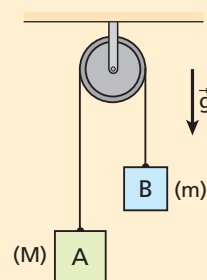
b) Substituindo o valor de **a** em (II), obtemos a intensidade da força que traciona o fio:

$$T = m_A\,a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\,g}$$

79. No arranjo experimental esquematizado a seguir, os blocos **A** e **B** têm massas respectivamente iguais a 4,0 kg e 1,0 kg (desprezam-se os atritos, a influência do ar e a inércia da polia).

Considerando o fio que interliga os blocos leve e inextensível e adotando nos cálculos $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, determine:

a) o módulo da aceleração dos blocos;

b) a intensidade da força de tração estabelecida no fio.

80. E.R. O dispositivo representado no esquema ao lado é uma Máquina de Atwood. A polia tem inércia de rotação desprezível e não se consideram os atritos. O fio é inextensível e de massa desprezível, e, no local, a aceleração gravitacional tem módulo **g**. Tem-se, ainda, que as massas dos corpos **A** e **B** valem, respectivamente, **M** e **m**, com **M** > **m**. Supondo que em determinado instante a máquina é destravada, determine:

a) o módulo da aceleração adquirida pelo bloco **A** e pelo bloco **B**;

b) a intensidade da força que traciona o fio durante o movimento dos blocos.

Resolução:

A figura ao lado mostra o esquema das forças que agem em cada corpo. Como M > m, o corpo **A** é acelerado para baixo, enquanto **B** é acelerado para cima. Aplicando a **A** e a **B** a **2ª Lei de Newton**, obtemos:

Corpo **A**: $P_A - T = M\,a$ (I)

Corpo **B**: $T - P_B = m\,a$ (II)

a) Somando (I) e (II), calculamos o módulo das acelerações dos blocos:

$$P_A - P_B = (M + m)\,a \quad \Rightarrow$$

$$(M - m)\,g = (M + m)\,a$$

$$\boxed{a = \frac{(M - m)}{M + m}\,g}$$

Nota:

• A força resultante que acelera o conjunto A + B é dada pela diferença entre os pesos de **A** e **B**.

b) De (II), segue que:

$$T - m\,g = m\,\frac{(M - m)}{M + m}\,g$$

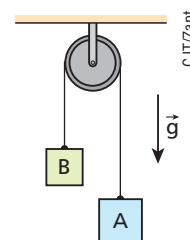
Donde: $\boxed{T = \frac{2M\,m}{M + m}\,g}$

81. O dispositivo esquematizado na figura é uma Máquina de Atwood. No caso, não há atritos, o fio é inextensível e desprezam-se sua massa e a da polia.

Supondo que os blocos **A** e **B** tenham massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 2,0 kg e que $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, determine:

a) o módulo da aceleração dos blocos;

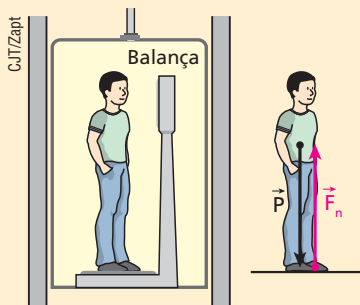
b) a intensidade da força de tração estabelecida no fio;

c) a intensidade da força de tração estabelecida na haste de sustentação da polia.

82. E.R. Um homem de massa 60 kg acha-se de pé sobre uma balança graduada em newtons. Ele e a balança situam-se dentro da cabine de um elevador que tem, em relação à Terra, uma aceleração vertical de módulo 1,0 m/s^2. Adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, calcule:

a) a indicação da balança no caso de o elevador estar acelerado para cima;

b) a indicação da balança no caso de o elevador estar acelerado para baixo.

Resolução:

A figura abaixo representa a situação proposta, juntamente com o esquema das forças que agem no homem.

$\vec{P}$: peso do homem ($P = m\,g = 60 \cdot 10 = 600$ N);
$\vec{F}_n$: reação normal da balança.
A força $\vec{F}_n$ tem intensidade igual à indicação da balança. Isso ocorre pelo fato de o homem e a balança trocarem, na região de contato, forças de ação e reação. A intensidade de $\vec{F}_n$ é o **peso aparente** do homem dentro do elevador.

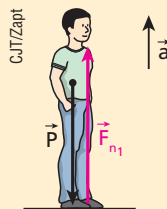
a) No caso de o elevador estar acelerado para cima, $|\vec{F}_{n_1}| > |\vec{P}|$:

Aplicando a **2ª Lei de Newton**, vem:

$$F_{n_1} - P = m\,a \Rightarrow F_{n_1} = m\,(g + a)$$

$$F_{n_1} = 60\,(10 + 1,0) \quad (N)$$

$$\boxed{F_{n_1} = 660\text{ N}}$$

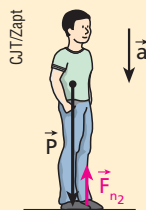
O peso aparente é **maior** que o peso real (660 N > 600 N).

b) No caso de o elevador estar acelerado para baixo, $|\vec{F}_{n_2}| < |\vec{P}|$:

Aplicando a **2ª Lei de Newton**, vem:

$$P - F_{n_2} = m\,a \Rightarrow F_{n_2} = m\,(g - a)$$

$$F_{n_2} = 60\,(10 - 1,0) \quad (N)$$

$$\boxed{F_{n_2} = 540\text{ N}}$$

O peso aparente é **menor** que o peso real (540 N < 600 N).

Nota:

- Podemos dizer que dentro de um elevador em movimento acelerado na vertical reina uma **gravidade aparente** (g_{ap}) diferente da gravidade externa (g).

(I) **Elevador com aceleração de módulo a, dirigida para cima (↑), em movimento ascendente ou descendente.**
Nesse caso, os corpos dentro do elevador aparentam um peso maior que o real.

$$\boxed{g_{ap} = g + a}$$

(II) **Elevador com aceleração de módulo a, dirigida para baixo (↓), em movimento ascendente ou descendente.**
Nesse caso, os corpos dentro do elevador aparentam um peso menor que o real.

$$\boxed{g_{ap} = g - a}$$

Observe que, se a = g, teremos $g_{ap} = 0$ e os corpos, dentro do elevador, aparentarão peso nulo.

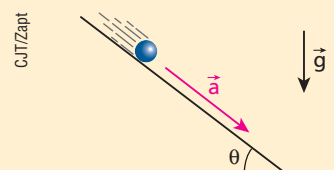
83. Em determinado parque de diversões, o elevador que despenca verticalmente em queda livre é a grande atração. Rafael, um garoto de massa igual a 70 kg, encara o desafio e, sem se intimidar com os comentários de seus colegas, embarca no brinquedo, que começa a subir a partir do repouso. Durante a ascensão vertical do elevador, são verificadas três etapas:

I. movimento uniformemente acelerado com aceleração de módulo 1,0 m/s^2;
II. movimento uniforme;
III. movimento uniformemente retardado com aceleração de módulo 1,0 m/s^2.

Depois de alguns segundos estacionado no ponto mais alto da torre, de onde Rafael acena triunfante para o grupo de amigos, o elevador é destravado, passando a cair com aceleração praticamente igual à da gravidade (10 m/s^2). Pede-se calcular o peso aparente de Rafael:

a) nas etapas I, II e III;

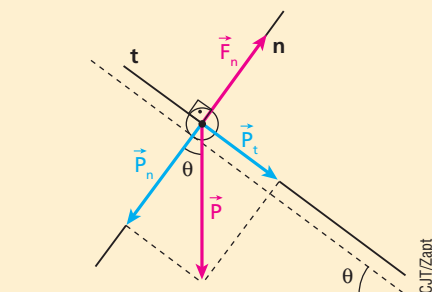
b) durante a queda livre.

84. E.R. Uma partícula de massa **m** é abandonada no topo do plano inclinado da figura, de onde desce em movimento acelerado com aceleração $\vec{a}$.

O ângulo de inclinação do plano em relação à horizontal é **θ** e o módulo da aceleração da gravidade é **g**. Desprezando os atritos e a influência do ar:

a) calcule o módulo de $\vec{a}$;

b) trace os seguintes gráficos: módulo de $\vec{a}$ em função de **θ** e módulo de $\vec{a}$ em função de **m**.

Resolução:

a) Nas condições citadas, apenas duas forças atuam na partícula: seu peso ($\vec{P}$) e a reação normal do plano inclinado ($\vec{F}_n$):

$\vec{P}_n$ = componente normal do peso ($P_n = P\cos\theta$)
Como, na direção **n**, a aceleração da partícula é nula, deve ocorrer:

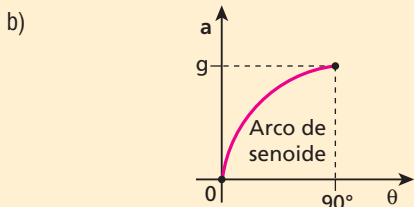
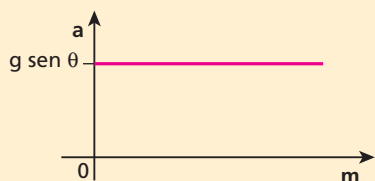
$$P_n = F_n$$

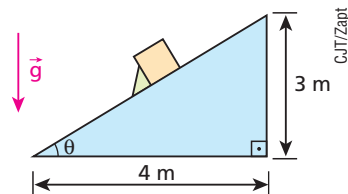
$\vec{P_t}$ = componente tangencial do peso ($P_t = P \text{ sen } \theta$)
A resultante externa que acelera a partícula na direção **t** é $\vec{P_t}$.
Logo, aplicando o **Princípio Fundamental da Dinâmica**, vem:

$$P_t = m\,a$$

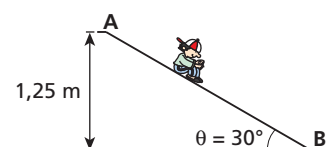
$$P \text{ sen } \theta = m\,a \Rightarrow m\,g \text{ sen } \theta = m\,a$$

$$\boxed{a = g \text{ sen } \theta}$$

b)

Como **a** independe de **m**, obtemos:

85. No plano inclinado representado ao lado, o bloco encontra-se impedido de se movimentar devido ao calço no qual está apoiado. Os atritos são desprezíveis, a massa do bloco vale 5,0 kg e $g = 10 \text{ m/s}^2$.

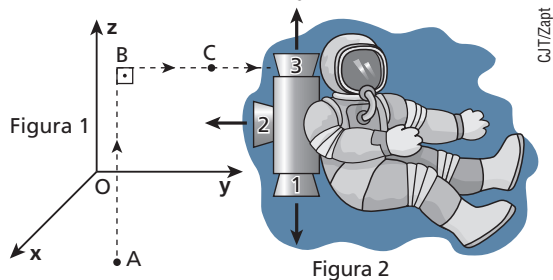
CJT/Zapt

a) Copie a figura esquematizando todas as forças que agem no bloco.
b) Calcule as intensidades das forças com as quais o bloco comprime o calço e o plano de apoio.

86. Um garoto de massa igual a 40,0 kg parte do repouso do ponto **A** do escorregador esquematizado ao lado e desce sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar.

CJT/Zapt

Sabendo-se que no local a aceleração da gravidade tem intensidade $10{,}0 \text{ m/s}^2$, responda:
a) Qual o módulo da aceleração adquirida pelo garoto? O valor calculado depende de sua massa?
b) Qual o intervalo de tempo gasto pelo garoto no percurso de **A** até **B**?
c) Com que velocidade ele atinge o ponto **B**?

Exercícios — nível 2

87. Um astronauta, do qual desprezaremos as dimensões, encontra-se em repouso no ponto **A** da figura 1, numa região do espaço livre de ações gravitacionais significativas. Oxyz é um referencial inercial. Por meio de uma mochila espacial, dotada dos jatos (1), (2) e (3), de mesma potência e que expelem combustível queimado nos sentidos indicados na figura 2, o astronauta consegue mover-se em relação a Oxyz.

CJT/Zapt

Para percorrer a trajetória A → B → C →, o astronauta deverá acionar, durante o mesmo intervalo de tempo, os jatos na seguinte sequência:

a) (1) e (2);
b) (3) e (2);
c) (3), (1) e (2);
d) (1), (3) e (2);
e) (1), (2) e (3).

88. E.R. Dois garotos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 40 kg e 60 kg, encontram-se sobre a superfície plana, horizontal e perfeitamente lisa de um grande lago congelado. Em dado instante, **A** empurra **B**, que sai com velocidade de 4,0 m/s. Supondo desprezível a influência do ar, determine:
a) o módulo da velocidade de **A** após o empurrão;
b) a distância que separa os garotos, decorridos 10 s do empurrão.

Resolução:

a) Durante o contato (empurrão), **A** e **B** trocam entre si forças de ação e reação: **A** age em **B** e **B** reage em **A**.
O **Princípio Fundamental da Dinâmica**, aplicado ao garoto **A**, conduz a:

$$F_A = m_A\,a_A = m_A \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = m_A \frac{(v_A - v_{0_A})}{\Delta t}$$

Como $v_{0_A} = 0$ (**A** estava inicialmente parado), vem:

$$F_A = m_A \frac{v_A}{\Delta t}$$

O **Princípio Fundamental da Dinâmica**, aplicado ao garoto **B**, conduz a:

$$F_B = m_B\,a_B = m_B \frac{\Delta v_B}{\Delta t} = m_B \frac{(v_B - v_{0_B})}{\Delta t}$$

Como $v_{0_B} = 0$ (**B** estava inicialmente parado), vem:

$$F_B = m_B \frac{v_B}{\Delta t}$$

Notas:
- F_A e F_B são as intensidades das forças médias recebidas, respectivamente, por **A** e **B** no ato do empurrão (ação e reação).

Como as forças de ação e reação têm intensidades iguais, segue que:

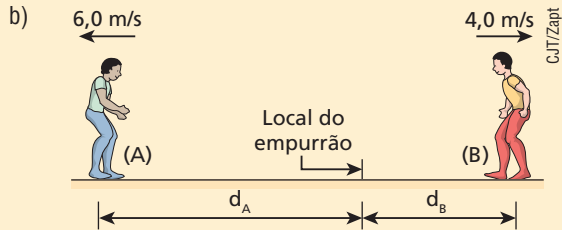
$$F_A = F_B \Rightarrow m_A \frac{v_A}{\Delta t} = m_B \frac{v_B}{\Delta t}$$

Daí:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

• As velocidades adquiridas pelos garotos têm intensidades inversamente proporcionais às respectivas massas.
Sendo $v_B = 4,0$ m/s, $m_A = 40$ kg e $m_B = 60$ kg, calculamos v_A:

$$\frac{v_A}{4,0} = \frac{60}{40} \Rightarrow \boxed{v_A = 6,0 \text{ m/s}}$$

b)

A distância **D** que separa os garotos, decorridos 10 s do empurrão, é dada por:

$$D = d_A + d_B$$

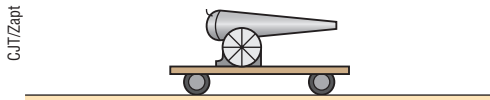
em que d_A e d_B são as distâncias percorridas por **A** e por **B** no referido intervalo de tempo.
Assim:

$$d_A = 6,0 \frac{m}{s} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow d_A = 60 \text{ m}$$

$$d_B = 4,0 \frac{m}{s} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow d_B = 40 \text{ m}$$

Logo:

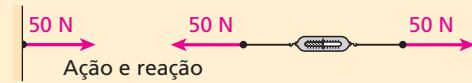
$$D = 60 \text{ m} + 40 \text{ m} \Rightarrow \boxed{D = 100 \text{ m}}$$

89. O esquema seguinte representa um canhão rigidamente ligado a um carrinho, que pode deslizar sem atrito sobre o plano horizontal.

O sistema, inicialmente em repouso, dispara horizontalmente um projétil de 20 kg de massa, que sai com velocidade de $1,2 \cdot 10^2$ m/s. Sabendo que a massa do conjunto canhão-carrinho perfaz $2,4 \cdot 10^3$ kg e desprezando a resistência do ar, calcule o módulo da velocidade de recuo do conjunto canhão-carrinho após o disparo.

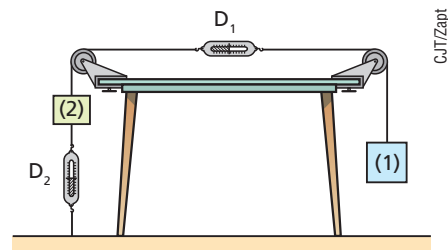
90. E.R. Nas figuras seguintes, o dinamômetro tem peso desprezível. Determine, em cada caso, a indicação do aparelho, supondo que a unidade de calibração das escalas seja coerente com as unidades em que estão dadas as intensidades das forças. Os fios são ideais, isto é, inextensíveis, flexíveis e de massas desprezíveis.

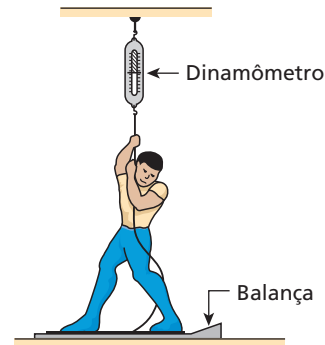
Resolução:

a) Nesse caso, o dinamômetro indica 50 N, conforme suas características funcionais.

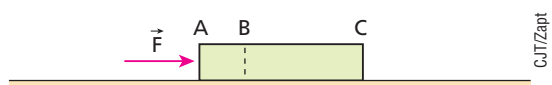
b) Essa situação equivale fisicamente à do caso **a**:

De fato, o dinamômetro puxa a parede para a direita, aplicando-lhe uma força de 50 N, e esta reage, puxando o dinamômetro para a esquerda, também com uma força de 50 N. Assim, nesse caso, o dinamômetro indica 50 N.

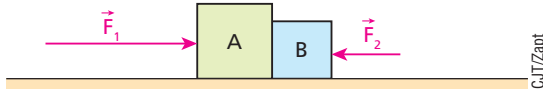
c) Nesse arranjo, o dinamômetro indica a intensidade do peso do bloco, isto é, 30 kgf.

91. Dois blocos (1) e (2) de pesos respectivamente iguais a 30 kgf e 10 kgf estão em equilíbrio, conforme mostra a figura abaixo:

Quais as indicações dos dinamômetros D_1 e D_2, graduados em kgf?

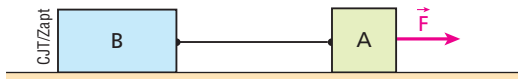
92. (Faap-SP) Um homem está sobre a plataforma de uma balança e exerce força sobre um dinamômetro preso ao teto. Sabe-se que, quando a leitura no dinamômetro é zero, a balança indica 80 kgf.

a) Qual a intensidade do peso do homem?

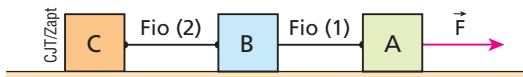
b) Se o homem tracionar o dinamômetro, de modo que este indique 10 kgf, qual será a nova indicação da balança?

93. (Vunesp-SP) Uma barra AC homogênea de massa **M** e comprimento **L**, colocada em uma mesa lisa e horizontal, desliza sem girar sob a ação de uma força $\vec{F}$, também horizontal, aplicada em sua extremidade esquerda.

Se o comprimento da fração BC da barra é $\frac{2L}{3}$, determine a intensidade da força que essa fração exerce na fração AB.

94. Na situação esquematizada na figura, desprezam-se os atritos e a influência do ar. As massas de **A** e **B** valem, respectivamente, 3,0 kg e 2,0 kg.

Sabendo-se que as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são paralelas ao plano horizontal de apoio e que $|\vec{F}_1| = 40$ N e $|\vec{F}_2| = 10$ N, pode-se afirmar que a intensidade da força que **B** aplica em **A** vale:

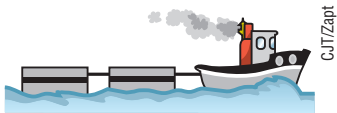
a) 10 N; b) 12 N; c) 18 N; d) 22 N; e) 26 N.

95. Na situação do esquema seguinte, não há atrito entre os blocos e o plano horizontal, a influência do ar é desprezível e as massas de **A** e de **B** valem, respectivamente, 2,0 kg e 8,0 kg:

Sabe-se que o fio leve e inextensível que une **A** com **B** suporta, sem romper-se, uma tração máxima de 32 N. Calcule a maior intensidade admissível à força $\vec{F}$, horizontal, para que o fio não se rompa.

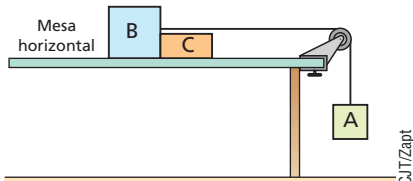
96. Na montagem esquematizada na figura, os blocos **A**, **B** e **C** têm massas iguais a 2,0 kg e a força $\vec{F}$, paralela ao plano horizontal de apoio, tem intensidade 12 N.

Desprezando todas as forças resistentes, calcule:

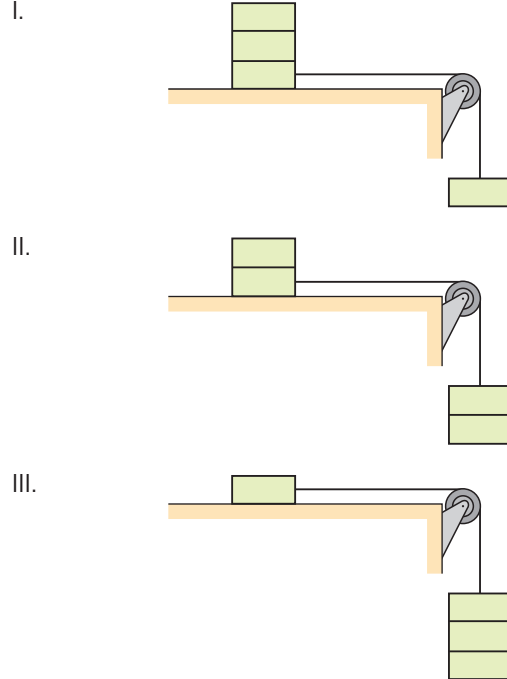
a) o módulo da aceleração do sistema;

b) as intensidades das forças de tração estabelecidas nos fios ideais (1) e (2).

97. Um rebocador arrasta dois flutuadores idênticos, de 3,2 t de massa cada, imprimindo-lhes uma aceleração de módulo 0,10 m/s^2, ao longo de uma linha reta. A força de tração no cabo que une a embarcação ao primeiro flutuador tem intensidade de 800 N.

A força de resistência, aplicada pela água em cada flutuador, tem intensidade **f**, e a força de tração no cabo que une os dois flutuadores tem intensidade **T**. Indique a opção correta:

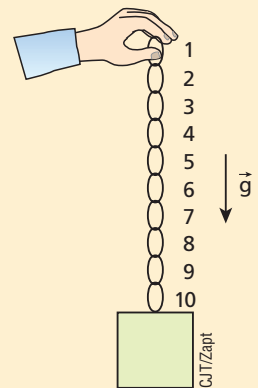
a) $f = 80$ N; $T = 400$ N;
b) $f = 400$ N; $T = 800$ N;
c) $f = 320$ N; $T = 400$ N;
d) $f = 400$ N; $T = 400$ N;
e) $f = 160$ N; $T = 800$ N.

98. Na figura, os blocos **A**, **B** e **C** têm massas respectivamente iguais a **3M**, **2M** e **M**; o fio e a polia são ideais. Os atritos são desprezíveis e a aceleração da gravidade tem intensidade **g**.

Admitindo os blocos em movimento sob a ação da gravidade, calcule as intensidades da força de tração no fio (**T**) e da força de contato trocada por **B** e **C** (**F**).

99. Admita que você disponha de quatro blocos iguais, de massa **M** cada um, e de um fio e de uma polia ideais. Com esses elementos, você realiza as três montagens esquematizadas a seguir:

O plano horizontal de apoio é perfeitamente liso e, no local, a aceleração da gravidade tem módulo **g**. Desprezando os efeitos do ar e admitindo que os blocos empilhados se movam em relação à mesa de apoio sem apresentar movimento relativo entre si, calcule para as montagens I, II e III:

a) o módulo da aceleração dos blocos;

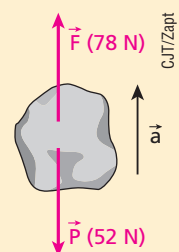
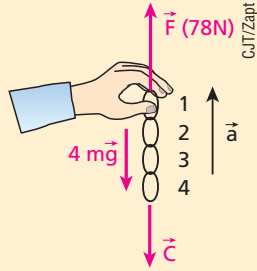
b) a intensidade da força de tração no fio.

100. E.R. Na figura, estão representadas uma caixa, de massa igual a 4,7 kg, e uma corrente constituída de dez elos iguais, com massa de 50 g cada um. Um homem aplica no elo 1 uma força vertical dirigida para cima, de intensidade 78 N, e o sistema adquire aceleração. Admitindo $|\vec{g}| = 10$ m/s^2 e desprezando todos os atritos, responda:

a) Qual a intensidade da aceleração do sistema?

b) Qual a intensidade da força de contato entre os elos 4 e 5?

Resolução:

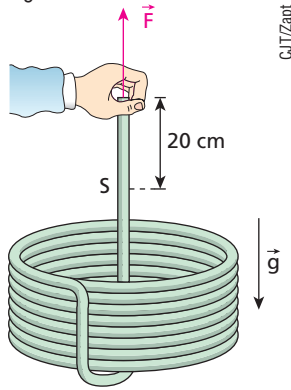
a) Supondo que a corrente e a caixa constituam um corpo único de massa total igual a (4,7 + 0,50) kg = 5,2 kg, apliquemos ao sistema a **2ª Lei de Newton**:

$$F - P_{total} = m_{total}\, a$$
$$F - m_{total}\, g = m_{total}\, a$$
$$78 - 5{,}2 \cdot 10 = 5{,}2\, a$$
$$\boxed{a = 5{,}0 \text{ m/s}^2}$$

b) Sendo m = 50 g = 0,050 kg a massa de cada elo, aplicamos a **2ª Lei de Newton** aos elos 1, 2, 3 e 4 e calculamos a intensidade da força $\vec{C}$ de contato entre os elos 4 e 5.

$$F - P - C = 4\,ma \Rightarrow F - 4\,mg - C = 4\,ma$$

$$78 - 4 \cdot 0{,}050 \cdot 10 - C = 4 \cdot 0{,}050 \cdot 5{,}0$$

Assim: $\boxed{C = 75\text{ N}}$

101. Depois de regar o jardim de sua casa, José Raimundo enrolou cuidadosamente os 10 m da mangueira flexível utilizada na operação, deixando um arremate de 60 cm emergido do centro do rolo, conforme ilustra a figura. Querendo guardar o acessório em uma prateleira elevada, o rapaz puxou o rolo para cima, exercendo, por alguns instantes, uma força vertical $\vec{F}$ de intensidade 30,0 N na extremidade do arremate.

Sabendo que a densidade linear da mangueira (massa por unidade de comprimento) é igual a 250 g/m e que $|\vec{g}| = 10{,}0\text{ m/s}^2$, calcule, durante o breve intervalo de tempo de atuação da força $\vec{F}$:

a) o módulo da aceleração adquirida pela mangueira;
b) a intensidade da força de tração em uma secção **S** do arremate situada 20 cm abaixo da mão de José Raimundo.

102. Na Máquina de Atwood da figura ao lado, o fio (inextensível) e a polia têm pesos desprezíveis, a influência do ar é insignificante e a aceleração da gravidade tem módulo **g**. As massas dos blocos **A** e **B** são, respectivamente, **M** e **m**, com M > m. Sendo **a** o módulo da aceleração dos blocos e D_1 e D_2 as indicações dos dinamômetros ideais (1) e (2), analise as proposições seguintes:

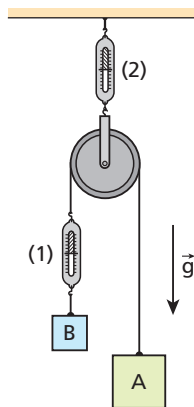
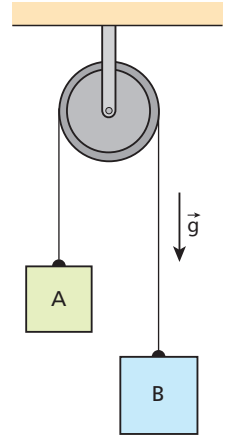
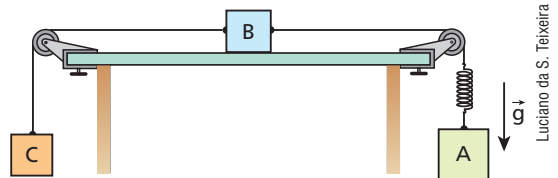
I. $a < g$

II. $D_1 = \dfrac{2M\,m}{M + m}\,g$

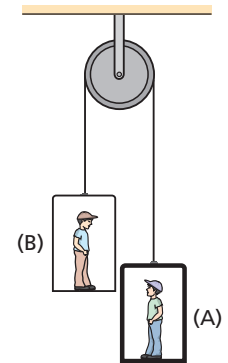
III. $D_2 = (M + m)\,g$

IV. $m\,g < D_1 < M\,g$

Responda mediante o código:

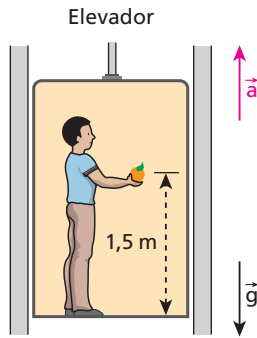
a) Todas as proposições são corretas.
b) Todas as proposições são incorretas.
c) Apenas as proposições I e III são corretas.
d) Apenas as proposições I, II e IV são corretas.
e) Apenas as proposições I, III e IV são corretas.

103. Dois blocos **A** e **B**, de massas $m_A = 2{,}0$ kg e $m_B = 3{,}0$ kg, estão acoplados por um fio inextensível de massa desprezível que passa por uma polia fixa, conforme ilustra a figura.
Esses blocos foram abandonados à ação da gravidade ($|\vec{g}| = 10\text{ m/s}^2$) e, após moverem-se por 1,0 m, quando o bloco **B** encontrava-se a 3,0 m do solo, o fio de conexão de **A** com **B** arrebentou. Desprezando-se a massa da polia, a resistência do ar, bem como todas as formas de atrito, determine, em segundos, o intervalo de tempo decorrido desde o rompimento do fio até o bloco **B** colidir com o chão.

104. Na montagem experimental abaixo, os blocos **A**, **B** e **C** têm massas $m_A = 5{,}0$ kg, $m_B = 3{,}0$ kg e $m_C = 2{,}0$ kg. Desprezam-se os atritos e a resistência do ar. Os fios e as polias são ideais e adota-se $|\vec{g}| = 10\text{ m/s}^2$.

No fio que liga **A** com **B,** está intercalada uma mola leve, de constante elástica $3{,}5 \cdot 10^3$ N/m. Com o sistema em movimento, calcule, em centímetros, a deformação da mola.

105. Na Máquina de Atwood esquematizada ao lado, a caixa **A** é mais pesada que a caixa **B**. Os dois bonecos são idênticos e cada um apresenta um peso de intensidade **P**. Com o sistema abandonado à ação da gravidade, os bonecos comprimem as bases das caixas com forças de intensidades F_A e F_B, respectivamente. Considerando a polia e o fio ideais e desprezando a influência do ar, aponte a alternativa correta:

a) $F_A = P = F_B$
b) $F_A < P < F_B$
c) $F_A < F_B < P$
d) $F_A > P > F_B$
e) $F_A > F_B > P$

106. Um homem de massa igual a 80 kg sobe na plataforma de uma balança de banheiro esquecida no interior de um elevador em operação. A balança está graduada em quilogramas e o homem fica intrigado ao verificar que a indicação do instrumento é de 100 kg. Sabendo-se que no local g = 10,0 m/s², pede-se:

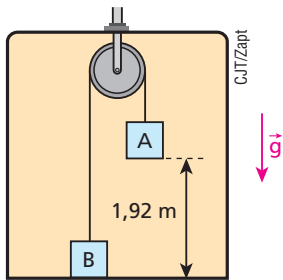
a) determinar o sentido e o módulo da aceleração do elevador;
b) indicar se o elevador está subindo ou descendo.

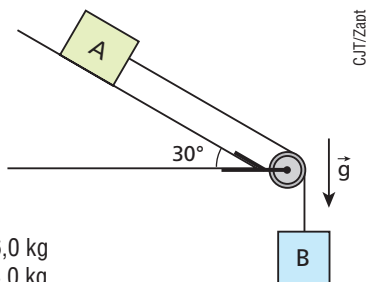
107. Considere um elevador cujo piso suporta uma força de compressão de intensidade máxima igual a $4{,}0 \cdot 10^3$ N. Esse elevador vai subir em movimento acelerado, transportando **n** caixas de massa 50 kg cada uma. Sabendo que a aceleração do elevador tem módulo igual a 2,0 m/s² e que $|\vec{g}| = 10\text{ m/s}^2$, calcule o máximo valor de **n**.

108. No esquema da figura, o garoto tem apoiada na palma de sua mão uma laranja de massa 100 g. O elevador sobe aceleradamente, com aceleração de módulo 2,0 m/s².

Em dado instante, o garoto larga a laranja, que se choca com o piso. Supondo $|\vec{g}| = 10$ m/s², calcule:

a) a intensidade da força (em newtons) aplicada pela laranja na mão do garoto enquanto em contato com ela;

b) o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que a laranja é largada até o instante do seu choque com o piso (a laranja é largada de uma altura de 1,5 m em relação ao piso do elevador). Despreze o efeito do ar.

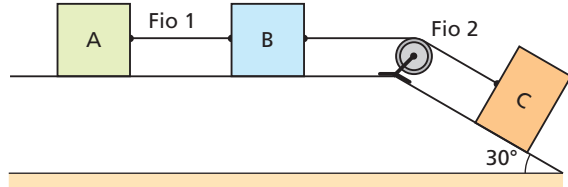
109. A figura representa os blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 3,00 kg e 1,00 kg, conectados entre si por um fio leve e inextensível que passa por uma polia ideal, fixa no teto de um elevador. Os blocos estão inicialmente em repouso, em relação ao elevador, nas posições indicadas.

Admitindo que o elevador tenha aceleração de intensidade 2,0 m/s², vertical e dirigida para cima, determine o intervalo de tempo necessário para o bloco **A** atingir o piso do elevador. Adote nos cálculos $|\vec{g}| = 10{,}0$ m/s².

110. No arranjo experimental esquematizado na figura, o fio e a polia são ideais, despreza-se o atrito entre o bloco **A** e o plano inclinado e adota-se $|\vec{g}| = 10$ m/s². Não levando em conta a influência do ar, calcule:

Massa de **A**: 6,0 kg
Massa de **B**: 4,0 kg

a) o módulo da aceleração dos blocos;

b) a intensidade da força de tração no fio;

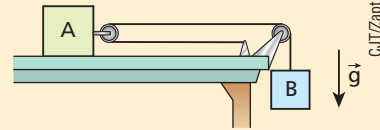
c) a intensidade da força resultante que o fio aplica na polia.

111. No esquema a seguir, fios e polia são ideais. Desprezam-se todos os atritos, bem como a influência do ar.

Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade e **2m**, **2m** e **m** as massas dos blocos **A**, **B** e **C**, nessa ordem, calcule:

a) o módulo da aceleração de cada bloco;

b) a intensidade das forças que tracionam os fios 1 e 2;

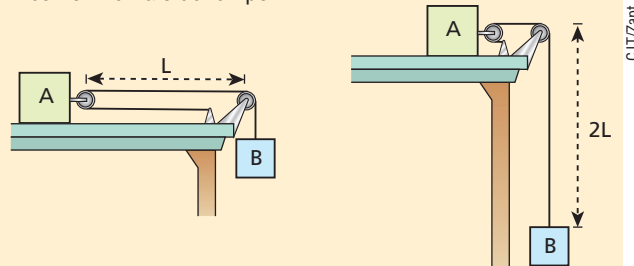
c) a intensidade da força paralela ao plano horizontal de apoio a ser aplicada no bloco **A** de modo que o sistema permaneça em repouso.

112. E.R. Na situação esquematizada na figura, o fio e as polias são ideais. Os blocos **A** e **B** têm massas respectivamente iguais a **M** e **m** e o atrito entre o bloco **A** e a mesa horizontal de apoio é desprezível.

Sendo **g** a intensidade da aceleração da gravidade, determine:

a) o módulo da aceleração do bloco **A** e do bloco **B**;

b) a intensidade da força que traciona o fio.

Resolução:

Observando os esquemas, podemos notar que o deslocamento do bloco **B** é o dobro do deslocamento do bloco **A** durante o mesmo intervalo de tempo.

Isso permite concluir que o módulo da aceleração do bloco **B** é o dobro do módulo da aceleração do bloco **A**.

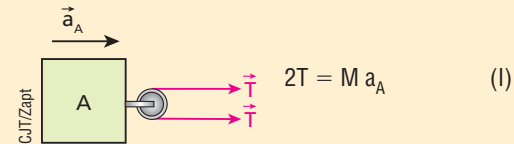
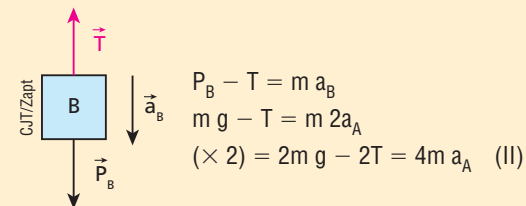
$$a_B = 2a_A$$

a) **2ª Lei de Newton para o bloco A:**

$$2T = M\,a_A \qquad \text{(I)}$$

2ª Lei de Newton para o bloco B:

$$P_B - T = m\,a_B$$
$$m\,g - T = m\,2a_A$$
$$(\times 2) = 2m\,g - 2T = 4m\,a_A \qquad \text{(II)}$$

TF1-133_183_5P_P2T1.indd 174 16/08/12 17:11

Somando-se (I) e (II), vem: $2m\,g = (M + 4m)\,a_A$

Logo: $a_A = \dfrac{2m\,g}{M + 4m}$ e $a_B = \dfrac{4m\,g}{M + 4m}$

b) De (I): $2T = M\,a_A \Rightarrow 2T = M\,\dfrac{2m\,g}{M + 4m}$

Daí: $T = \dfrac{M\,m\,g}{M + 4m}$

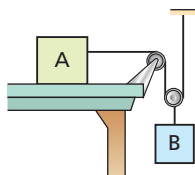
113. (AFA-SP) Os corpos **A** e **B** da figura ao lado têm massas **M** e **m** respectivamente. Os fios são ideais. A massa da polia e todos os atritos podem ser considerados desprezíveis.

O módulo da aceleração de **B** é igual a:

a) $\dfrac{m\,g}{M + m}$

b) $\dfrac{m\,g}{4M + m}$

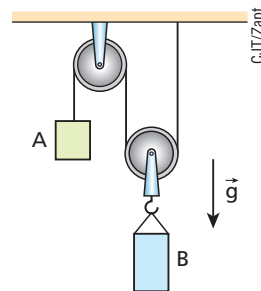
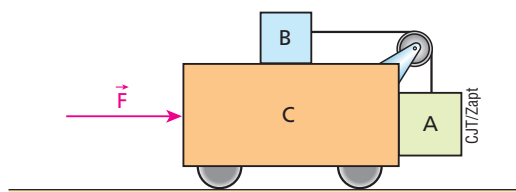
c) $\dfrac{2M\,g}{M + m}$

d) $\dfrac{2m\,g}{4M + m}$

114. No arranjo experimental da figura, a caixa **A** é acelerada para baixo com $2{,}0\ m/s^2$. As polias e o fio têm massas desprezíveis e adota-se $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$.

Supondo que a massa da caixa **B** seja de 80 kg e ignorando a influência do ar no sistema, determine:

a) o módulo da aceleração de subida da caixa **B**;

b) a intensidade da força de tração no fio;

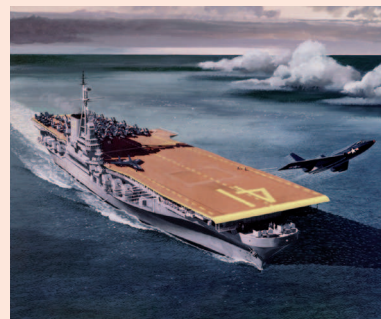
c) a massa da caixa **A**.

115. Na figura, o sistema está sujeito à ação da resultante externa $\vec{F}$, paralela ao plano horizontal sobre o qual o carrinho está apoiado. Todos os atritos são irrelevantes e as inércias do fio e da polia são desprezíveis. As massas dos corpos **A**, **B** e **C** valem, respectivamente, 2,0 kg, 1,0 kg e 5,0 kg e, no local, o módulo da aceleração da gravidade é $10\ m/s^2$.

Supondo que **A** esteja apenas encostado em **C**, determine a intensidade de $\vec{F}$ de modo que **A** e **B** não se movimentem em relação ao carrinho **C**.

Descubra mais

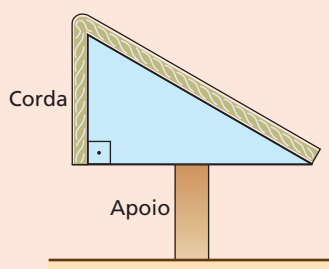
1. Suponha que, ao perceber a iminente colisão frontal entre seu barco e uma rocha, um homem desligue imediatamente o motor de popa e puxe vigorosamente uma corda amarrada na proa da embarcação em sentido oposto ao do movimento, que ocorre com alta velocidade. O homem consegue frear o barco dessa maneira? Justifique sua resposta.

2. Nos porta-aviões, os caças dispõem de cerca de 80,0 m para realizar sua decolagem. É um comprimento muito pequeno que obriga cada aeronave, com massa próxima de 13 300 kg, a ser arremessada por um dispositivo denominado catapulta. Esse sistema, constituído de trilhos e cabos de aço, imprime ao avião forças que, somadas às de impulsão provocadas pelas turbinas funcionando em alta rotação, produzem o empurrão resultante necessário ao levantamento de voo.

A arrancada do caça na curta pista do porta-aviões é tão violenta que o corpo do piloto sofre uma intensa compressão contra o encosto da poltrona, ficando sua face sensivelmente deformada durante o curto intervalo de tempo da operação. Supondo-se que o avião alce voo com velocidade próxima de 56,0 m/s (aproximadamente 202 km/h), explique por que ocorre essa compressão do corpo do piloto contra o encosto da poltrona, bem como a deformação de sua face. Estime a intensidade média da aceleração da aeronave ao decolar e também a intensidade média da força resultante responsável por essa aceleração.

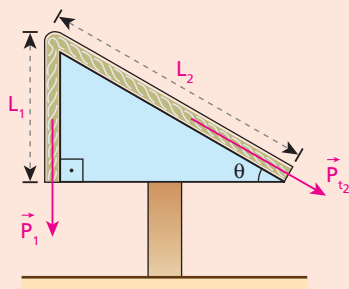
3. Quando abandonamos uma pequena pedra nas proximidades do solo, ela cai verticalmente com aceleração de intensidade próxima de $10\ m/s^2$. Durante essa queda, a pedra e a Terra atraem-se mutuamente, trocando forças gravitacionais de ação e reação, que têm intensidades iguais. O planeta experimenta alguma aceleração detectável devido a essa interação? Justifique sua resposta.

Leitura

Ocorre movimento desta corda?

Considere um prisma de seção reta em forma de triângulo retângulo, como o representado na ilustração abaixo, apoiado por sua base em um suporte vertical fixo em uma superfície horizontal. Admita que uma corda flexível, homogênea e de seção transversal de área constante esteja apoiada sobre o prisma, de modo a abranger toda a sua extensão, tanto na face vertical, como na face oblíqua.

Abandonando-se a corda em repouso, ela entrará em movimento?

Em caso afirmativo, em que sentido, horário ou anti-horário?

Para responder a essa questão, é preciso fazer o cálculo das intensidades do peso do segmento da corda pendente na vertical (P_1) e da componente tangencial do peso do segmento da corda apoiado na face oblíqua do prisma (P_{t_2}).

Levando-se em conta que a corda é homogênea e de seção transversal de área constante, a massa é diretamente proporcional ao comprimento considerado. Admitindo-se, ainda, como parâmetros o ângulo θ de inclinação do prisma, o comprimento L_1 do segmento da corda pendente na vertical, o comprimento L_2 do segmento da corda apoiado na face oblíqua do prisma, todos indicados no esquema a seguir, e a intensidade **g** da aceleração da gravidade, vem:

$$P_1 = m_1 g \quad \Rightarrow \quad P_1 = k\,L_1\,g \quad \text{(I)}$$

Onde **k** é a constante de proporcionalidade entre a massa e o correspondente comprimento de corda (densidade linear de massa).

$$P_{t_2} = m_2\,g\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad P_{t_2} = k\,L_2\,g\,\frac{L_1}{L_2}$$

Da qual:

$$P_{t_2} = k\,L_1\,g \quad \text{(II)}$$

Comparando-se as expressões (I) e (II), conclui-se que $P_{t_2} = P_1$, o que indica que **a corda permanece em equilíbrio**, sem se movimentar.

São interessantes os seguintes questionamentos: o equilíbrio da corda ocorre sem a intervenção de forças de atrito? O equilíbrio verificado depende do ângulo θ de inclinação do prisma?

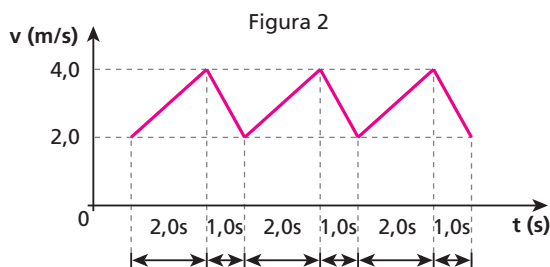
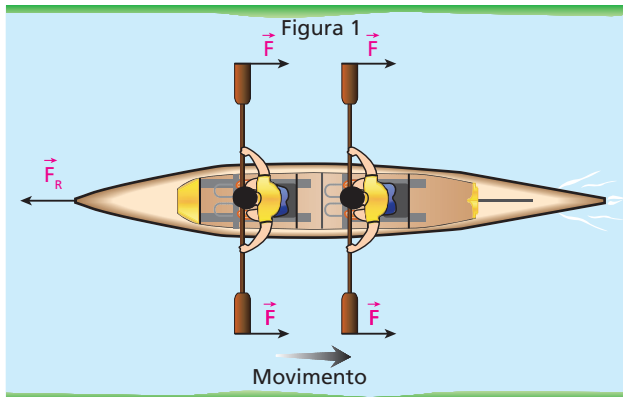
Exercícios

nível 3

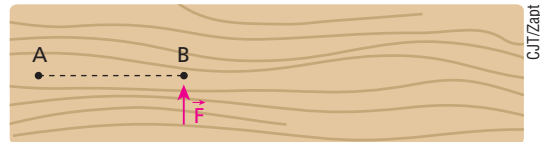
116. (UFTM-MG) Para testar a viabilidade da construção de casas antiterremotos, engenheiros construíram um protótipo constituído de um único cômodo, capaz de acomodar uma pessoa de 90 kg. Sob o fundo do piso do cômodo, inúmeros ímãs permanentes foram afixados e igual número de ímãs foi afixado ao piso sobre o qual a casa deveria flutuar.

O cômodo, muito leve, somava, com seu ocupante, uma massa de 900 kg e, devidamente ocupada, pairava sobre o solo a 3,0 cm de distância. Supondo-se que, devido à disposição dos ímãs, a intensidade da força magnética dependa inversamente do quadrado da distância entre os polos de mesmo nome, no momento em que a pessoa dentro do cômodo o deixasse, a nova distância entre a parte inferior da construção e o solo, em cm, tornar-se-ia, aproximadamente,

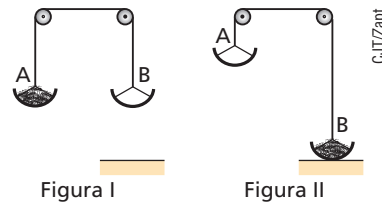
a) 3,2 b) 4,3 c) 6,1 d) 6,2 e) 9,0

117. (Vunesp) Numa regata, as massas dos dois remadores, da embarcação e dos quatro remos somam 220 kg. Quando acionam seus remos sincronizadamente, os remadores imprimem ao barco quatro forças de mesma intensidade F durante 2,0 s na direção e sentido do movimento e, em seguida, os remos são mantidos fora da água por 1,0 s, preparando a próxima remada. Durante esses 3,0 s, o barco fica o tempo todo sujeito a uma força resistiva F_R, constante, exercida pela água, conforme a figura 1. Dessa forma, a cada 3,0 s o barco descreve um movimento retilíneo acelerado seguido de um retilíneo retardado, como mostrado no gráfico da figura 2.

Considerando-se desprezível a força de resistência do ar, pode-se afirmar que a intensidade de cada força F vale, em N,

a) 55 b) 165 c) 225 d) 440 e) 600

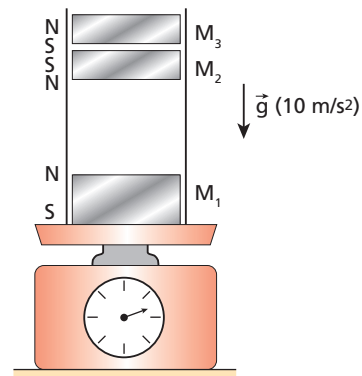
118. (Fuvest-SP) A figura a seguir representa, vista de cima, uma mesa horizontal na qual um corpo desliza sem atrito. O trecho AB é percorrido em 10 s, com velocidade constante de 3,0 m/s. Ao atingir o ponto **B**, aplica-se ao corpo uma força horizontal $\vec{F}$, de módulo e direção constantes, perpendicular a AB, que produz uma aceleração de 0,40 m/s². Decorridos outros 10 s, o corpo encontra-se em um ponto **C**, quando então a força cessa. O corpo move-se por mais 10 s até um outro ponto **D**.

a) Reproduza a figura e faça um esboço da trajetória ABCD.
b) Com que velocidade o corpo atinge o ponto **D**?

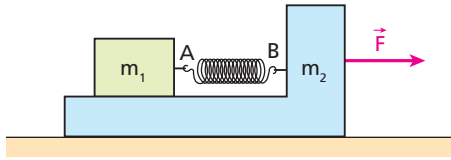
119. (Fuvest-SP) A figura I indica um sistema composto de duas roldanas leves, capazes de girar sem atrito, e um fio inextensível que possui dois suportes em suas extremidades. O suporte **A** possui certo número de formigas idênticas, com 20 miligramas cada. O sistema está em equilíbrio. Todas as formigas migram então para o suporte **B** e o sistema movimenta-se de tal forma que o suporte **B** se apoia em uma mesa, que exerce uma força de 40 milinewtons sobre ele, conforme ilustra a figura II.

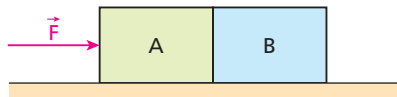
Figura I Figura II

Adotando g = 10 m/s², determine:

a) o peso de cada formiga;
b) o número total de formigas.

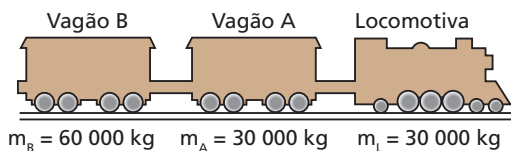
120. (Fuvest-SP) Um tubo de vidro de massa m = 30 g está sobre uma balança. Na parte inferior do vidro, está um ímã cilíndrico de massa M_1 = 90 g.

Dois outros pequenos ímãs de massas $M_2 = M_3$ = 30 g são colocados no tubo e ficam suspensos devido às forças magnéticas e aos seus pesos.

a) Qual a orientação e o módulo (em newtons) da resultante das forças magnéticas que agem sobre o ímã 2?
b) Qual a indicação da balança (em gramas)?

121. (FEI-SP) Os blocos representados na figura abaixo possuem, respectivamente, massas $m_1 = 2,0$ kg e $m_2 = 4,0$ kg; a mola AB possui massa desprezível e constante elástica $K = 50$ N/m. Não há atrito entre os dois blocos nem entre o bloco maior e o plano horizontal.

Aplicando ao conjunto a força $\vec{F}$ constante e horizontal, verifica-se que a mola experimenta uma deformação de 20 cm. Qual a aceleração do conjunto e a intensidade da força $\vec{F}$?

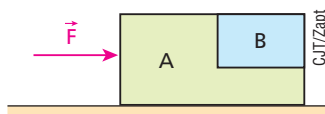
122. (Unesp-SP) Dois blocos idênticos, **A** e **B**, deslocam-se sobre uma mesa plana sob ação de uma força horizontal constante de intensidade $F = 10,0$ N aplicada em **A**, conforme ilustrado na figura.

Sabendo-se que o movimento é uniformemente acelerado e que existe atrito entre os blocos **A** e **B** e a mesa, a força que **A** exerce sobre **B** tem intensidade igual a:

a) 20,0 N. b) 15,0 N. c) 10,0 N. d) 5,0 N. e) 2,5 N.

123. Na figura seguinte, a locomotiva interage com os trilhos, recebendo deles uma força horizontal, dirigida para a direita e de intensidade 60 000 N. Essa força acelera os vagões **A** e **B** e a própria locomotiva, que parte do repouso no instante $t_0 = 0$.

No local do movimento, a estrada de ferro é plana, reta e horizontal. No instante $t = 20$ s, o vagão **B** desacopla-se da composição, o mesmo ocorrendo com o vagão **A** no instante $t = 40$ s.

a) Determine o módulo da aceleração do trem no instante $t = 10$ s, bem como as intensidades das forças de tração nos dois engates.

b) Faça o traçado, num mesmo par de eixos, dos gráficos da velocidade escalar em função do tempo para os movimentos da locomotiva, do vagão **A** e do vagão **B**, desde $t_0 = 0$ até $t = 50$ s.

124. A figura esquematiza dois blocos **A** e **B** de massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 3,0 kg em movimento sobre o solo plano e horizontal. O bloco **B** está simplesmente apoiado em uma reentrância existente no bloco **A**, não havendo atrito entre **B** e **A**.

Admitindo que a intensidade da força horizontal $\vec{F}$ que acelera o conjunto é 120 N e que $|\vec{g}| = 10$ m/s²:

a) faça um esquema representando as forças que agem no bloco **A**;

b) calcule a intensidade da força de contato que **A** exerce em **B**.

125. Turbulência nas alturas

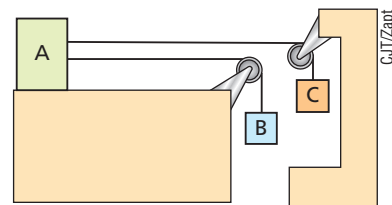
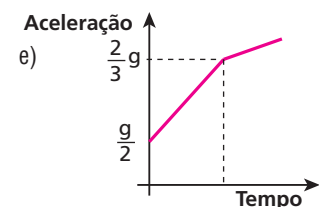
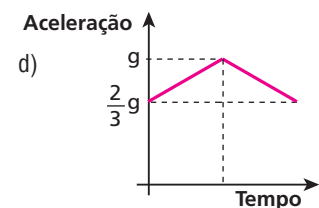
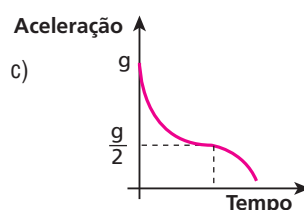
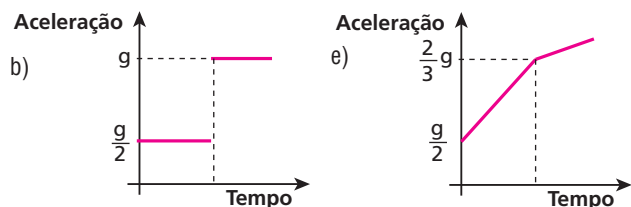
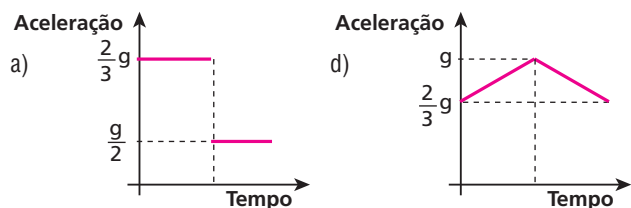
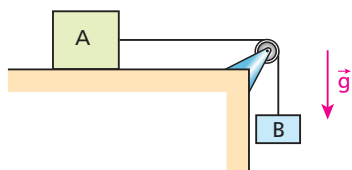
Muitos passageiros de avião negligenciam as orientações da tripulação em relação a manter afivelado o cinto de segurança em determinados momentos do voo. Recentemente, um avião em rota de aproximação do aeroporto de Guarulhos, em São Paulo, procedente dos Estados Unidos, ficou sujeito a uma intensa rajada de vento vertical, o que impôs à aeronave um deslocamento vertical para baixo de 200 m em 4,0 s. Em decorrência disso, alguns tripulantes que encerravam o serviço de bordo foram parar no teto da cabina, junto com pratos, garrafas, talheres e também alguns passageiros incautos, que não usavam o cinto de segurança.

Admita que nesses aterrorizantes 4,0 s o avião tenha mantido aceleração vertical constante e iniciado seu movimento nessa direção a partir do repouso. Sendo **F** a intensidade da força vertical de contato entre um corpo qualquer projetado contra o teto da cabina e **P** a intensidade do peso desse corpo, pode-se afirmar que:

(Adote para a intensidade da aceleração da gravidade o valor 10,0 m/s².)

a) $F = \frac{P}{2}$ c) $F = \frac{3}{2}P$ e) $F = \frac{5}{2}P$

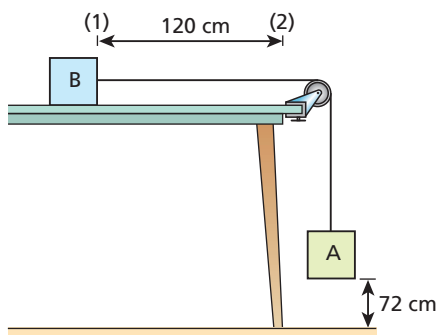
b) $F = P$ d) $F = 2P$

126. (Vunesp-FMTM-MG) Analise:

No sistema indicado, os blocos **A**, **B** e **C** têm massas iguais, as roldanas não estão sujeitas a forças dissipativas e os cabos conectados entre os blocos são inextensíveis e têm massa desprezível. Nos gráficos que se seguem, a linha pontilhada indica o instante em que o bloco **C** se apoia na superfície horizontal. Sendo **g** a intensidade da aceleração da gravidade, o módulo da aceleração do bloco **A** fica esboçado pelo gráfico:

127. Na situação representada a seguir, os blocos **A** e **B** têm massas **M** e **m** respectivamente. O fio e a polia são ideais e não há atrito entre **A** e o plano horizontal de apoio. A aceleração da gravidade vale **g** e não há influência do ar.

Sendo **a** o módulo da aceleração dos blocos e **T** a intensidade da força de tração no fio, analise as proposições seguintes:

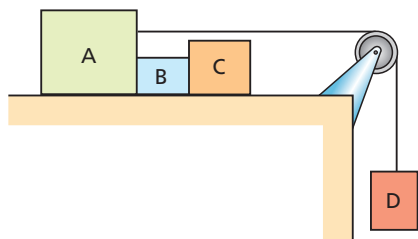
I. Por maior que seja **M** em comparação com **m**, tem-se sempre $a \neq 0$.
II. $a < g$
III. $T < m\,g$
IV. $T < M\,g$

Responda mediante o código:

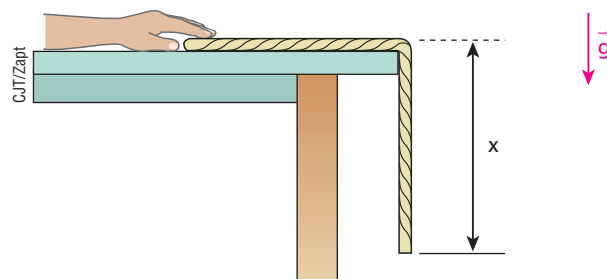
a) Todas as proposições são corretas.
b) Todas as proposições são incorretas.
c) Apenas as proposições I e IV são corretas.
d) Apenas as proposições II e III são corretas.
e) Apenas as proposições I, II e III são corretas.

128. Na montagem experimental esquematizada a seguir, a mesa horizontal é perfeitamente lisa, o fio e a polia são ideais e os blocos **A** e **B** têm massas respectivamente iguais a 1,0 kg e 1,5 kg:

Com o bloco **B** na posição (1), o sistema é destravado no instante $t_0 = 0$, ficando sob a ação da gravidade. Desprezando a influência do ar, adotando $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$ e admitindo que a colisão de **A** com o solo seja instantânea e perfeitamente inelástica, determine:

a) a intensidade da aceleração dos blocos no instante $t_1 = 0{,}50$ s;
b) o instante t_2 em que o bloco **B** atinge a posição (2).

129. No arranjo experimental do esquema seguinte, desprezam-se os atritos e a influência do ar. O fio e a polia são ideais e adota-se para a aceleração da gravidade o valor 10 m/s^2.

Largando-se o bloco **D**, o movimento do sistema inicia-se e, nessas condições, a força de contato trocada entre os blocos **B** e **C** tem intensidade 20 N. Sabendo que as massas de **A**, **B** e **C** valem, respectivamente, 6,0 kg, 1,0 kg e 5,0 kg, calcule:

a) a massa de **D**;
b) a intensidade da força de tração estabelecida no fio;
c) a intensidade da força de contato trocada entre os blocos **A** e **B**.

130. Uma corda flexível e homogênea tem secção transversal constante e comprimento total **L**. A corda encontra-se inicialmente em repouso, com um trecho de seu comprimento apoiado em uma mesa horizontal e perfeitamente lisa, conforme indica a figura a seguir.

Em determinado instante, a corda é abandonada, adquirindo movimento acelerado. Não considerando a influência do ar e assumindo para o módulo da aceleração da gravidade o valor **g**, responda: como poderia ser apresentada a variação do módulo da aceleração da corda em função do comprimento pendente **x**?

a) $a = \dfrac{g}{L}\,x$

b) $a = \dfrac{g}{L^2}\,x^2$

c) $a = \dfrac{g\,L}{x}$

d) $a = \dfrac{g}{L^3}\,x^3$

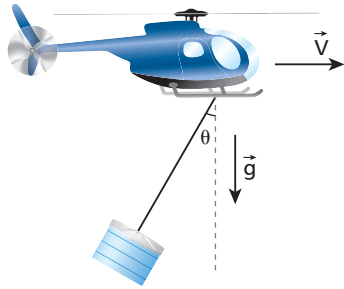
e) Não há elementos para uma conclusão, pois a massa da corda não foi dada.

131. Num elevador, há uma balança graduada em newtons. Um homem de 60 kg de massa, em pé sobre a balança, lê 720 N quando o elevador sobe em movimento acelerado e 456 N quando o elevador desce em movimento acelerado, com a mesma aceleração da subida em módulo. Determine:

a) quais os módulos da aceleração da gravidade e do elevador;
b) quanto registrará a balança se o elevador subir ou descer com velocidade constante.

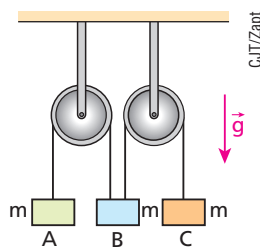
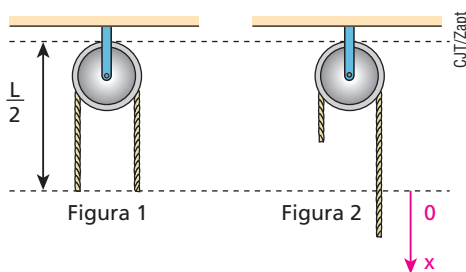
132. Incêndios florestais constituem um grave problema ambiental que tem fustigado diversos países no mundo, especialmente o Brasil. Conforme dados do Ministério do Meio Ambiente, 2007 foi um ano atípico, que registrou um número recorde de focos de mata ardente, algo em torno de 38 mil ocorrências, bem acima da média histórica nacional.

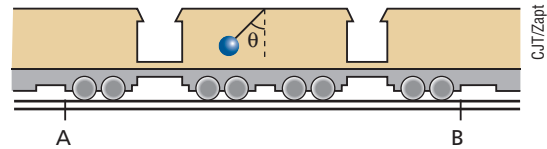
No esquema a seguir, um helicóptero desloca-se horizontalmente com velocidade constante transportando um contêiner cheio d'água que vai ser despejada sobre as chamas de um incêndio em uma reserva florestal. O cabo que sustenta o contêiner, cuja massa total, incluída a da água, é de 400 kg, está inclinado de um ângulo $\theta = 37°$ em relação à vertical.

Essa inclinação se deve à força de resistência do ar, que tem intensidade dada em função da velocidade do sistema por $F_{Ar} = 1{,}2\ V^2$, com F_{Ar} em newtons e V, em m/s.

Supondo-se que no local a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\ m/s^2$ e adotando-se sen θ = 0,60 e cos θ = 0,80, pede-se determinar:

a) a intensidade da força de tração no cabo de sustentação do contêiner, admitido de massa desprezível;
b) a velocidade, em km/h, com que se desloca o helicóptero.

133. (Fuvest-SP) Um sistema mecânico é formado por duas polias ideais que suportam três corpos **A**, **B** e **C** de massas iguais a **m**, suspensos por fios ideais, como representado na figura. O corpo **B** está suspendido simultaneamente por dois fios, um ligado a **A** e outro a **C**. Podemos afirmar que a aceleração do corpo **B** será:

a) zero.
b) $\left(\frac{g}{3}\right)$ para baixo.
c) $\left(\frac{g}{3}\right)$ para cima.
d) $\left(\frac{2g}{3}\right)$ para baixo.
e) $\left(\frac{2g}{3}\right)$ para cima.

134. Na figura 1, a corda flexível e homogênea de comprimento **L** repousa apoiada na polia ideal de dimensões desprezíveis. Um pequeno puxão é dado ao ramo direito da corda e esta põe-se em movimento. Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, aponte a opção que mostra como varia o módulo da aceleração **a** da extremidade direita da corda em função da coordenada **x** indicada na figura 2:

a) $a = \frac{g}{L}x$
b) $a = \frac{2g}{L}x$
c) $a = \frac{2g}{3L}x$
d) $a = g$
e) A aceleração depende da massa da corda.

135. No teto de um vagão ferroviário, prende-se uma esfera de aço por meio de um fio leve e inextensível. Verifica-se que em um trecho retilíneo e horizontal da ferrovia o fio mantém-se na posição indicada, formando com a vertical um ângulo θ = 45°. No local, adota-se $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$.

Sendo $\vec{v}$ a velocidade vetorial do trem e $\vec{a}$ sua aceleração, responda:

a) Qual a orientação de $\vec{a}$, de **A** para **B** ou de **B** para **A**?
b) Qual a intensidade de $\vec{a}$?
c) Qual a orientação de $\vec{v}$, de **A** para **B** ou de **B** para **A**?

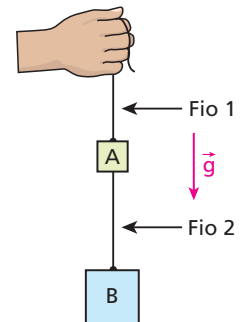
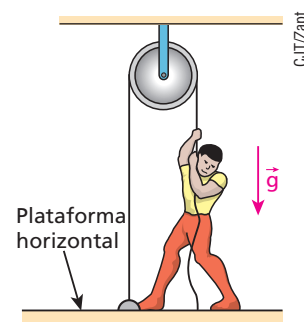
136. Na situação esquematizada, os blocos **A** e **B** têm massas respectivamente iguais a **m** e **M** e os fios são ideais. Inicialmente, com o sistema em repouso suspenso na vertical, as trações nos fios 1 e 2 valem T_1 e T_2. Acelerando-se o conjunto verticalmente para cima com intensidade **a**, as trações nos fios passam a valer T'_1 e T'_2. Sendo **g** a intensidade da aceleração da gravidade e não levando em conta a influência do ar, analise as proposições a seguir:

I. $T_1 = (M + m)\ g$ e $T_2 = M\ g$

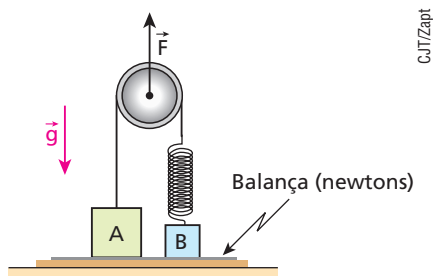
II. $T'_1 = T_1$ e $T'_2 = T_2$

III. $\frac{T'_1}{T_1} = \frac{T'_2}{T_2} = \frac{a + g}{g}$

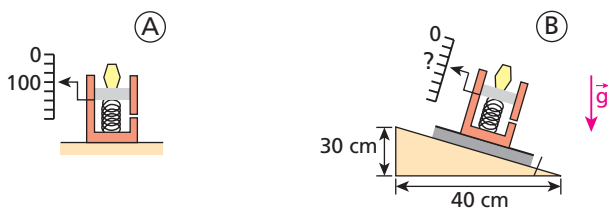
Responda mediante o código:

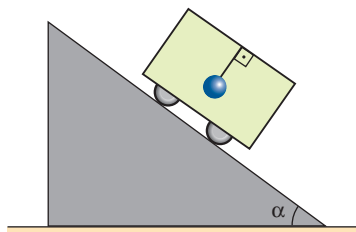
a) Se todas forem corretas.
b) Se todas forem incorretas.
c) Se I e II forem corretas.
d) Se II e III forem corretas.
e) Se I e III forem corretas.

137. No esquema abaixo, o homem (massa de 80 kg) é acelerado verticalmente para cima juntamente com a plataforma horizontal (massa de 20 kg) sobre a qual está apoiado.

Isso é possível porque ele puxa verticalmente para baixo a corda que passa pela polia fixa. A aceleração do conjunto homem-plataforma tem módulo $5{,}0\ m/s^2$ e adota-se $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$. Considerando ideais a corda e a polia e desprezando a influência do ar, calcule:

a) a intensidade da força com que o homem puxa a corda;
b) a intensidade da força de contato trocada entre o homem e a plataforma.

138. Na figura seguinte, os pesos da polia, do fio e da mola são desprezíveis. No local, o efeito do ar é desprezível e assume-se $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Sendo $m_A = 40$ kg e $m_B = 24$ kg, a deformação da mola de 50 cm e a intensidade de $\vec{F}$ igual a 720 N, determine:

a) a constante elástica da mola, em N/m;
b) o módulo das acelerações de **A**, de **B** e do eixo da polia;
c) a indicação da balança sobre a qual repousam, inicialmente, os dois blocos.

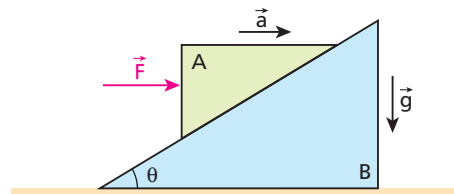
139. (Fuvest-SP) O mostrador de uma balança, quando um objeto é colocado sobre ela, indica 100 N, como esquematizado em **A**. Se tal balança estiver desnivelada, como se observa em **B**, seu mostrador deverá indicar, para esse mesmo objeto, o valor de:

a) 125 N.
b) 120 N.
c) 100 N.
d) 80 N.
e) 75 N.

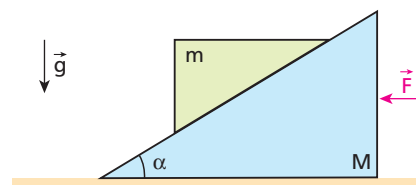
140. (Cesgranrio-RJ) Na figura, o carrinho move-se ao longo de um plano inclinado, sujeito apenas às interações gravitacional e com a superfície do plano inclinado. Preso ao teto do carrinho, existe um pêndulo simples cujo fio permanece perpendicular à direção do movimento do sistema.

São feitas as seguintes afirmações:

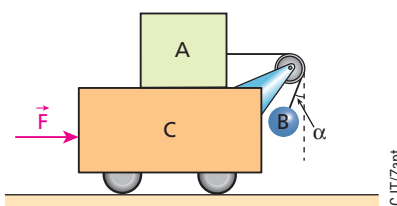
I. O carrinho está descendo o plano inclinado.
II. O movimento do carrinho é uniforme.
III. Não há atrito entre a superfície do plano inclinado e o carrinho.

Dessas afirmações, é (são) necessariamente verdadeira(s) apenas:

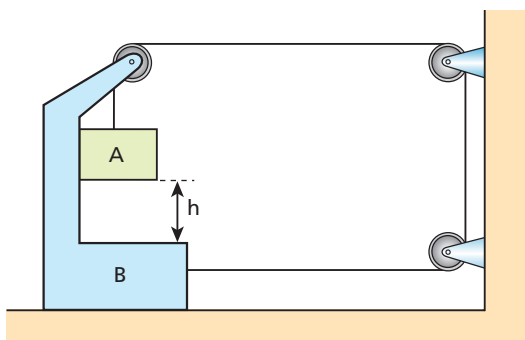
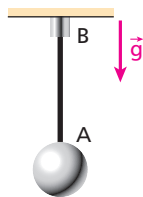
a) I e II;
b) I e III;
c) I;
d) II;
e) III.

141. (Fuvest-SP) Duas cunhas **A** e **B**, de massas M_A e M_B respectivamente, se deslocam juntas sobre um plano horizontal sem atrito, com aceleração constante de módulo **a**, sob a ação de uma força horizontal $\vec{F}$ aplicada à cunha **A**, como mostra a figura a seguir. A cunha **A** permanece parada em relação à cunha **B**, apesar de não haver atrito entre elas, e, no local, o módulo de aceleração da gravidade é igual a **g**.

a) Determine a intensidade da força $\vec{F}$ aplicada à cunha **A**.
b) Determine a intensidade da força $\vec{N}$ que a cunha **B** aplica à cunha **A**.
c) Sendo **θ** o ângulo de inclinação da cunha **B**, determine a tangente de **θ**.

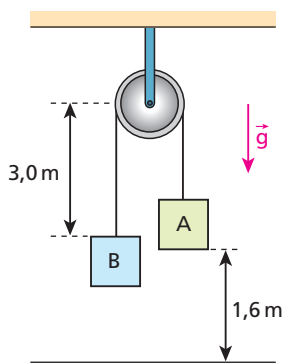
142. (ITA-SP) O plano inclinado da figura tem massa **M** e sobre ele apoia-se um objeto de massa **m**. O ângulo de inclinação é **α** e não há atrito nem entre o plano inclinado e o objeto, nem entre o plano inclinado e o apoio horizontal. Aplica-se uma força $\vec{F}$ horizontal no plano inclinado e constata-se que todo o sistema se move horizontalmente, sem que o objeto deslize em relação ao plano inclinado. Podemos afirmar que, sendo $\vec{g}$ a aceleração da gravidade local:

a) $F = m\, g$.
b) $F = (M + m)\, g$.
c) F tem de ser infinitamente grande.
d) $F = (M + m)\, g \text{ tg } \alpha$.
e) $F = M\, g \text{ sen } \alpha$.

143. No esquema da figura, tem-se o sistema locomovendo-se horizontalmente, sob a ação da resultante externa $\vec{F}$. A polia tem peso desprezível, o fio que passa por ela é ideal e a influência do ar no local do movimento é irrelevante. Não há contato da esfera **B** com a parede vertical.

Sendo $m_A = 10{,}0$ kg, $m_B = 6{,}00$ kg, $m_C = 144$ kg e $g = 10{,}0 \text{ m/s}^2$, determine a intensidade de $\vec{F}$ que faz com que **não** haja movimento dos dois corpos **A** e **B** em relação ao **C**.

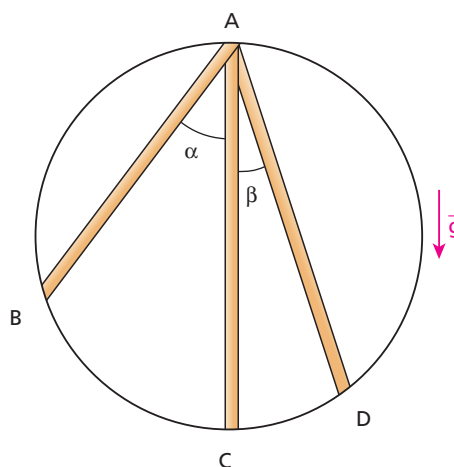
Para raciocinar um pouco mais

144. No sistema representado na figura, não há atritos e o fio é inextensível e tem peso desprezível. No local, a intensidade da aceleração da gravidade vale **g**. Ignorando a influência do ar, calcule o intervalo de tempo que o corpo **A** (de massa **m**) leva para atingir a base do corpo **B** (de massa **M**) quando é abandonado de uma altura **h** em relação a **B**.

145. Na situação representada na figura, uma esfera metálica de raio **R** e densidade volumétrica (massa por unidade de volume) μ está em repouso sustentada por um cabo de aço de comprimento **L** e densidade linear (massa por unidade de comprimento) ρ.

Sabendo-se que no local a aceleração da gravidade tem intensidade **g**, pede-se:

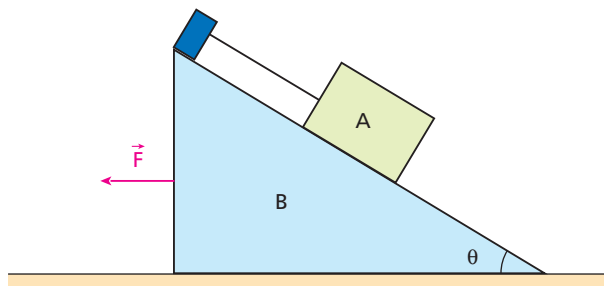
a) determinar a intensidade do peso da esfera;
b) determinar a intensidade da força de tração no ponto médio do cabo de aço;
c) esboçar o gráfico da intensidade da força de tração ao longo do cabo de aço em função da posição medida de **A** para **B**.

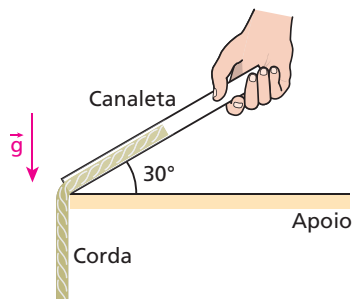
146. No sistema esquematizado a seguir, o fio e a polia são ideais, a influência do ar é desprezível e $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Os blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 6,0 kg e 2,0 kg, encontram-se inicialmente em repouso, nas posições indicadas.

Abandonando-se o sistema à ação da gravidade, pede-se calcule:

a) o módulo da velocidade do bloco **A** imediatamente antes da colisão com o solo, admitida instantânea e perfeitamente inelástica;
b) a distância percorrida pelo bloco **B** em movimento ascendente.

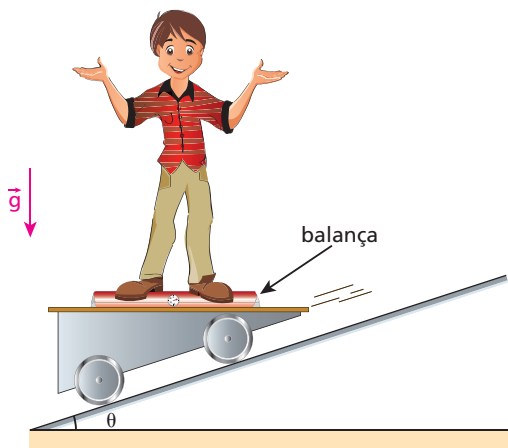
147. Na figura, AB, AC e AD são três tubos de pequeno diâmetro, muito bem polidos internamente e acoplados a um arco circular. O tubo AC é vertical e passa pelo centro do arco.
Uma mesma esfera é abandonada do repouso sucessivamente do topo dos três tubos, atingindo o arco circular decorridos intervalos de tempo respectivamente iguais a t_{AB}, t_{AC} e t_{AD}. A aceleração da gravidade tem módulo **g** e $\alpha > \beta$.

Não considerando a influência do ar:

a) calcule o módulo da aceleração da bolinha no tubo AB, em função de **g** e de α;
b) relacione t_{AB}, t_{AC} e t_{AD}.

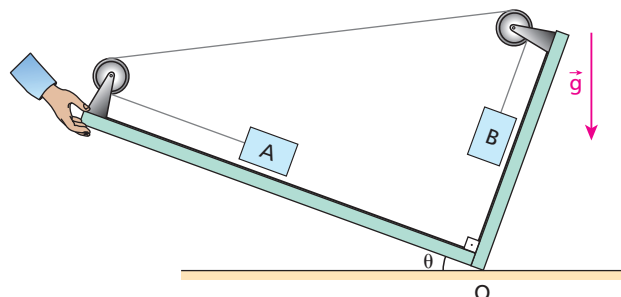
148. Na situação esquematizada na figura, o bloco **A** de massa **m** está apoiado sobre o prisma **B** de massa **M**. O bloco **A** deverá ser mantido em repouso em relação ao prisma **B**. Para tanto, utiliza-se um fio ideal paralelo à face do prisma inclinada de um ângulo θ em relação à superfície de apoio do sistema, considerada plana e horizontal. Todos os atritos são desprezíveis e a aceleração da gravidade local tem módulo **g**.

Aplica-se em **B** uma força constante horizontal $\vec{F}$ e o sistema é acelerado para a esquerda. Admitindo que **A** não perde o contato com **B**, determine a máxima intensidade admissível para $\vec{F}$.

149. Uma corda flexível, homogênea, de secção transversal constante e de comprimento igual a **L** será posta a deslizar no interior de uma canaleta perfeitamente lisa, inclinada de um ângulo $\theta = 30°$ em relação à horizontal, conforme representa a figura. Na situação, a influência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10$ m/s^2.

No instante em que o comprimento pendente na vertical for igual a $\frac{L}{2}$, a intensidade da aceleração da corda:

a) valerá 2,5 m/s^2;
b) valerá 5,0 m/s^2;
c) valerá 7,5 m/s^2;
d) valerá 10 m/s^2;
e) estará indeterminada, pois não foi dado o valor numérico de **L**.

150. Um garoto realizou o seguinte experimento: conseguiu uma balança dessas utilizadas em banheiros, colocou-a sobre a plataforma horizontal de um carrinho dotado de pequenas rodas, de modo que este foi posto a deslizar para baixo ao longo de uma rampa inclinada de um ângulo **θ**, como representa a figura. O garoto, cuja massa é de 56 kg, ficou surpreso ao observar que, durante seu movimento em conjunto com o carrinho, a balança indicou apenas 42 kg.

Desprezando-se os atritos resistentes ao movimento do carrinho e adotando-se $|\vec{g}| = 10{,}0$ m/s^2, responda:

a) Qual o sentido da força de atrito atuante nos pés do garoto durante o movimento? Para a esquerda ou para a direita? Justifique.
b) Qual o valor do ângulo **θ**?

151. Considere a situação esquematizada a seguir em que uma estrutura em forma de **L** está articulada em **O**, podendo girar em torno desse ponto em um plano vertical. Dessa forma, o ângulo **θ**, formado entre a parte esquerda da estrutura e uma mesa horizontal, pode ser variado entre 0° e 90°. São utilizadas duas polias ideais, fixas nas extremidades do **L**, e um fio leve, flexível e inextensível para conectar dois pequenos blocos **A** e **B** de massas iguais, de valor $m = 2{,}0$ kg, cada uma. Os atritos são desprezíveis, bem como a influência do ar, e, no local, adota-se $|\vec{g}| = 10{,}0$ m/s^2.

a) Obtenha, em função de **g** e **θ**, uma expressão matemática para o valor algébrico da aceleração dos blocos e determine os valores de **θ** para que essa aceleração tenha intensidade máxima.
b) Calcule, em cada caso, a intensidade da força de tração no fio.
c) Para que valor de **θ** os blocos permanecem em equilíbrio?

152. (Olimpíada Brasileira de Física) Em um quadro de madeira fixo na parede, é preso um pêndulo constituído de uma barra metálica de massa desprezível de 40 cm e um pequeno disco que pode oscilar livremente. O pêndulo é colocado a oscilar e, no momento em que ele passa pela parte mais baixa de sua trajetória, com velocidade de módulo igual a 2,0 m/s, deixa-se o quadro cair em queda livre (sem girar, inclinar, vibrar ou encostar na parede). Depois de quanto tempo o disco voltará a passar pela mesma posição mais baixa de sua trajetória?

Despreze o atrito e a resistência do ar. Adote $\pi = 3$.

Admita que o disco pode completar a circunferência sem colidir com o quadro, que continua em queda livre.

Tópico 2

Atrito entre sólidos

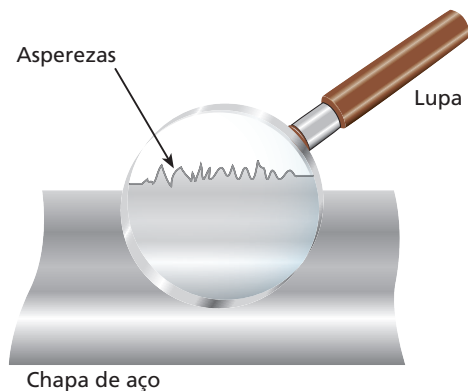
Bloco 1

1. Introdução

O atrito é um fenômeno de grande importância no acontecimento de determinados fatos em nossa vida diária. Se, por um lado, apresenta um caráter útil, por outro, revela um caráter indesejável.

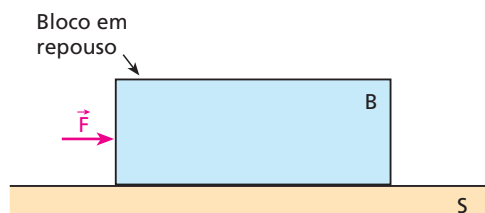
Se não fosse o atrito, seria impossível caminhar sobre o solo, bem como seria impraticável o movimento de um carro convencional sobre o asfalto. Um lápis não escreveria sobre uma folha de papel, tampouco conseguiríamos empunhá-lo; uma lixa não desgastaria um pedaço de madeira e não poderíamos desfrutar do som emitido por um violino, já que esse som é obtido pelo esfregar das fibras ou dos fios do arco sobre as cordas do instrumento.

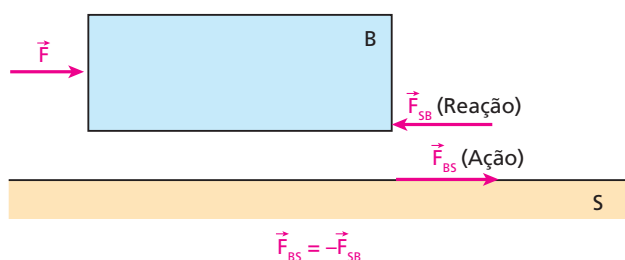
O atrito também se manifesta em várias situações como agente dissipador de formas nobres de energia, como é o caso da energia cinética (de movimento). Se, por exemplo, você lançar o apagador do quadro de giz sobre o chão da sala de aula, notará que, pela ação do atrito, ele será freado, perdendo a energia cinética recebida no ato do lançamento.

Uma superfície qualquer, por mais bem polida que seja, sempre apresenta irregularidades: saliências e reentrâncias, altos e baixos, enfim, asperezas.

Consideremos dois corpos em contato, comprimindo-se mutuamente. Quando a superfície de um deles escorrega ou tende a escorregar em relação à superfície do outro, há troca de forças, denominadas **forças de atrito**. Essas forças, que sempre surgem no sentido de se opor ao escorregamento ou à tendência de escorregamento, são devidas a interações de origem eletromagnética entre os átomos das regiões de contato efetivo das duas superfícies. O modelo mecânico de irregularidades (rugosidades), entretanto, satisfaz nossas necessidades neste estudo e, por isso, nos restringiremos a ele.

Consideremos, por exemplo, a situação abaixo, em que o bloco **B** repousa sobre a superfície **S**, plana e horizontal.

Admitamos que **B** seja empurrado horizontalmente para a direita por uma força $\vec{F}$, mas sem sair do lugar.

Ao ser empurrado, **B** aplica em **S** uma força $\vec{F}_{BS}$ horizontal dirigida para a direita.

Como se explica, então, o repouso de **B**? Ocorre que esse bloco recebe de **S**, na região de contato, uma força $\vec{F}_{SB}$ horizontal dirigida para a esquerda, que equilibra a força $\vec{F}$.

$\vec{F}_{BS} = -\vec{F}_{SB}$

As forças $\vec{F}_{BS}$ e $\vec{F}_{SB}$ que **B** e **S** trocam na região de contato são forças de atrito e constituem um par **ação-reação** (3ª Lei de Newton).

Observemos que $\vec{F}_{BS}$ e $\vec{F}_{SB}$ têm mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos, estando aplicadas em corpos diferentes.

Destaquemos, ainda, que as forças de atrito $\vec{F}_{BS}$ e $\vec{F}_{SB}$ só aparecem se $\vec{F} \neq \vec{0}$. De fato, se não houver solicitação de escorregamento, não haverá troca de forças de atrito entre as superfícies em contato. Então, para o bloco **B** em repouso sobre a superfície **S**, temos:

$$\text{Se } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{BS} = \vec{F}_{SB} = \vec{0}$$

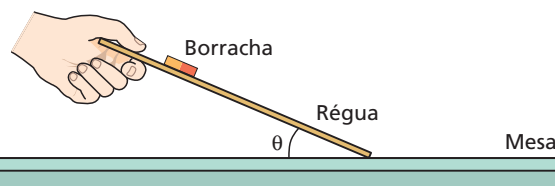
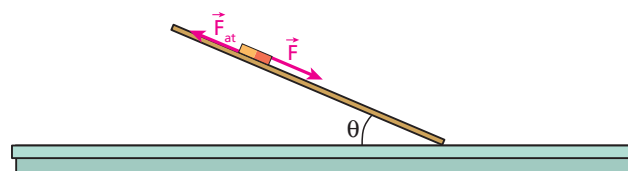
No caso de **B** já estar escorregando sobre a superfície **S**, as forças de atrito também estarão presentes, independentemente de $\vec{F}$ estar atuando ou não.

Estudaremos neste Tópico o atrito de escorregamento entre sólidos, atribuindo-lhe duas denominações: **atrito estático**, enquanto não houver escorregamento entre as superfícies atritantes, e **atrito cinético**, para o caso de o escorregamento já haver se iniciado.

2. O atrito estático

Conceito

Considere uma mesa horizontal sobre a qual repousa uma régua de madeira. Imagine uma borracha escolar apoiada sobre a face mais larga da régua. Inicialmente, a borracha não recebe forças de atrito, uma vez que não manifesta nenhuma tendência de escorregamento.

Suponha agora que a régua seja inclinada lentamente em relação à superfície da mesa, conforme sugere a figura a seguir:

De início, para pequenos valores do ângulo **θ**, a borracha permanece parada e a força de atrito que a mantém em equilíbrio é do tipo estático. Tal força tem intensidade crescente a partir de zero, constituindo-se na equilibrante da força que solicita a borracha a descer (componente tangencial do peso da borracha).

Enquanto a borracha está em equilíbrio, $\vec{F}$ e $\vec{F}_{at}$ têm intensidades crescentes com o ângulo θ, valendo a relação $\vec{F}_{at} = -\vec{F}$.

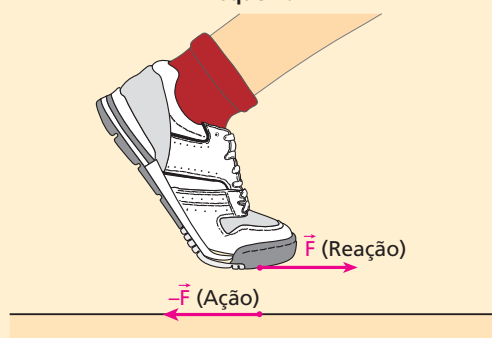
Continuando a inclinar a régua de modo que aumente o ângulo **θ**, chega-se a um ponto em que a borracha se apresenta na iminência de movimento, isto é, está prestes a descer. Nesse caso, a força de atrito estático que ainda mantém a borracha em equilíbrio terá atingido sua máxima intensidade. Essa máxima força de atrito estático, que se manifesta quando o escorregamento é iminente, denomina-se **força de atrito de destaque** $\left(\vec{F}_{at_d}\right)$.

Resumindo, vimos que a força de atrito estático tem intensidade variável desde zero, quando não há solicitação de escorregamento, até um valor máximo ou de destaque, quando o corpo fica na iminência de escorregar.

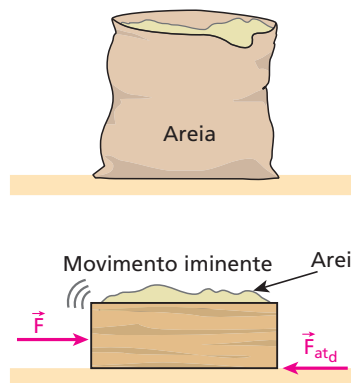
Assim, podemos dizer que:

$$0 \leqslant F_{at} \leqslant F_{at_d}$$

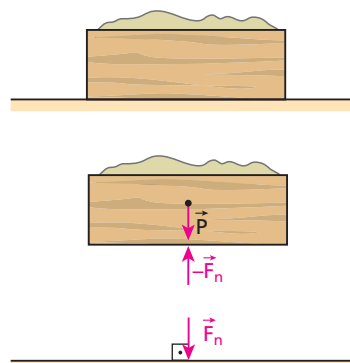
A intensidade da força de atrito estático depende da intensidade da força que visa provocar o escorregamento, sendo sempre igual à desta última.

O atrito permite-nos caminhar!

Ao caminhar, o pé de uma pessoa empurra o chão para trás e este reage no pé da pessoa, empurrando-o para a frente. Pé e solo trocam entre si forças de atrito do tipo ação e reação (mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos). Você deve observar que uma força está aplicada no chão e a outra, no pé da pessoa.

Cálculo da intensidade da força de atrito de destaque (F_{at_d})

Vamos considerar agora uma caixa de papelão, como uma caixa de sapatos, destampada e apoiada sobre a superfície plana e horizontal de um piso de concreto. Empurrando-se a caixa inicialmente vazia com uma força horizontal, ela será colocada "facilmente" em movimento. Se colocarmos, porém, certa quantidade de areia dentro dela, a força horizontal necessária para iniciar o movimento será, certamente, mais intensa que aquela aplicada no caso anterior. Se aumentarmos gradativamente a quantidade de areia na caixa, notaremos que, quanto mais areia introduzirmos, maior será a intensidade da força horizontal a ser aplicada para que o movimento seja iniciado. Isso mostra que, à medida que se preenche a caixa com areia, maior se torna a força de atrito de destaque entre ela e o plano de apoio.

Aumentando-se a quantidade de areia na caixa, aumenta-se a intensidade da força de atrito de destaque e, consequentemente, mais intensa deve ser a força exercida pelo operador para iniciar o movimento.

Você seria capaz de responder qual é a relação entre a quantidade de areia na caixa e o atrito de destaque?

Ocorre que a introdução de areia contribui para o aumento do peso do sistema e, por isso, este exerce sobre o plano de apoio uma força normal de compressão cada vez mais intensa.

Quanto mais areia é depositada na caixa, maior é o peso do sistema e mais intensa é a força normal de compressão ($\vec{F}_n$) exercida sobre o piso.

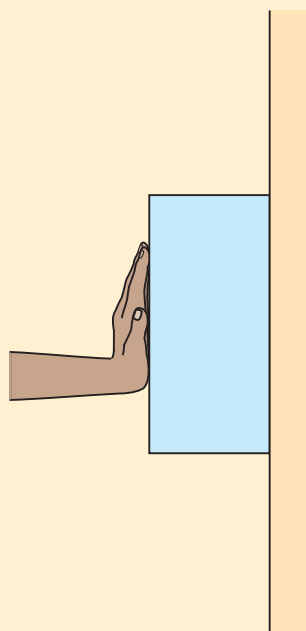
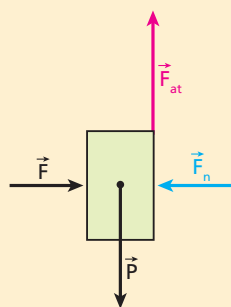
Verifica-se que a intensidade da força de atrito de destaque (F_{at_d}) é diretamente proporcional à intensidade da força normal (F_n) trocada pelas superfícies atritantes na região de contato.

Matematicamente:

$$F_{at_d} = \mu_e \, F_n$$

A constante de proporcionalidade μ_e denomina-se **coeficiente de atrito estático** e seu valor depende dos materiais atritantes e do grau de polimento deles.

Sem deixar cair!

É muito comum comprimirmos horizontalmente objetos contra paredes verticais no intuito de mantê-los em repouso. Isso é possível desde que a força de compressão seja suficientemente intensa para que a intensidade do peso do objeto não supere a intensidade da força de atrito de destaque. Na situação de equilíbrio, a força de atrito estático (não necessariamente a de destaque) equilibra a força peso.

Esquema de forças na caixa

$\vec{F}$: força aplicada pela mão da pessoa;

$\vec{F}_n$: reação normal da parede;

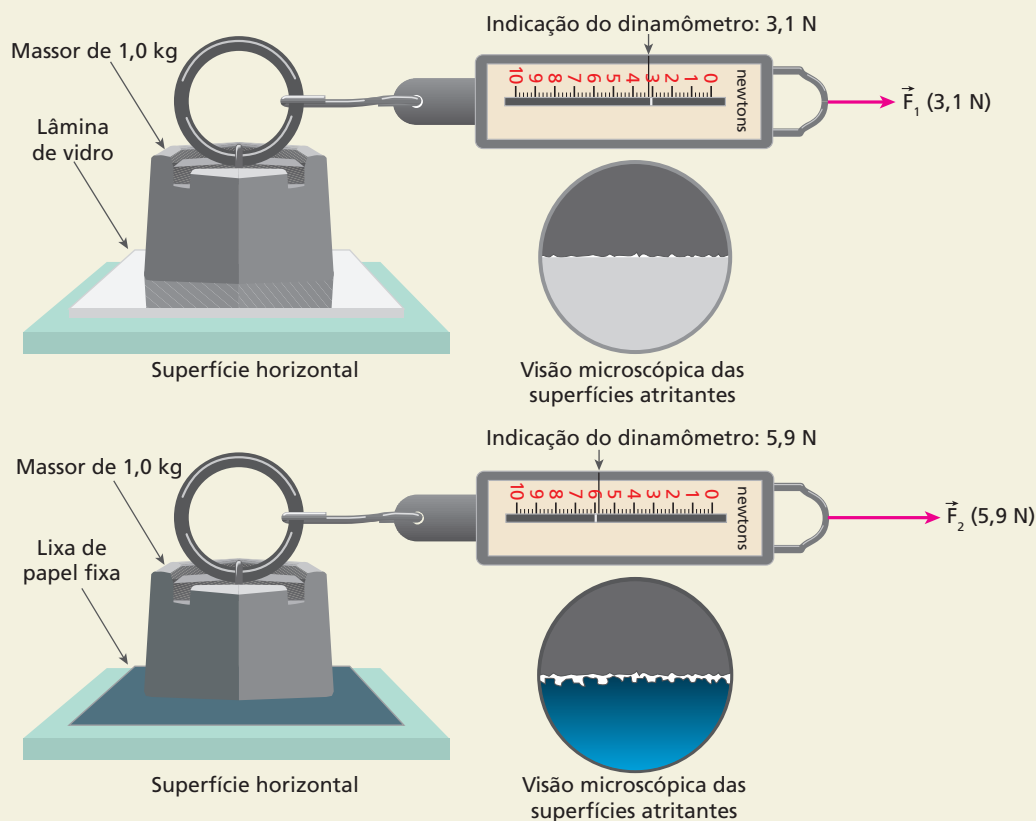
$\vec{P}$: força da gravidade (peso);

$\vec{F}_{at}$: força de atrito estático.

Equilíbrio na horizontal: $|\vec{F}_n| = |\vec{F}|$

Equilíbrio na vertical: $|\vec{F}_{at}| = |\vec{P}|$

Nota:

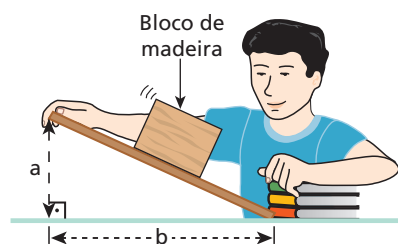
- Nessa análise, não consideramos a possível força de atrito entre a caixa e a mão.

O experimento proposto nas imagens acima tem a finalidade de determinar o coeficiente de atrito estático entre um bloco de ferro de massa-padrão 1,0 kg e superfícies horizontais de apoio de materiais diferentes. No primeiro caso, o bloco é colocado sobre uma lâmina de vidro (superfície bastante lisa) e o dinamômetro indica na situação de movimento iminente uma força de 3,1 N. No segundo caso, o bloco é colocado sobre uma lixa de papel (superfície bastante áspera) e o dinamômetro indica na situação de movimento iminente 5,9 N. Supondo $g = 10\ m/s^2$, pode-se determinar para o primeiro caso $\mu_{e_1} = 0{,}31$ e para o segundo, $\mu_{e_2} = 0{,}59$.

Determinação experimental do coeficiente de atrito estático

Vamos descrever agora um experimento também muito simples, que tem por objetivo determinar o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies.

Consiga uma tábua plana, de madeira compensada. Observe se ela não apresenta irregularidades, como ondulações, rachaduras, regiões mais ásperas que outras ou empenamentos.

Arrume também um bloco de madeira ou de outro material, sem irregularidades em sua base, e apoie-o sobre a tábua.

Incline lentamente a tábua em relação à horizontal, conforme mostra a figura a seguir, sempre observando o bloco.

Perceba que se estabelecerá uma situação em que o bloco se apresentará na iminência de deslizar.

Nessa situação, fixe a tábua e meça com uma régua os comprimentos **a** e **b** indicados na figura. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície de apoio, μ_e, será determinado por:

$$\mu_e = \frac{a}{b}$$

Agora, faça a demonstração matemática desta expressão.

Faça você mesmo

Seu calçado é muito escorregadio?

O objetivo deste experimento é determinar o coeficiente de atrito estático (μ_e) entre a sola de um calçado e um determinado piso. Para isso, consiga uma mola qualquer que opere em regime elástico durante os procedimentos relacionados a seguir. Obtenha também uma régua escolar e com ela meça o comprimento natural da mola, isto é, seu comprimento sem deformação. Representemos esse comprimento por x_0.

1º Procedimento:

Fixe uma das extremidades da mola de modo que ela disponha seu eixo na vertical. Pendure um pé de calçado na extremidade livre da mola, conforme indica a figura ao lado, aguarde o equilíbrio e meça o comprimento x_1 adquirido pela mola nessa situação.

Sendo **P** a intensidade do peso do pé de calçado e F_1 a intensidade da força elástica exercida pela mola sobre ele, podemos escrever na situação de equilíbrio que:

$$P = F_1$$

Aplicando-se a Lei de Hooke, vem:

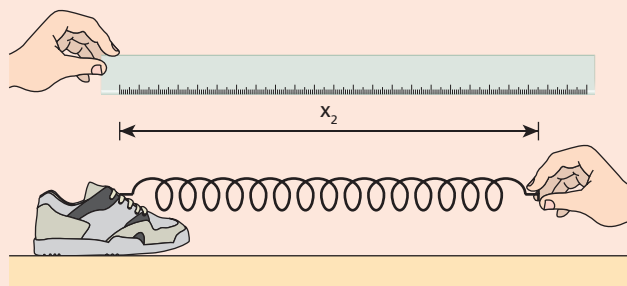
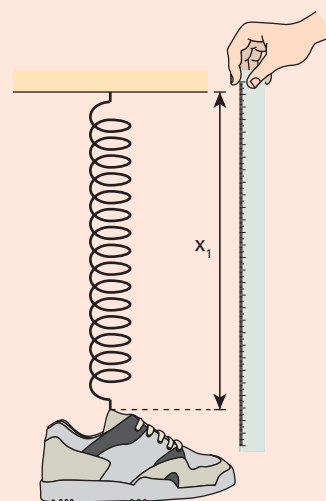
$$P = K\,\Delta x_1$$

Assim:

$$P = K\,(x_1 - x_0) \quad \text{(I)}$$

em que **K** é a constante elástica da mola.

2º Procedimento

Apoie agora o pé de calçado sobre o piso, admitido horizontal, conectando a ele uma das extremidades da mola. Puxando a mola horizontalmente, conforme ilustra o esquema ao lado, meça o comprimento x_2 adquirido por ela quando o pé de calçado estiver na iminência de escorregar.

Sendo F_{at} a intensidade da força de atrito exercida pela superfície de apoio sobre o pé de calçado e F_2 a intensidade da força elástica aplicada pela mola sobre ele, temos na situação de equilíbrio:

$$F_{at} = F_2$$

Aplicando-se novamente a Lei de Hooke, vem:

$$F_{at} = K\,\Delta x_2$$

Em que:

$$F_{at} = K\,(x_2 - x_0)$$

No caso de escorregamento iminente, porém, a força de atrito estático adquire intensidade máxima (atrito de destaque), dada por $F_{at_d} = \mu\, F_n$. Como a superfície de apoio é horizontal, tem-se ainda que:

$$F_{at} = \mu_e\, P$$

Logo:

$$\mu_e\, P = K\,(x_2 - x_0) \quad \text{(II)}$$

Dividindo-se (II) por (I), segue que:

$$\frac{\mu_e\, P}{P} = \frac{K\,(x_2 - x_0)}{K\,(x_1 - x_0)}$$

Portanto:

$$\boxed{\mu_e = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}}$$

Observe que o valor de μ_e independe do peso do pé de calçado e da constante elástica da mola. Depende apenas das distensões apresentadas pela mola no primeiro e no segundo procedimento.

Quanto mais próximo de zero for o valor de μ_e mais escorregadio será o calçado quando utilizado no piso estudado.

Maior compressão: escorregamento mais difícil

Sugerimos a seguir dois experimentos muito simples que podem ser feitos em casa. Com eles, você irá comprovar que a intensidade da força de atrito de destaque cresce com a intensidade da força normal de compressão. Vejamos:

I. Pegue uma vassoura e coloque-a na posição horizontal, com o cabo apoiado sobre os seus dois dedos indicadores.

Se você tentar fazer com que seus dedos escorreguem no sentido de se encontrarem, como sugere a fotografia, notará uma dificuldade muito maior em relação ao indicador da mão esquerda, que se encontra do lado mais pesado, que é a extremidade que contém, amarrados, os tufos de fibras (vegetais, animais ou sintéticas).

Sergio Dotta/The Next

Isso acontece porque, devido à maior concentração de massa à sua esquerda, a força normal de compressão sobre o dedo indicador da mão esquerda é mais intensa que a força normal de compressão sobre o dedo indicador da mão direita.

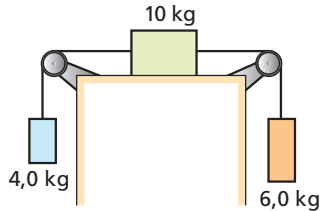
II. Pegue um objeto cilíndrico e pesado – uma barra de ferro ou um cilindro de madeira, como aquele conhecido por "pau de macarrão", ou mesmo o cabo de vassoura mencionado no item I. Segure o objeto de modo que o seu eixo fique perpendicular ao solo, conforme sugere a fotografia ao lado.

Se você afrouxar os dedos, exercendo menor pressão sobre o objeto, ele cairá. Esse afrouxamento provoca uma redução na intensidade da força normal de compressão sobre o objeto e, consequentemente, uma redução na intensidade da força de atrito de destaque que, ao ser superada pelo peso do objeto, determina seu deslizamento.

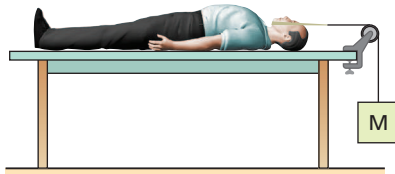
Cristina Xavier

Exercícios

nível 1

1. (FGV-SP) O sistema indicado está em repouso devido à força de atrito entre o bloco de massa de 10 kg e o plano horizontal de apoio. Os fios e as polias são ideais e adota-se $g = 10\ m/s^2$.

a) Qual o sentido da força de atrito no bloco de massa de 10 kg, para a esquerda ou para a direita?
b) Qual a intensidade dessa força?

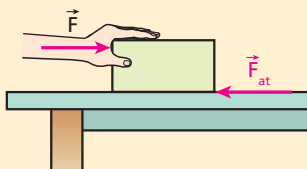
2. Para colocar um bloco de peso 100 N na iminência de movimento sobre uma mesa horizontal, é necessário aplicar sobre ele uma força, paralela à mesa, de intensidade 20 N. Qual o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa?

3. Na situação esquematizada na figura, um homem de massa 70 kg está deitado sobre uma mesa horizontal para submeter-se a uma terapia por tração:

O fio e a polia são ideais e o coeficiente de atrito estático entre o corpo do homem e a mesa vale 0,40. Se o homem está na iminência de deslizar sobre a mesa, qual o valor da massa **M**?

4. E.R. Uma caixa de peso 10 kgf acha-se em repouso sobre uma mesa horizontal. Calcule a intensidade da força de atrito exercida sobre a caixa quando ela é empurrada por uma força horizontal de 2,0 kgf. O coeficiente de atrito estático entre a caixa e a mesa vale 0,30.

Resolução:

A situação descrita está esquematizada abaixo:

Inicialmente, vamos calcular a intensidade da força de atrito de destaque entre a caixa e a mesa:

$$F_{at_d} = \mu_e F_n \Rightarrow F_{at_d} = \mu_e P$$

Sendo $\mu_e = 0,30$ e $P = 10$ kgf, vem:

$$F_{at_d} = 0,30 \cdot 10 \text{ (kgf)}$$

Donde: $\boxed{F_{at_d} = 3,0 \text{ kgf}}$

Como a força com que a caixa é empurrada (2,0 kgf) é menos intensa que a força de atrito de destaque (3,0 kgf), temos uma situação de equilíbrio. A caixa permanece em repouso e a força de atrito estático exercida sobre ela tem intensidade 2,0 kgf:

$$\boxed{F_{at} = 2,0 \text{ kgf}}$$

5. Sobre um piso horizontal, repousa uma caixa de massa $2,0 \cdot 10^2$ kg. Um homem a empurra, aplicando-lhe uma força paralela ao piso, conforme sugere o esquema abaixo:

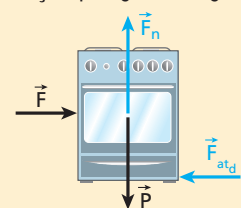
O coeficiente de atrito estático entre a caixa e o piso é 0,10 e, no local, $g = 10\ m/s^2$. Determine:
a) a intensidade da força com que o homem deve empurrar a caixa para colocá-la na iminência de movimento;
b) a intensidade da força de atrito que se exerce sobre a caixa quando o homem a empurra com 50 N.

6. E.R. Na figura ao lado, um homem está empurrando um fogão de massa 40 kg, aplicando sobre ele uma força $\vec{F}$, paralela ao solo plano e horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o fogão e o solo é igual a 0,75 e, no local, adota-se $g = 10\ m/s^2$.

Supondo que o fogão está na iminência de escorregar, calcule:
a) a intensidade de $\vec{F}$;
b) a intensidade da força $\vec{C}$ de contato que o fogão recebe do solo.

Resolução:

No esquema a seguir, representamos as forças que agem no fogão:

$\vec{F}$: força aplicada pelo homem;
$\vec{F}_{at_d}$: força de atrito de destaque (movimento iminente);
$\vec{P}$: força da gravidade (peso);
$\vec{F}_n$: força normal.

a) **Equilíbrio na vertical:** $F_n = P$

$$F_n = m\,g \Rightarrow F_n = 40 \cdot 10 \text{ (N)}$$

$$F_n = 400 \text{ N}$$

Equilíbrio na horizontal: $F = F_{at_d}$

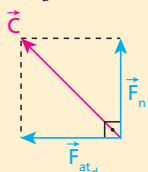
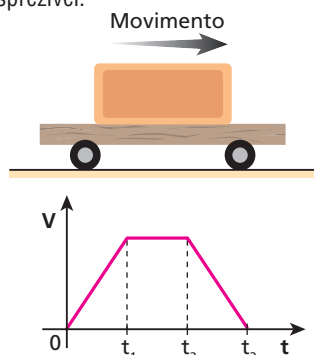
$$F = \mu_e F_n \Rightarrow F = 0,75 \cdot 400 \text{ (N)}$$

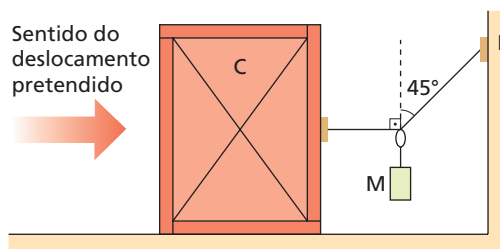
$$\boxed{F = 300 \text{ N}}$$

b) A força $\vec{C}$ é a resultante da soma vetorial de $\vec{F}_{at_d}$ com $\vec{F}_n$. Aplicando o **Teorema de Pitágoras**, vem:

$$C^2 = F_n^2 + F_{at_d}^2$$

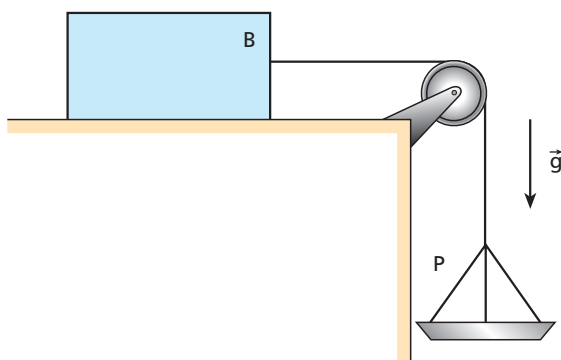
$$C^2 = (400)^2 + (300)^2$$

$$\boxed{C = 500 \text{ N}}$$

7. Considere a situação esquematizada na figura, em que um tijolo está apoiado sobre uma plataforma de madeira plana e horizontal. O conjunto parte do repouso no instante $t_0 = 0$ e passa a descrever uma trajetória retilínea com velocidade de intensidade **V**, variável com o tempo, conforme o gráfico apresentado. No local, a influência do ar é desprezível.

Admitindo que não haja escorregamento do tijolo em relação à plataforma e adotando um referencial fixo no solo, aponte a alternativa que melhor representa as forças que agem no tijolo nos intervalos de 0 a t_1, de t_1 a t_2 e de t_2 a t_3:

8. Para vencer o atrito e deslocar um grande contêiner **C**, no sentido indicado, é necessária uma força horizontal que supere 500 N. Na tentativa de movê-lo, blocos de massa m = 15 kg são pendurados em um fio, que é esticado entre o contêiner e o ponto **P** na parede, como na figura.

Para movimentar o contêiner, é preciso pendurar no fio, no mínimo:
(Adote g = 10 m/s^2.)

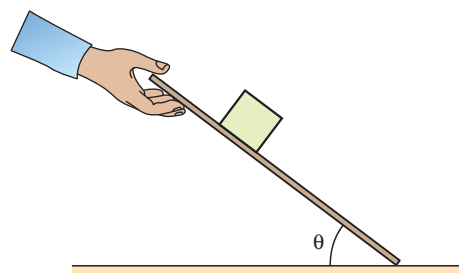
a) 1 bloco.
b) 2 blocos.
c) 3 blocos.
d) 4 blocos.
e) 5 blocos.

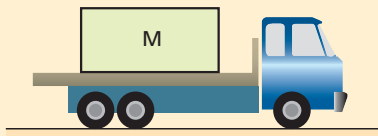
Exercícios nível 2

9. Na situação da figura, o bloco **B** e o prato **P** pesam, respectivamente, 80 N e 1,0 N. O coeficiente de atrito estático entre **B** e o plano horizontal de apoio vale 0,10 e desprezam-se os pesos dos fios e o atrito no eixo da polia. No local, $|\vec{g}| = 10$ m/s^2.

Dispõe-se de 20 blocos iguais, de 100 g de massa cada um, que podem ser colocados sobre o prato **P**.

a) Colocando-se dois blocos sobre **P**, qual a intensidade da força de atrito exercida em **B**?
b) Qual o número de blocos que deve ser colocado sobre **P**, para que **B** fique na iminência de se movimentar?

10. (Unirio-RJ) Uma caixa vazia, pesando 20 N, é colocada sobre uma superfície horizontal. Ao atuar sobre ela uma força também horizontal, ela começa a se movimentar quando a intensidade da força supera 5,0 N; cheia de água, isso acontece quando a intensidade da força supera 30 N. Qual a massa de água contida na caixa? (Admita g = 10 m/s^2.)

11. Sobre um plano inclinado, de ângulo **θ** variável, apoia-se uma caixa de pequenas dimensões, conforme sugere o esquema a seguir.

Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a caixa e o plano de apoio vale 1,0, qual o máximo valor de **θ** para que a caixa ainda permaneça em repouso?

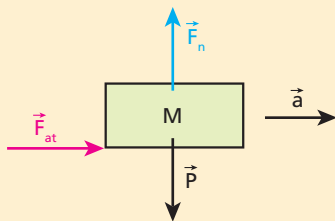
12. E.R. Na figura, representa-se um caminhão inicialmente em repouso sobre uma pista plana e horizontal. Na sua carroceria, apoia-se um bloco de massa **M**.

Sendo **μ** o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a carroceria e **g** o valor da aceleração da gravidade local, determine a máxima intensidade da aceleração que o caminhão pode adquirir sem que o bloco escorregue.

Resolução:

Na figura abaixo, estão representadas as forças que agem no bloco:

$\vec{P}$: força da gravidade (peso);

$\vec{F}_n$: reação normal;

$\vec{F}_{at}$: força de atrito.

É importante notar que a força de atrito tem sentido oposto ao da tendência de escorregamento do bloco, porém o mesmo sentido do movimento do caminhão.

A força que acelera o bloco em relação à pista é $\vec{F}_{at}$; logo, aplicando a **2ª Lei de Newton**:

$$F_{at} = M\,a \qquad \text{(I)}$$

O bloco está em equilíbrio na vertical; logo:

$$F_n = P \;\Rightarrow\; F_n = M\,g \qquad \text{(II)}$$

Como o bloco **não** deve escorregar, o atrito entre ele e a carroceria é **estático**. Assim:

$$F_{at} \leq F_{at_d} \;\Rightarrow\; F_{at} \leq \mu\,F_n \qquad \text{(III)}$$

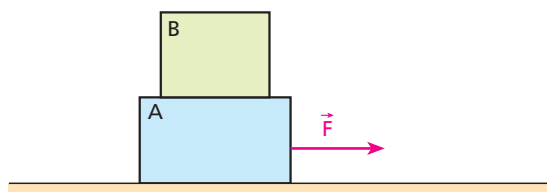
Substituindo (I) e (II) em (III), segue que:

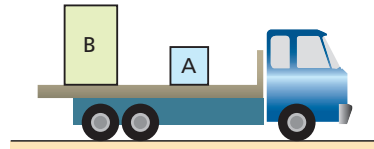
$$M\,a \leq \mu\,M\,g \;\Rightarrow\; a \leq \mu\,g$$

$$\boxed{a_{máx} = \mu\,g}$$

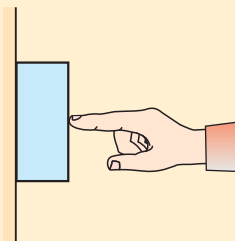
Nota:

- Observe que a aceleração calculada independe da massa do bloco.

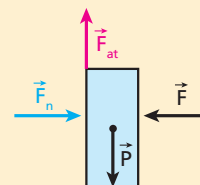
13. Na situação da figura, os blocos **A** e **B** têm massas $m_A = 4{,}0$ kg e $m_B = 6{,}0$ kg. A aceleração da gravidade no local tem módulo $10\ m/s^2$, o atrito entre **A** e o plano horizontal de apoio é desprezível e o coeficiente de atrito estático entre **B** e **A** vale $\mu_e = 0{,}50$.

Desprezando-se o efeito do ar, qual a máxima intensidade da força $\vec{F}$, paralela ao plano, de modo que **B** não se movimente em relação a **A**?

14. Considere duas caixas, **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 10 kg e 40 kg, apoiadas sobre a carroceria de um caminhão que trafega em uma estrada reta, plana e horizontal. No local, a influência do ar é desprezível. Os coeficientes de atrito estático entre **A** e **B** e a carroceria valem $\mu_A = 0{,}35$ e $\mu_B = 0{,}30$ e, no local, $g = 10\ m/s^2$.

Para que nenhuma das caixas escorregue, a maior aceleração (ou desaceleração) permitida ao caminhão tem intensidade igual a:

a) $3{,}5\ m/s^2$;
b) $3{,}0\ m/s^2$;
c) $2{,}5\ m/s^2$;
d) $2{,}0\ m/s^2$;
e) $1{,}5\ m/s^2$.

15. E.R. Um homem comprime uma caixa contra uma parede vertical, aplicando-lhe com o dedo uma força de intensidade **F** perpendicular à parede, conforme representa a figura.

Sendo **m** a massa da caixa e **g** a intensidade da aceleração da gravidade e desprezando o atrito entre o dedo e a caixa, responda: qual é o menor coeficiente de atrito estático entre a caixa e a parede que impede o seu escorregamento?

Resolução:

Na figura abaixo, representamos as forças que agem na caixa:

$\vec{F}$: força aplicada pelo homem;

$\vec{P}$: força da gravidade (peso);

$\vec{F}_n$: reação normal da parede;

$\vec{F}_{at}$: força de atrito.

Se não há escorregamento da caixa em relação à parede, o atrito é **estático**. Logo:

$$F_{at} \leq \mu_e\,F_n \qquad \text{(I)}$$

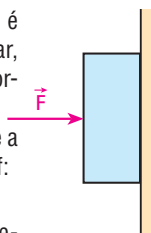
Equilíbrio na horizontal: $F_n = F$ (II)

Equilíbrio na vertical: $F_{at} = P \;\Rightarrow\; F_{at} = m\,g$ (III)

Substituindo (II) e (III) em (I), vem: $m\,g \leq \mu_e\,F$.

$$\mu_e \geq \frac{m\,g}{F}$$

Logo: $$\boxed{\mu_{e_{mín}} = \frac{m\,g}{F}}$$

16. Na figura, uma caixa de peso igual a 30 kgf é mantida em equilíbrio, na iminência de deslizar, comprimida contra uma parede vertical por uma força horizontal $\vec{F}$.
Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a parede é igual a 0,75, determine, em kgf:

a) a intensidade de $\vec{F}$;
b) a intensidade da força de contato que a parede aplica na caixa.

17. (Unifesp-SP) Uma bonequinha está presa, por um ímã a ela colado, à porta vertical de uma geladeira.

a) Desenhe esquematicamente essa bonequinha, representando e nomeando as forças que atuam sobre ela.
b) Sendo m = 20 g a massa total da bonequinha com o ímã e μ = 0,50 o coeficiente de atrito estático entre o ímã e a porta da geladeira, qual deve ser o menor valor da força magnética entre o ímã e a geladeira para que a bonequinha não caia?
Dado: g = 10 m/s^2.

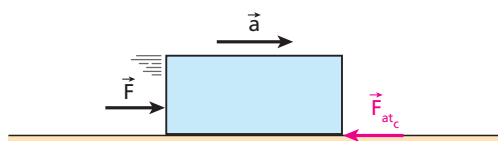
Bloco 2

3. O atrito cinético

Conceito

Admita que o bloco da figura abaixo esteja em repouso sobre um plano horizontal áspero. Suponha que sobre ele seja aplicada uma força $\vec{F}$, paralela ao plano de apoio. Com a atuação de $\vec{F}$, o bloco recebe do plano a força de atrito $\vec{F}_{at}$.

Qual a condição a ser satisfeita para que o bloco seja colocado em movimento? A resposta é simples: o movimento será iniciado se a intensidade de $\vec{F}$ superar a intensidade da força de atrito de destaque.

Supondo que essa condição tenha sido cumprida, observaremos uma situação dinâmica, com o bloco em movimento. Enquanto o bloco estava em repouso, o atrito era chamado de estático. Agora, porém, receberá a denominação de **atrito cinético** (ou **dinâmico**).

Sendo $F > F_{at_d}$, o bloco entra em movimento e, nessa situação, o atrito recebido do plano de apoio é cinético.

O cofre da figura, inicialmente em repouso, entrará em movimento se a força aplicada pela pessoa vencer a força de atrito de destaque.

Cálculo da intensidade da força de atrito cinético (F_{at_c})

Verifica-se que a intensidade da força de atrito cinético (F_{at_c}) é diretamente proporcional à intensidade da força normal trocada pelas superfícies atritantes.

Matematicamente, temos:

$$F_{at_c} = \mu_c \, F_n$$

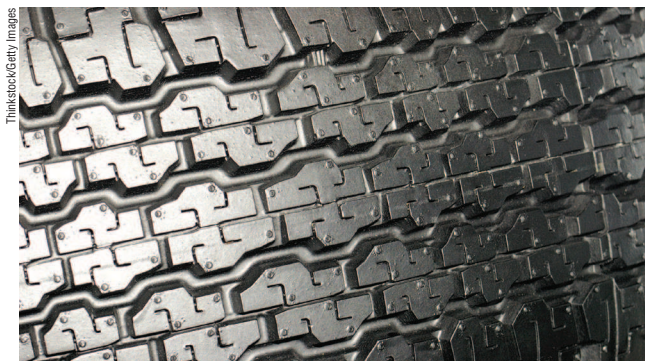
A constante de proporcionalidade μ_c denomina-se **coeficiente de atrito cinético** (ou **dinâmico**) e seu valor também depende dos materiais atritantes e do grau de polimento deles.

Surge, então, outra pergunta: a força de atrito cinético tem a mesma intensidade que a força de atrito de destaque? A resposta também é simples: essas forças não possuem a mesma intensidade, pois $\mu_c \neq \mu_e$. É de observação experimental que $\mu_c < \mu_e$, o que implica $F_{at_c} < F_{at_d}$.

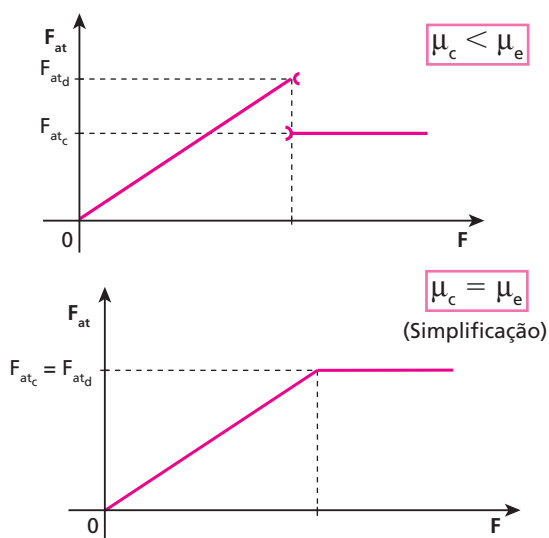
De fato, podemos constatar que é mais fácil manter um armário escorregando sobre o chão do que iniciar seu movimento a partir do repouso.

Em muitos casos, porém, para simplificar os cálculos, a diferença entre μ_c e μ_e é ignorada, possibilitando-nos escrever que $F_{at_c} = F_{at_d} = \mu \, F_n$, em que μ é chamado apenas de coeficiente de atrito.

Veja, na tabela a seguir, os valores de coeficientes de atrito entre alguns materiais:

Materiais atritantes	μ_e	μ_c
Vidro com vidro	0,94	0,35
Borracha com asfalto seco	1,20	0,85
Borracha com asfalto molhado	0,80	0,60
Aço com alumínio	0,61	0,47
Madeira com madeira	0,58	0,40
Madeira encerada com neve	0,05	0,04
Teflon com aço	0,04	0,04

Os sulcos dos pneus dos carros têm por finalidade favorecer o escoamento da água que se interpõe entre a borracha e o asfalto. Isso evita as reduções bruscas do coeficiente de atrito que geralmente provocam o fenômeno da aquaplanagem, causador de derrapagens do veículo. Pneus "carecas", com sulcos pouco profundos, são responsáveis por muitos acidentes de trânsito, pois favorecem a aquaplanagem.

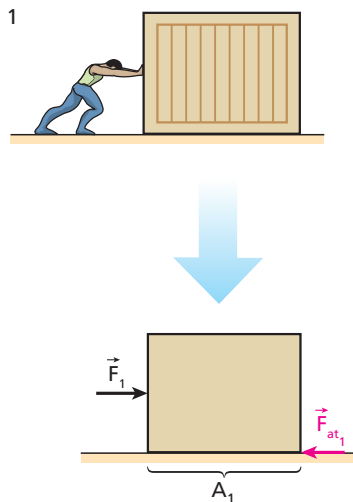
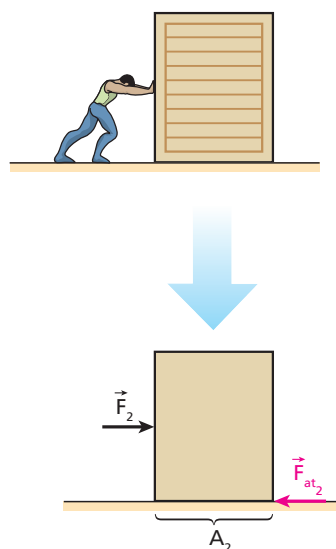
Para a locomoção sobre barro ou neve, pode-se revestir os pneus com correntes. Dessa forma, é compensada a insuficiência de atrito.

Graficamente, a intensidade da força de atrito recebida por um corpo em função da intensidade da força que o solicita ao escorregamento é dada conforme os diagramas seguintes:

Note, de acordo com os gráficos apresentados, que a força de atrito cinético permanece constante, pelo menos dentro de certos limites de velocidade.

4. Lei do atrito

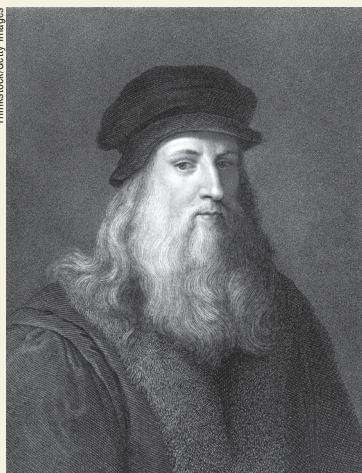
Revelam os experimentos que:

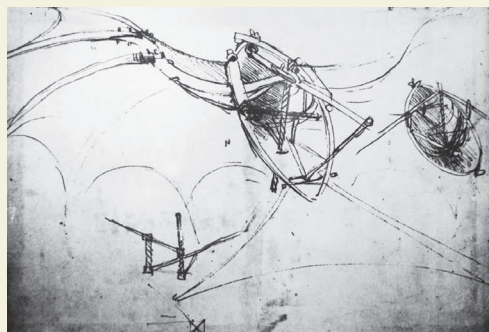
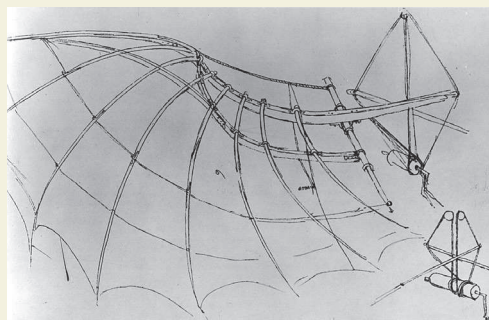
> As forças de atrito de destaque e cinético são praticamente independentes da área de contato entre as superfícies atritantes.

Disso decorre, por exemplo, que uma mesma caixa de madeira empurrada sobre uma mesma superfície horizontal de concreto recebe, para uma mesma solicitação, forças de atrito de intensidades iguais, independentemente de ela estar apoiada conforme a situação 1 ou a situação 2, ilustradas a seguir.

No caso da situação 1, a área de contato da caixa com o plano de apoio é A_1; no caso da situação 2, é A_2, de modo que $A_1 > A_2$. Se $F_1 = F_2$, então, $F_{at_1} = F_{at_2}$, independentemente de termos $A_1 > A_2$.

Foi o artista e inventor italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) quem primeiro apresentou a formulação das leis do atrito. Quase dois séculos antes de Isaac Newton propor formalmente o conceito de força, ele já dizia: “O atrito exige o dobro do esforço se o peso for dobrado”. E também: “O atrito provocado pelo mesmo peso determinará a mesma resistência no início do movimento, embora áreas ou comprimentos de contato sejam diferentes”.

Alguns séculos depois, o cientista francês Charles Augustin Coulomb (1736-1806) realizou muitos experimentos sobre atrito e estabeleceu a diferença entre atrito estático e atrito cinético.

Thinkstock/Getty Images

Gravura representando Leonardo da Vinci. Autor desconhecido, séc. XIX. Coleção particular.

Italiano de Anchiano, Leonardo da Vinci, além de ter sido um dos maiores mestres da arte renascentista, notabilizando-se por obras como a *Mona Lisa* (Museu do Louvre – Paris), também foi um visionário da ciência. Já nos séculos XV e XVI, ainda distante de formulações matemáticas que se sucederiam no campo da Física, ele projetava objetos voadores, paraquedas e mecanismos para trocar cenários de teatros (altamente sofisticados até para os dias de hoje). No campo da Biologia, estudou anatomia humana, registrando suas descobertas em desenhos que servem de referência para a Medicina ainda nos tempos atuais. Foi um verdadeiro gênio, como poucos que a humanidade conheceu.

Bettmann/CORBIS/Latinstock

The Bridgeman Art Library/Grupo Keystone

Reprodução dos desenhos originais do livro de notas de da Vinci: estudos para uma máquina voadora.

Leitura

Deslizamento de pneus: menos eficiência nas arrancadas e freadas

Em muitas competições de automobilismo, o piloto arranca fazendo as rodas de tração derrapar ou, como se diz na linguagem coloquial, “cantar os pneus”. Será que é dessa forma que se obtém a máxima intensidade na aceleração de largada? Certamente que não. A aceleração máxima é obtida quando as rodas de tração ficam prestes a deslizar. É nessa situação que a principal força que impulsiona o carro tem intensidade máxima, já que se trata da força de atrito de destaque. Numa arrancada em que o piloto deixa as rodas derrapar, devido ao fato de haver escorregamento entre os pneus e a pista, o atrito é do tipo dinâmico e este é sempre menor que o atrito de destaque. Dessa forma, fica diminuída a força propulsora sobre o veículo, o que determina uma menor aceleração.

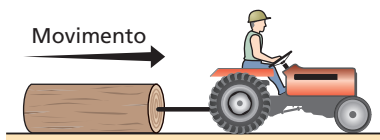
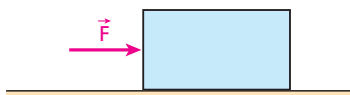
George Tiedemann/GT Images/Corbis /Latinstock

Largada com o veículo “cantando os pneus”: desperdício de potência e aceleração com intensidade menor que a máxima possível.

Também nas freadas não se deve deixar as rodas travar, pois, na situação de um carro deslizando com os pneus bloqueados, a força de atrito responsável pela frenagem – atrito dinâmico – tem intensidade menor que a da força de atrito de destaque, o que obriga o veículo a percorrer uma distância maior até sua imobilização. O processo de frenagem ocorre com eficiência maior quando se mantêm as rodas na iminência de travar, já que nesse caso o veículo fica sujeito à força máxima de retardamento: a força de atrito de destaque.

Isso explica a enorme aceitação pelo mercado consumidor do sistema de freios ABS – *Antiblock Braking System* –, pois ele impede o travamento das rodas do veículo durante as freadas. Em geral, diante de perigo iminente, motoristas tendem a pressionar o pedal de freio com muita força, o que quase sempre provoca bloqueio das rodas. Com freios ABS, essa possibilidade fica praticamente eliminada, o que garante frenagens mais eficazes e seguras.

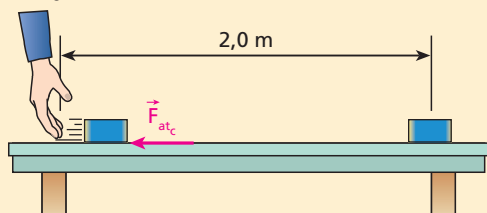
Exercícios — nível 1

18. Na situação esquematizada na figura abaixo, um trator arrasta uma tora cilíndrica de $4{,}0 \cdot 10^3$ N de peso sobre o solo plano e horizontal. Se a velocidade vetorial do trator é constante e a força de tração exercida sobre a tora vale $2{,}0 \cdot 10^3$ N, qual é o coeficiente de atrito cinético entre a tora e o solo?

19. Na situação esquematizada abaixo, um bloco de peso igual a 40 N está inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre a base do bloco e a superfície da mesa valem, respectivamente, 0,30 e 0,25. Admita que seja aplicada no bloco uma força horizontal $\vec{F}$.

Adotando $g = 10$ m/s^2, indique os valores que preenchem as lacunas da tabela abaixo com as intensidades da força de atrito e da aceleração do bloco correspondentes às magnitudes definidas para a força $\vec{F}$.

F (N)	**F_{at}** (N)	**a** (m/s^2)
10		
12		
30		

20. E.R. Uma caixa de fósforos é lançada sobre uma mesa horizontal com velocidade de 2,0 m/s, parando depois de percorrer 2,0 m. No local do experimento, a influência do ar é desprezível. Adotando para o campo gravitacional módulo igual a 10 m/s^2, determine o coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a mesa.

Resolução:

A figura seguinte ilustra o evento descrito no enunciado:

Inicialmente, devemos calcular o módulo da aceleração de retardamento da caixa de fósforos. Para isso, aplicamos a **Equação de Torricelli**:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\, d$$

Como $v = 0$, $v_0 = 2{,}0$ m/s e $d = 2{,}0$ m, vem:

$$0 = (2{,}0)^2 + 2\,\alpha\, 2{,}0 \;\Rightarrow\; \alpha = -1{,}0 \text{ m/s}^2$$

$$a = |\,\alpha\,| = 1{,}0 \text{ m/s}^2$$

A força resultante responsável pela freada da caixa é a força de atrito cinético. Pela **2ª Lei de Newton**, podemos escrever:

$$F_{at_c} = m\,a \qquad \text{(I)}$$

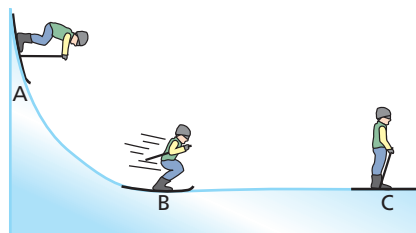
Entretanto:

$$F_{at_c} = \mu_c\, F_n = \mu_c\, m\, g \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), calculamos, finalmente, o coeficiente de atrito cinético m_c:

$$\mu_c\, m\, g = m\, a \;\Rightarrow\; \mu_c = \frac{a}{g} = \frac{1{,}0 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2}$$

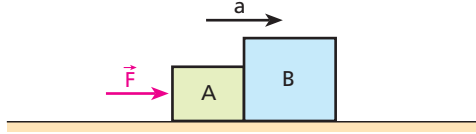
$$\boxed{\mu_c = 0{,}10}$$

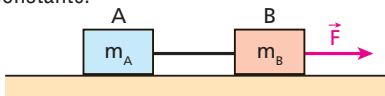
21. Na figura, o esquiador parte do repouso do ponto **A**, passa por **B** com velocidade de 20 m/s e para no ponto **C**:

O trecho BC é plano, reto e horizontal e oferece aos esquis um coeficiente de atrito cinético de valor 0,20. Admitindo desprezível a influência do ar e adotando $g = 10$ m/s^2, determine:

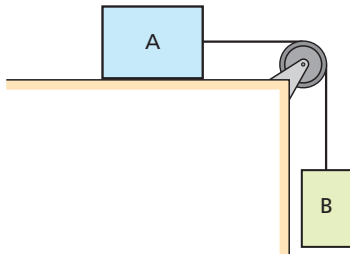
a) a intensidade da aceleração de retardamento do esquiador no trecho BC;

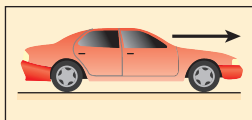
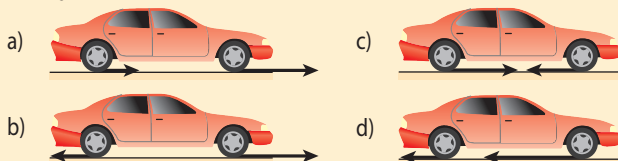
b) a distância percorrida por ele de **B** até **C** e o intervalo de tempo gasto nesse percurso.

22. Os blocos **A** e **B** da figura seguinte têm massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 3,0 kg e estão sendo acelerados horizontalmente sob a ação de uma força $\vec{F}$ de intensidade de 50 N, paralela ao plano do movimento.

Sabendo que o coeficiente de atrito de escorregamento entre os blocos e o plano de apoio vale $\mu = 0,60$, que $g = 10\ m/s^2$ e que o efeito do ar é desprezível, calcule:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) a intensidade da força de interação trocada entre os blocos na região de contato.

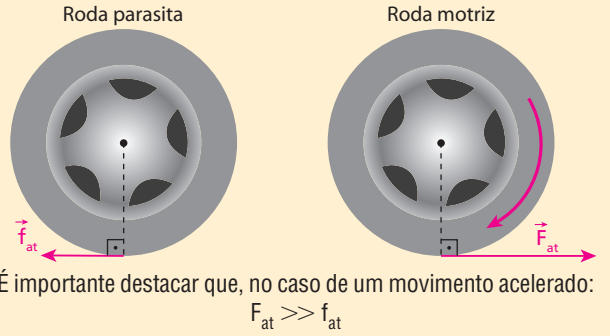
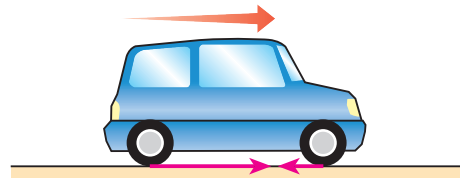
23. (Unesp-SP) A figura ilusta um bloco **A**, de massa $m_A = 2,0$ kg, atado a um bloco **B**, de massa $m_B = 1,0$ kg, por um fio inextensível de massa desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a mesa é μ_c. Uma força de intensidade $F = 18,0$ N é aplicada ao bloco **B**, fazendo com que os dois blocos se desloquem com velocidade constante.

Considerando-se $g = 10,0\ m/s^2$, calcule:
a) o coeficiente de atrito μ_c;
b) a intensidade da tração **T** no fio.

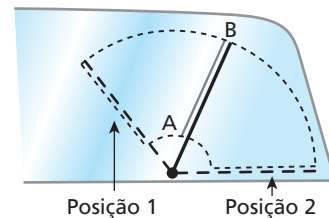
24. O corpo **A**, de 5,0 kg de massa, está apoiado em um plano horizontal, preso a uma corda que passa por uma roldana de massa e atrito desprezíveis e que sustenta em sua extremidade o corpo **B**, de 3,0 kg de massa. Nessas condições, o sistema apresenta movimento uniforme. Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando a influência do ar, determine:

a) o coeficiente de atrito cinético entre o corpo **A** e o plano de apoio;
b) a intensidade da aceleração do sistema se colocarmos sobre o corpo **B** uma massa de 2,0 kg.

25. E.R. (Uerj) Considere um carro de tração dianteira que acelera no sentido indicado na figura abaixo. O motor é capaz de impor às rodas de tração, por meio de um torque, um determinado sentido de rotação. Só há movimento quando há atrito, pois, na sua ausência, as rodas de tração patinam sobre o solo, como acontece em um terreno enlameado.

O diagrama que representa **corretamente** as orientações das forças de atrito estático que o solo exerce sobre as rodas é:

Resolução:

A roda motriz (com tração) empurra o chão para trás e recebe deste, pelo atrito, uma força dirigida para frente ($\vec{F}_{at}$).
A roda parasita (sem tração) é arrastada para frente juntamente com o veículo e raspa o chão também para a frente, recebendo deste, pelo atrito, uma força dirigida para trás ($\vec{f}_{at}$).

É importante destacar que, no caso de um movimento acelerado:

$$F_{at} >> f_{at}$$

26. (ESPCEX-SP – mod.) A figura abaixo representa um automóvel em movimento retilíneo e acelerado da esquerda para a direita. Os vetores desenhados junto às rodas representam os sentidos das forças de atrito exercidas pelo chão sobre as rodas.

Sendo assim, pode-se afirmar que o automóvel:
a) tem tração apenas nas rodas traseiras.
b) tem tração nas quatro rodas.
c) tem tração apenas nas rodas dianteiras.
d) move-se em ponto morto, isto é, sem que nenhuma das rodas seja tracionada.
e) está em alta velocidade.

27. Na figura, está representado o limpador de para-brisa de um carro. O aparelho está funcionando e tanto sua borracha quanto o vidro sobre o qual ela desliza podem ser considerados homogêneos. Admitindo que a compressão do limpador sobre o para-brisa seja uniforme em toda a extensão AB, podemos afirmar que:

a) da posição 1 à posição 2, a velocidade angular média da extremidade **B** é maior que a da extremidade **A**;
b) da posição 1 à posição 2, a aceleração angular média da extremidade **B** é menor que a da extremidade **A**;
c) da posição 1 à posição 2, a velocidade linear média da extremidade **B** é igual à da extremidade **A**;
d) a força de atrito na região próxima da extremidade **A** é mais intensa que a força de atrito na região próxima da extremidade **B**;
e) a borracha próxima da extremidade **B** desgasta-se mais rapidamente que a borracha próxima da extremidade **A**.

TF1-184_206_5P_P2T2.indd 197 16/08/12 17:08

Exercícios

nível 2

28. E.R. Um bloco de 2,0 kg de massa repousa sobre um plano horizontal quando lhe é aplicada uma força $\vec{F}$, paralela ao plano, conforme representa a figura abaixo:

Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano de apoio valem, respectivamente, 0,50 e 0,40 e, no local, a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s^2. Calcule:

a) a intensidade da força de atrito recebida pelo bloco quando $|\vec{F}| = 9{,}0$ N;

b) o módulo da aceleração do bloco quando $|\vec{F}| = 16$ N. Despreze o efeito do ar.

Resolução:

Devemos, inicialmente, calcular a intensidade da força de atrito de destaque entre o bloco e o plano de apoio:

$$F_{at_d} = \mu_e F_n \Rightarrow F_{at_d} = \mu_e P = \mu_e m g$$

Sendo $\mu_e = 0{,}50$, $m = 2{,}0$ kg e $g = 10$ m/s^2, vem:

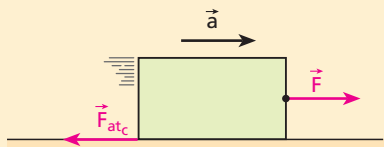
$$F_{at_d} = 0{,}50 \cdot 2{,}0 \cdot 10 \text{ (N)} \Rightarrow \boxed{F_{at_d} = 10 \text{ N}}$$

a) A força $\vec{F}$, apresentando intensidade 9,0 N, é insuficiente para vencer a força de atrito de destaque (10 N). Por isso, o bloco permanece em repouso e, nesse caso, a força de atrito que ele recebe equilibra a força $\vec{F}$, tendo intensidade 9,0 N:

$$\boxed{F_{at} = 9{,}0 \text{ N}}$$

b) Com $|\vec{F}| = 16$ N, o bloco adquire movimento, sendo acelerado para a direita. Nesse caso, o atrito é cinético e sua intensidade é dada por:

$$F_{at_c} = \mu_c F_n = \mu_c m g$$

$$F_{at_c} = 0{,}40 \cdot 2{,}0 \cdot 10 \text{ (N)} \Rightarrow \boxed{F_{at_c} = 8{,}0 \text{ N}}$$

A **2ª Lei de Newton**, aplicada ao bloco, permite escrever que:

$$F - F_{at_c} = m a \Rightarrow 16 - 8{,}0 = 2{,}0 \cdot a$$

$$\boxed{a = 4{,}0 \text{ m/s}^2}$$

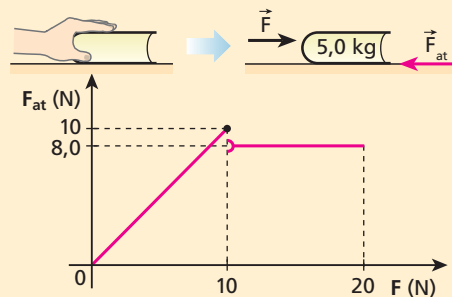
29. Um homem empurra horizontalmente um cofre de massa m = 100 kg sobre um plano horizontal, conforme indica a figura.

O cofre encontra-se inicialmente em repouso e sabe-se que os coeficientes de atrito estático e cinético entre ele e o plano de apoio valem, respectivamente, 0,820 e 0,450.

Considerando g = 10 m/s^2, calcule:

a) a intensidade da força de atrito recebida pelo cofre se a força aplicada pelo homem valer $8{,}00 \cdot 10^2$ N;

b) o módulo da aceleração do cofre se a força aplicada pelo homem valer $8{,}50 \cdot 10^2$ N.

30. E.R. No esquema seguinte, representa-se um livro inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal sendo empurrado horizontalmente por um homem; $\vec{F}$ é a força que o homem aplica no livro e $\vec{F}_{at}$ é a força de atrito exercida pela mesa sobre o livro. Representa-se, também, como varia a intensidade de $\vec{F}_{at}$ em função da intensidade de $\vec{F}$. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}| = 10$ m/s^2.

Com base no gráfico e nos demais dados, determine:

a) os coeficientes de atrito estático e cinético entre o livro e a mesa;

b) o módulo da aceleração do livro quando F = 18 N.

Resolução:

a) • **Determinação do coeficiente de atrito estático** (μ_e):
Observando o gráfico, percebemos que a força de atrito máxima (de destaque) que o livro recebe da mesa vale $F_{at_d} = 10$ N. A partir disso, podemos escrever que:

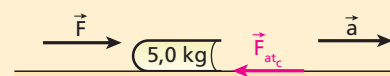
$$F_{at_d} = \mu_e F_n = \mu_e m g \Rightarrow 10 = \mu_e \cdot 5{,}0 \cdot 10$$

$$\boxed{\mu_e = 0{,}20}$$

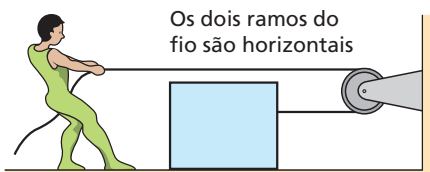
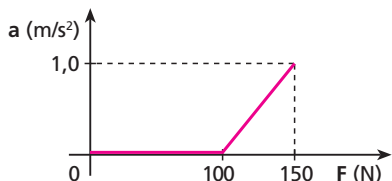
• **Determinação do coeficiente de atrito cinético** (μ_c):
Observando o gráfico, notamos que a força de atrito cinético que age no livro depois de iniciado seu movimento vale $F_{at_c} = 8{,}0$ N.
Dessa conclusão, segue que:

$$F_{at_c} = \mu_c F_n = \mu_c m g \Rightarrow 8{,}0 = \mu_c \cdot 5{,}0 \cdot 10$$

$$\boxed{\mu_c = 0{,}16}$$

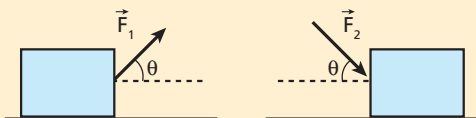
b) Calculamos o módulo da aceleração do livro aplicando a ele a **2ª Lei de Newton**:

$$F - F_{at_c} = m a \Rightarrow 18 - 8{,}0 = 5{,}0 \, a$$

$$\boxed{a = 2{,}0 \text{ m/s}^2}$$

31. No arranjo experimental da figura, o homem puxa a corda para a esquerda e, com isso, consegue acelerar horizontalmente a caixa para a direita:

O módulo de aceleração da caixa varia com a intensidade da força que o homem aplica na corda, conforme o gráfico seguinte.

Admitindo que o fio e a polia sejam ideais e desprezando a influência do ar:

a) esboce o gráfico da intensidade da força de atrito recebida pela caixa em função da intensidade da força exercida pelo homem na corda;

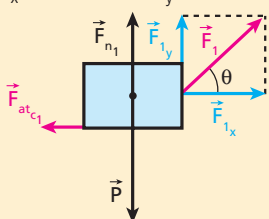
b) calcule a massa da caixa e o coeficiente de atrito entre ela e o plano de apoio ($g = 10\ m/s^2$).

32. E.R. Nas duas situações esquematizadas abaixo, uma mesma caixa de peso 20 N deverá ser arrastada sobre o solo plano e hori-zontal em movimento retilíneo e uniforme. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a superfície de apoio vale 0,50.

Dados: $\text{sen}\ \theta = 0{,}80$ e $\cos\theta = 0{,}60$.

Desprezando a influência do ar, calcule as intensidades das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que satisfazem à condição citada.

Resolução:

Decompondo $\vec{F}_1$ nas direções horizontal e vertical, obtemos, respectivamente, as componentes $\vec{F}_{1_x}$ e $\vec{F}_{1_y}$, de intensidades dadas por:

$$F_{1_x} = F_1 \cos\theta \text{ e } F_{1_y} = F_1 \text{ sen}\ \theta$$

Equilíbrio na vertical:

$F_{n_1} + F_1 \text{ sen}\ \theta = P$

$F_{n_1} + 0{,}80F_1 = 20$

$F_{n_1} = 20 - 0{,}80F_1$

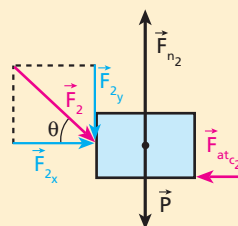
Equilíbrio na horizontal:

$F_1 \cos\theta = \mu_c F_{n_1}$

$0{,}60\ F_1 = 0{,}50\ (20 - 0{,}80\ F_1)$

$\boxed{F_1 = 10\ N}$

Decompondo, agora, $\vec{F}_2$ nas direções horizontal e vertical, obtemos, respectivamente, as componentes $\vec{F}_{2_x}$ e $\vec{F}_{2_y}$, de intensidades dadas por:

$$F_{2_x} = F_2 \cos\theta \text{ e } F_{2_y} = F_2 \text{ sen}\ \theta$$

Equilíbrio na vertical:

$F_{n_2} = P + F_2 \text{ sen}\ \theta$

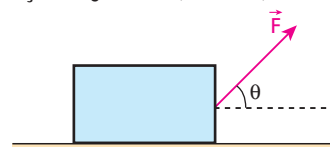
$F_{n_2} = 20 + 0{,}80F_2$

Equilíbrio na horizontal:

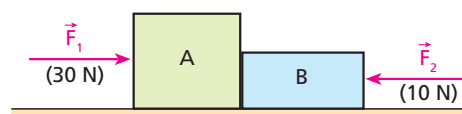
$F_2 \cos\theta = \mu_c F_{n_2}$

$0{,}60\ F_2 = 0{,}50\ (20 + 0{,}80F_2)$

$\boxed{F_2 = 50\ N}$

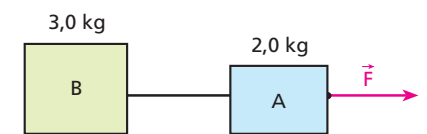
33. Considere o esquema seguinte, em que se representa um bloco de 1,0 kg de massa apoiado sobre um plano horizontal. O coeficiente de atrito de arrastamento entre a base do bloco e a superfície de apoio vale 0,25 e a aceleração da gravidade, no local, tem módulo $10\ m/s^2$.

A força $\vec{F}$, cuja intensidade é de 10 N, forma com a direção horizontal um ângulo θ constante, tal que $\text{sen}\ \theta = 0{,}60$ e $\cos\theta = 0{,}80$. Desprezando a influência do ar, aponte a alternativa que traz o valor correto da aceleração do bloco:

a) $7{,}0\ m/s^2$;
b) $5{,}5\ m/s^2$;
c) $4{,}0\ m/s^2$;
d) $2{,}5\ m/s^2$;
e) $1{,}5\ m/s^2$.

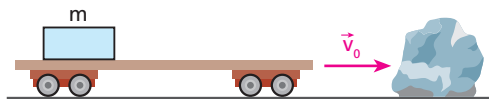
34. (Efomm-RJ) Os blocos **A** e **B** representados na figura possuem massas de 3,0 kg e 2,0 kg respectivamente. A superfície horizontal onde eles se deslocam apresenta um coeficiente de atrito cinético igual a 0,30. $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são forças horizontais que atuam nos blocos.

Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando o efeito do ar, determine:

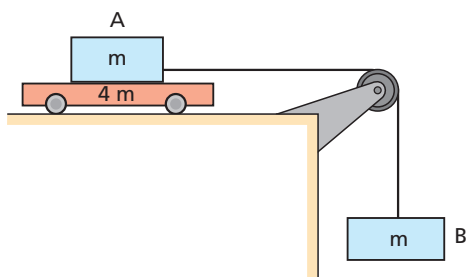
a) o módulo da aceleração do sistema;

b) a intensidade da força de contato entre **A** e **B**.

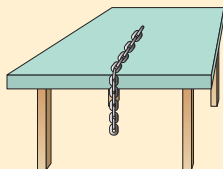
35. Sobre o plano horizontal da figura, apoiam-se os blocos **A** e **B**, interligados por um fio inextensível e de massa desprezível. O coeficiente de atrito estático entre os blocos e o plano vale 0,60 e o cinético, 0,50. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$.

Sabendo que a força $\vec{F}$ é horizontal e que sua intensidade vale 50 N, calcule:

a) o módulo da aceleração do sistema;
b) a intensidade da força de tração no fio.

36. (Fuvest-SP) Um vagão de carga, transportando sobre seu piso plano uma caixa de massa **m**, desloca-se com velocidade constante $\vec{v}_0$ sobre trilhos retilíneos e horizontais. Em dado instante, o vagão choca-se com uma pedra sobre os trilhos e para instantaneamente. A caixa começa, então, a deslizar sobre o piso, parando antes de atingir a extremidade do vagão. Sabe-se que o coeficiente de atrito entre a caixa e o piso do vagão vale μ e a aceleração da gravidade tem intensidade igual a **g**.

a) Durante quanto tempo a caixa desliza?
b) Qual a distância percorrida pela caixa sobre o vagão?

37. (Vunesp-SP) Dois blocos, **A** e **B**, ambos de massa **m**, estão ligados por um fio leve e flexível, que passa por uma polia de massa desprezível, que gira sem atrito. O bloco **A** está apoiado sobre um carrinho de massa 4 m, que pode se deslocar sobre a superfície horizontal sem encontrar qualquer resistência. A figura mostra a situação descrita.

Quando o conjunto é liberado, **B** desce e **A** se desloca com atrito constante sobre o carrinho, acelerando-o. Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre **A** e o carrinho vale 0,20 e fazendo $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) o módulo da aceleração do carrinho;
b) o módulo da aceleração do sistema constituído por **A** e **B**.

38. E.R. (Cesesp-PE) Uma fina corrente metálica encontra-se parcialmente dependurada de uma mesa, como ilustra a figura.

Se o coeficiente de atrito estático entre a corrente e a mesa for **μ**, qual é a fração mínima do comprimento da corrente que deve ser mantida sobre a mesa para que a corrente não escorregue?

Resolução:

Admitamos a corrente na **iminência de escorregar**. Nesse caso, a força de atrito recebida pelo trecho apoiado na mesa é igual à força de atrito de destaque.

$$F_{at} = F_{at_d}$$

$$F_{at} = \mu\, F_n \qquad \text{(I)}$$

Sejam **L** o comprimento da corrente, **M** a sua massa total e **m** a massa do comprimento (L – x) pendente na vertical.

Analisando o equilíbrio da corrente, temos:

$$F_{at} = p \;\Rightarrow\; F_{at} = m\,g \qquad \text{(II)}$$

$$F_n = P_{total} - p \;\Rightarrow\; F_n = (M - m)\,g \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$$m\,g = \mu\,(M - m)\,g \;\Rightarrow\; \frac{m}{M - m} = \mu \qquad \text{(IV)}$$

Como a corrente é suposta homogênea, sua densidade linear **ρ** é constante, isto é, a relação entre a massa considerada e o respectivo comprimento é sempre a mesma.

$$\frac{m}{L - x} = \rho \text{ e } \frac{M - m}{x} = \rho$$

Donde:

$$\frac{m}{L - x} = \frac{M - m}{x} \;\Rightarrow\; \frac{m}{M - m} = \frac{L - x}{x} \qquad \text{(V)}$$

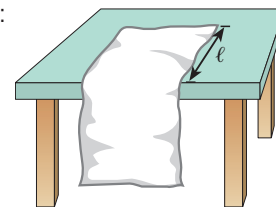
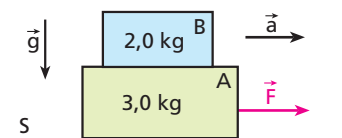
Comparando (IV) e (V), segue que:

$$\frac{L - x}{x} = \mu \;\Rightarrow\; L - x = \mu\, x$$

$$L = (\mu + 1)\, x \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{x}{L} = \frac{1}{\mu + 1}}$$

Observe que a fração $\frac{x}{L}$ é a menor possível (mínima), já que a corrente está na iminência de escorregar.

39. (UFF-RJ) Um pano de prato retangular, com 60 cm de comprimento e constituição homogênea, está em repouso sobre uma mesa, parte sobre sua superfície, horizontal e fina, e parte pendente, como mostra a figura. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a superfície da mesa e o pano é igual a 0,50 e que o pano está na iminência de deslizar, pode-se afirmar que o comprimento ℓ da parte sobre a mesa é:

a) 40 cm.
b) 45 cm.
c) 50 cm.
d) 55 cm.
e) 58 cm.

40. Na figura seguinte, a superfície **S** é horizontal, a intensidade de $\vec{F}$ é 40 N, o coeficiente de atrito de arrastamento entre o bloco **A** e a superfície **S** vale 0,50 e $g = 10\ m/s^2$.

Sob a ação da força $\vec{F}$, o sistema é acelerado horizontalmente e, nessas condições, o bloco **B** apresenta-se na iminência de escorregar em relação ao bloco **A**. Desprezando a influência do ar:

a) determine o módulo da aceleração do sistema;

b) calcule o coeficiente do atrito estático entre os blocos **A** e **B**.

41. Um pequeno bloco é lançado para baixo ao longo de um plano com inclinação de um ângulo **θ** com a horizontal, passando a descer com velocidade constante. Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade e desprezando a influência do ar, analise as proposições seguintes:

I. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio depende da área de contato entre as superfícies atritantes.

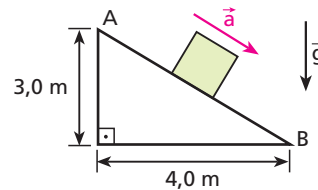
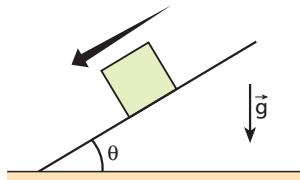
II. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio é proporcional a **g**.

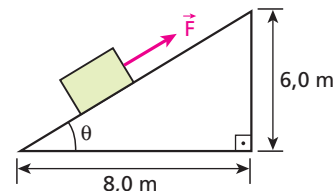
III. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio vale tg θ.

IV. A força de reação do plano de apoio sobre o bloco é vertical e dirigida para cima.

Responda mediante o código:

a) Somente I e III são corretas.
b) Somente II e IV são corretas.
c) Somente III e IV são corretas.
d) Somente III é correta.
e) Todas são incorretas.

42. A situação representada na figura a seguir refere-se a um bloco que, abandonado em repouso no ponto **A**, desce o plano inclinado com aceleração de 2,0 m/s², indo atingir o ponto **B**. Sabendo-se que, no local, $|\vec{g}| = 10$ m/s² e a influência do ar é desprezível, pede-se calcular o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio.

43. (Puccamp-SP – mod.) Um bloco de massa 5,0 kg é arrastado para cima, ao longo de um plano inclinado, por uma força $\vec{F}$, constante, paralela ao plano e de intensidade 50 N, como representa a figura ao lado.

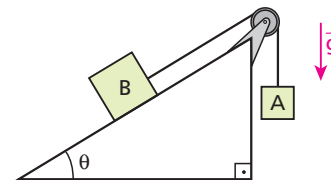
Sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o plano vale 0,40 e que a aceleração da gravidade tem módulo g = 10 m/s², calcule a intensidade da aceleração do bloco.

44. Na situação esquematizada na figura, o fio e a polia são ideais; despreza-se o efeito do ar e adota-se g = 10 m/s².

sen θ = 0,60

cos θ = 0,80

Sabendo que os blocos **A** e **B** têm massas iguais a 5,0 kg e que os coeficientes de atrito estático e cinético entre **B** e o plano de apoio valem, respectivamente, 0,45 e 0,40, determine:

a) o módulo da aceleração dos blocos;

b) a intensidade da força de tração no fio.

Descubra mais

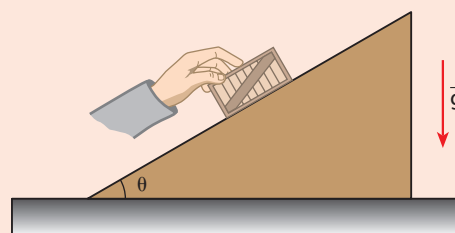
1. Considere a situação ideal de um plano inclinado perfeitamente liso instalado num ambiente sem ar. Se uma esfera homogênea for abandonada do alto desse plano inclinado, sem velocidade inicial, ela descerá rolando ou deslizando sem rolar? A aceleração do centro da esfera teria intensidade diferente se houvesse atrito entre ela e o plano inclinado?

2. Por que as lagartixas podem subir paredes, deslocando-se na vertical, sem cair?

Leitura

... e a força de atrito inverte seu sentido.

Vamos estudar a seguir uma situação teórica em que um pequeno bloco de massa **m** apoiado sobre um plano inclinado de um ângulo **θ** em relação à horizontal vai ser empurrado paralelamente ao plano sem, no entanto, se deslocar. O coeficiente de atrito estático entre as superfícies atritantes será admitido igual a μ_e e para a intensidade da aceleração da gravidade adotaremos o valor **g**.

Este esquema ilustra a situação proposta:

As componentes do peso do bloco nas direções tangencial e normal ao plano inclinado têm intensidades respectivamente iguais a P_t e P_n, dadas por:

$$P_t = m\,g\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{e} \qquad P_n = m\,g\cos\theta$$

A força de atrito estático recebida pelo bloco em situações de escorregamento iminente (força de atrito de destaque), por sua vez, tem intensidade F_{at_d}, calculada por:

$$F_{at_d} = \mu_e F_n \Rightarrow F_{at_d} = \mu_e P_n \Rightarrow F_{at_d} = \mu_e\, m\,g\cos\theta$$

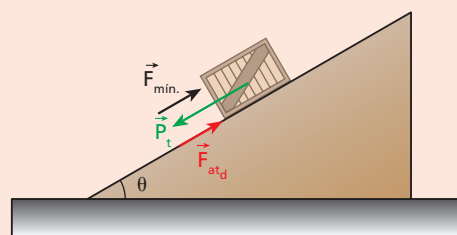
Agora, vamos determinar as intensidades $F_{mín.}$ e $F_{máx.}$ da força $\vec{F}$ aplicada pelo agente externo para deixar o bloco na iminência de escorregar para baixo e na iminência de escorregar para cima, respectivamente.

(I) A intensidade de $\vec{F}$ é mínima

Nesse caso, o bloco fica na iminência de escorregar para baixo e a força de atrito estático (de destaque) atuante sobre ele é dirigida para cima, no sentido de impedir sua descida.

Condição de equilíbrio: $F_{mín.} + F_{at_d} = P_t$

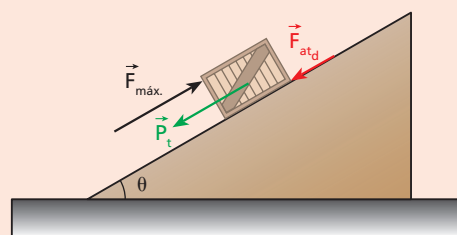
$$F_{mín.} + \mu_e\, m\,g\cos\theta = m\,g\,\text{sen}\,\theta$$

Da qual: $\boxed{F_{mín.} = m\,g\,(\text{sen}\,\theta - \mu_e\cos\theta)}$

(II) A intensidade de $\vec{F}$ é máxima

Nesse caso, o bloco fica na iminência de escorregar para cima e a força de atrito estático (de destaque) atuante sobre ele é dirigida para baixo, no sentido de impedir sua subida. Observe que **a força de atrito inverte seu sentido** em relação à situação anterior.

Condição de equilíbrio: $F_{máx.} = P_t + F_{at_d}$

$$F_{máx.} + m\,g\,\text{sen}\,\theta + \mu_e\, m\,g\cos\theta$$

Da qual: $\boxed{F_{máx.} = m\,g\,(\text{sen}\,\theta + \mu_e\cos\theta)}$

É importante ressaltar que valores de $\vec{F}$ compreendidos entre $F_{mín.}$ e $F_{máx.}$, incluídos estes dois valores, fazem o bloco permanecer em repouso, sem descer ou subir o plano inclinado.

Deve-se dizer ainda que, na prática, a situação de escorregamento iminente é de difícil detecção, uma vez que, em geral, o movimento se inicia bruscamente, sem que se observe a situação transitória do repouso ao deslizamento pleno.

Exercícios

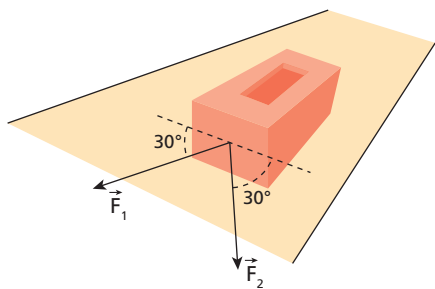
nível 3

45. Um cubo 1, de aço e de aresta **a**, acha-se apoiado sobre um piso de madeira plano, horizontal e que lhe oferece atrito. Nessas condições, a força horizontal que o deixa na iminência de se movimentar tem intensidade $\mathbf{F_1}$. Substitui-se, então, o cubo 1 por um cubo 2, de mesmo material, porém de aresta 2a. A força que coloca o cubo 2 na iminência de se movimentar tem intensidade $\mathbf{F_2}$. Analise as proposições seguintes:

I. O coeficiente de atrito estático é o mesmo para os dois cubos.
II. $F_2 = F_1$, pois a força de atrito máxima independe da área de contato entre as superfícies atritantes.
III. $F_2 = 8F_1$, pois o cubo 2 é oito vezes mais pesado que o cubo 1.

Aponte a alternativa correta:

a) Somente I é verdadeira.
b) Somente II é verdadeira.
c) Somente III é verdadeira.
d) Somente I e II são verdadeiras.
e) Somente I e III são verdadeiras.

46. (Unesp-SP) A figura a seguir mostra um tijolo de 1,2 kg sendo arrastado com velocidade constante por duas forças constantes de módulos iguais a 6,0 N cada, paralelas ao plano horizontal.
Dados: $g = 10\ m/s^2$; sen 30° = cos 60° = 0,50;
sen 60° = cos 30° = 0,87.

O valor do coeficiente de atrito cinético entre o corpo e o piso sobre o qual ele é arrastado é:

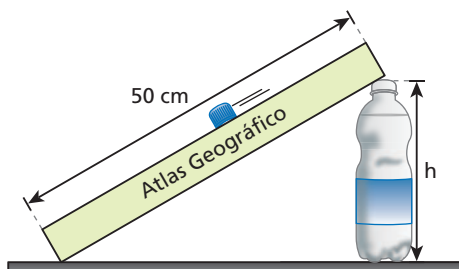
a) 0,05. b) 0,08. c) 0,50. d) 0,80. e) 0,96.

47. Um carro especial projetado para arrancadas de alta *performance* (*drag racing*) tem tração nas rodas traseiras de modo que elas comprimem a pista de provas – plana, reta e horizontal – com uma força equivalente a $\frac{2}{3}$ do peso total do veículo. No local, a aceleração da gravidade tem intensidade **g** e a resistência do ar pode ser ignorada. Supondo que os coeficientes de atrito estático e cinético entre as rodas traseiras e a pista valham μ_e e μ_c, respectivamente, e admitindo desprezíveis os atritos nas rodas não motrizes, determine:

a) o módulo da máxima aceleração possível para o carro;
b) o mínimo intervalo de tempo para o veículo percorrer, a partir do repouso, uma distância **d** com aceleração de intensidade constante.

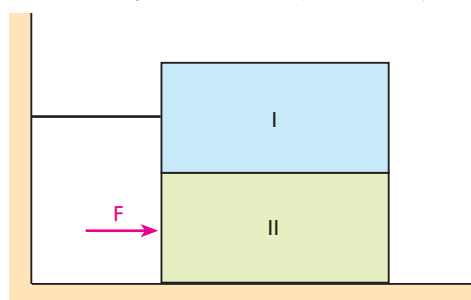
48. (Fuvest-SP) Você empurra um livro sobre uma mesa horizontal, comunicando-lhe certa velocidade inicial. Você observa que, depois de abandonado, o livro desliza aproximadamente 1 metro sobre a mesa, até parar. Se a massa do livro fosse o dobro e se você o empurrasse, comunicando-lhe a mesma velocidade inicial, ele deslizaria, até parar, aproximadamente:

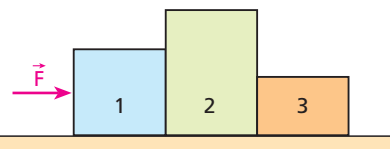
a) 0,25 m. c) 1 m. e) 2 m.
b) 0,5 m. d) 1,4 m.

49. Pedro Paulo faz a montagem esquematizada abaixo e verifica que a tampa da garrafa *Pet* de altura **h**, que serve de apoio para o livro de comprimento 50 cm, depois de levemente impulsionada, desce o plano inclinado constituído pela capa do livro com velocidade praticamente constante.

Se ele sabe que o coeficiente de atrito cinético entre a tampa da garrafa e a capa do livro é igual a 0,75, que valor aproximado Pedro Paulo pode determinar para **h**?

50. (Unicamp-SP) A esteira de bagagens em aeroportos constitui um meio conveniente para carga e descarga de volumes nas aeronaves. Considere uma situação em que uma mala é colocada em uma esteira inicialmente em repouso.
Dado: $g = 10\ m/s^2$.

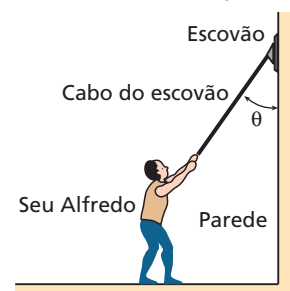
a) Para que a mala seja transportada pela esteira **sem deslizar**, a aceleração impressa sobre a esteira não pode exceder um valor máximo. Sendo o coeficiente de atrito estático entre a mala e a esteira igual a $\mu_e = 0{,}65$, calcule esse valor máximo de aceleração.
b) Suponha agora que a esteira sofra uma aceleração superior à aceleração máxima do item anterior, fazendo com que a mala deslize sobre a esteira, deslocando-se em relação ao solo com uma aceleração constante e inferior à da esteira. Sendo o coeficiente de atrito cinético entre a mala e a esteira igual a $\mu_c = 0{,}50$, qual a distância percorrida pela mala em relação ao solo após 2,0 segundos? Admita que a mala partiu do repouso.

51. (Vunesp-SP) Na figura, o bloco I repousa sobre o bloco II, sendo que I está preso por uma corda a uma parede; $m_I = 3{,}0$ kg e $m_{II} = 6{,}0$ kg. O coeficiente de atrito cinético entre I e II é 0,10 e entre II e o plano é 0,20. Qual deve ser a força **F** que, aplicada em II, desloca esse bloco com aceleração de 2,0 m/s²? ($g = 10\ m/s^2$)

a) 15 N. c) 30 N. e) 40 N.
b) 27 N. d) 33 N.

52. (ITA-SP) A figura abaixo representa três blocos de massas $M_1 = 1{,}00$ kg, $M_2 = 2{,}50$ kg e $M_3 = 0{,}50$ kg respectivamente. Entre os blocos e o piso que os apoia existe atrito, cujos coeficientes cinético e estático são, respectivamente, 0,10 e 0,15; a aceleração da gravidade vale 10,0 m/s².

Se ao bloco 1 for aplicada uma força $\vec{F}$ horizontal de 10,0 N, qual será a intensidade da força que o bloco 2 exercerá no bloco 3?

53. (UFRN) Seu Alfredo limpa uma parede vertical com um escovão, como mostra a figura abaixo. Ele empurra o escovão contra a parede de tal modo que o escovão desliza sobre ela, realizando um movimento vertical, **de baixo para cima**, com velocidade constante. A força $\vec{F}$ aplicada por Seu Alfredo sobre o escovão tem a mesma direção do cabo do utensílio, que, durante todo o movimento, forma um ângulo constante **θ** com a parede.

Considere que o cabo tenha massa desprezível em comparação com a massa **m** do escovão. O coeficiente de atrito cinético entre o escovão e a parede é μ_c e a aceleração da gravidade tem módulo **g**.

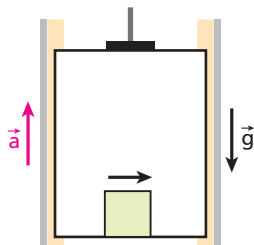
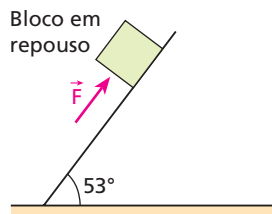
a) Faça um desenho mostrando as forças que atuam sobre o escovão.
b) Deduza a expressão para o módulo da força $\vec{F}$ em função de **m**, **g**, μ_c, sen θ e cos θ.

54. Na situação da figura a seguir, os corpos **A** e **B** têm massas **M** e **m**, respectivamente, estando **B** simplesmente encostado em uma parede vertical de **A**. O sistema movimenta-se horizontalmente sob a ação da força $\vec{F}$, paralela ao plano de apoio, sem que **B** escorregue em relação a **A**. O efeito do ar é desprezível, não há atrito entre **A** e o solo e no local a aceleração da gravidade vale **g**.

Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre **B** e **A**, analise as proposições seguintes:

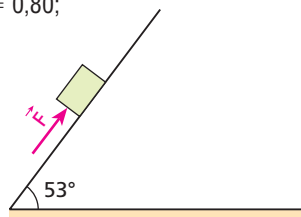
I. A situação proposta só é possível se o sistema estiver, necessariamente, em alta velocidade.
II. Para que **B** não escorregue em relação a **A**, a aceleração do sistema deve ser maior ou igual a μ g.
III. Se **B** estiver na iminência de escorregar em relação a **A**, a intensidade de $\vec{F}$ será (M + m) g/μ.

Responda mediante o código:

a) Se somente I e II forem corretas.
b) Se somente I e III forem corretas.
c) Se somente II e III forem corretas.
d) Se somente II for correta.
e) Se somente III for correta.

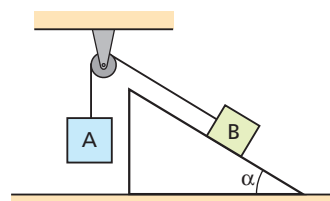
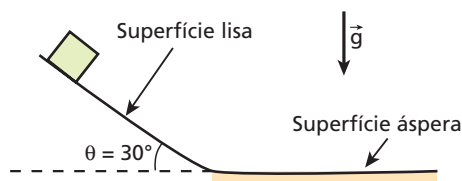
55. Um elevador é acelerado verticalmente para cima com 6,0 m/s^2, num local em que $|\vec{g}| = 10$ m/s^2. Sobre o seu piso horizontal, é lançado um bloco, sendo-lhe comunicada uma velocidade inicial de 2,0 m/s. O bloco é freado pela força de atrito exercida pelo piso até parar em relação ao elevador. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies atritantes vale 0,25, calcule, em relação ao elevador, a distância percorrida pelo bloco até parar.

56. Um bloco pesando 100 N deve permanecer em repouso sobre um plano inclinado, que faz com a horizontal um ângulo de 53°. Para tanto, aplica-se ao bloco a força $\vec{F}$, representada na figura, paralela à rampa.

Sendo $\mu_e = 0{,}50$ o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano, que valores são admissíveis para $\vec{F}$, tais que a condição do problema seja satisfeita? **Dados:** sen 53° = 0,80; cos 53° = 0,60.

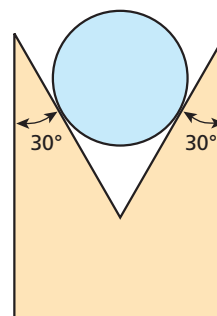
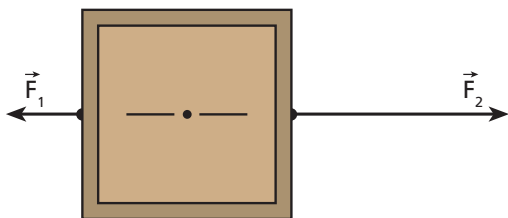
57. Um corpo de massa 20 kg é colocado em um plano inclinado de 53° sendo-lhe aplicada uma força $\vec{F}$ paralela ao plano, conforme representa a figura. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se g = 10 m/s^2.

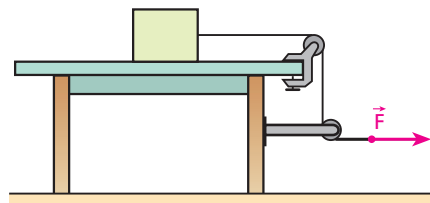
Dados: sen 53° = 0,80;
cos 53° = 0,60.

Sabendo que os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo e a superfície de apoio valem 0,30 e 0,20, respectivamente, determine:

a) a intensidade da força de atrito que atua no corpo quando F = 160 N;
b) o módulo da aceleração do corpo quando F = 100 N.

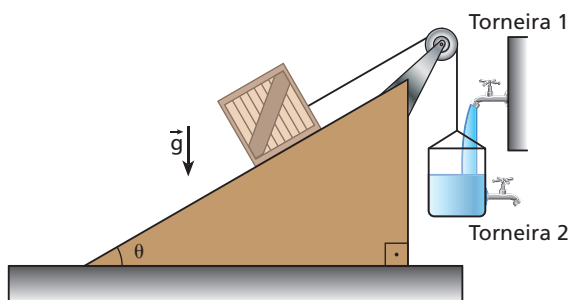
58. (ITA-SP) Na figura seguinte, os dois blocos **A** e **B** têm massas iguais. São desprezíveis as massas dos fios e da polia e esta pode girar sem atrito. O menor valor do coeficiente de atrito estático entre o plano inclinado de α em relação à horizontal e o bloco **B**, para que o sistema não escorregue, é:

a) $\dfrac{1 - \text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$
b) $\dfrac{1 - \cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$
c) tg α
d) cotg α
e) $\dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha}$

59. Um corpo de massa 10 kg parte do repouso do alto de um plano inclinado de um ângulo $\theta = 30°$, conforme representa a figura, escorregando sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar até atingir um plano horizontal áspero, de coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}20$. Sabendo que o corpo gasta 2,0 s para descer o plano inclinado e que a com 6,0 m/s^2, num local em que $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, determine:

a) a duração total do movimento;
b) as distâncias percorridas pelo corpo no plano inclinado e no plano horizontal.

60. (Faap-SP) Qual é a força horizontal capaz de tornar iminente o deslizamento do cilindro, de 50 kgf de peso, ao longo do apoio em **V**, mostrado na figura? O coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o apoio vale 0,25.

61. O esquema representa, visto de cima, uma caixa de CDs de computador apoiada sobre uma mesa plana e horizontal submetida à ação conjunta de três forças horizontais, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ (não representada), de intensidades respectivamente iguais a 1,0 N, 4,0 N e 2,7 N.

Supondo que a caixa se mantenha em repouso, determine o intervalo de valores possíveis para a força de atrito estático que atua sobre ela.

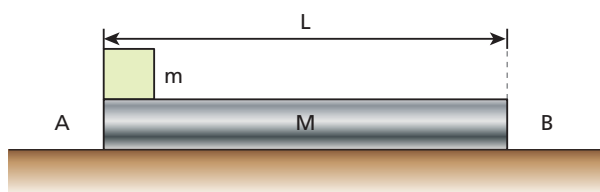
62. Na situação esquematizada, o fio e as polias são ideais e inexiste atrito entre os pés da mesa (massa da mesa igual a 15 kg) e a superfície horizontal de apoio. O coeficiente de atrito estático entre o bloco (massa do bloco igual a 10 kg) e o tampo da mesa vale 0,60 e, no local, adota-se g = 10 m/s^2.

Qual a máxima intensidade da força horizontal $\vec{F}$ aplicada na extremidade livre do fio que faz o sistema ser acelerado sem que o bloco escorregue em relação à mesa?

Para raciocinar um pouco mais

63. No esquema, representa-se um plano inclinado, cujo ângulo de elevação **θ** tem seno igual a 0,60. O fio e a polia são ideais, a massa da caixa apoiada na rampa é de 10,0 kg e, no local, adota-se **g** = 10,0 m/s^2. Pendente no segmento vertical do fio está um balde que pode receber água, por um processo lento, da torneira externa 1, e despejar água, também por um processo lento, pela torneira 2, acoplada ao balde e de peso desprezível.

Verifica-se que, quando a torneira 1 é aberta e a massa total do balde com água assume o valor 10,0 kg, a caixa fica na iminência de se deslocar para cima ao longo da rampa. Considerando-se o experimento proposto e os dados fornecidos, responda:

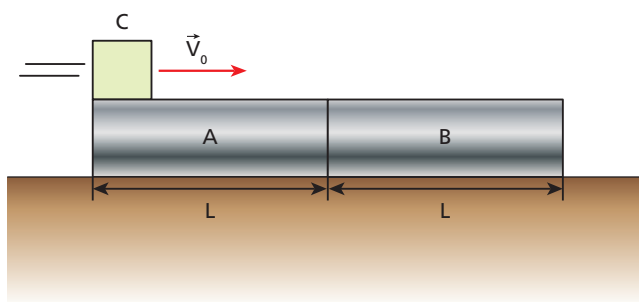
a) Qual o coeficiente de atrito estático entre a caixa e a superfície do plano inclinado?

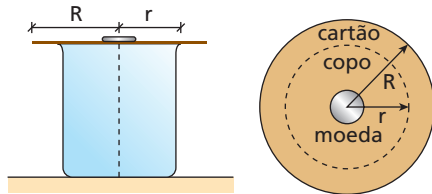
b) Com a torneira 1 fechada e a torneira 2 aberta até que a caixa fique na iminência de se deslocar para baixo ao longo da rampa, qual a massa do balde com água nesta situação?

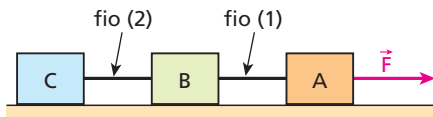
64. Um bloco de massa **m** = 0,50 kg encontra-se em uma extremidade A de uma prancha de comprimento **L** = 0,90 m e massa **M** = 5,0 kg, conforme a figura. Adote **g** = 10 m/s^2 e despreze o efeito do ar.

Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e a prancha são, respectivamente, μ_e = 0,40 e μ_c = 0,30. A prancha está apoiada sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa, de modo que o atrito entre a prancha e a mesa pode ser desprezado. As dimensões do bloco, por sua vez, são irrelevantes em comparação com as dimensões da prancha.

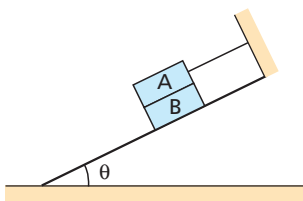
a) Qual a intensidade da força horizontal máxima que se pode aplicar na extremidade **B** da prancha, sem que o bloco deslize sobre ela?

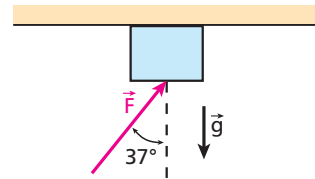
b) Aplicando-se na extremidade **A** da prancha uma força horizontal dirigida para a esquerda, com intensidade de 22,5 N, depois de quanto tempo o bloco cairá da prancha?

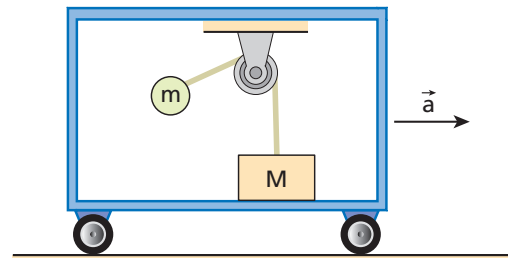
65. Na situação esquematizada abaixo, os blocos **A** e **B** são idênticos, apresentando comprimento **L** = 50 cm e massa **M** = 1,0 kg, cada um. O atrito entre **A** e **B** e a superfície horizontal de apoio é desprezível e, no local, **g** = 10 m/s^2. Num determinado instante, caracterizado como t_0 = 0, com **A** e **B** em contato e em repouso, um terceiro bloco, **C**, de dimensões desprezíveis e massa **m** = 200 g, é lançado horizontalmente sobre **A** com velocidade de intensidade V_0 = 3,0 m/s.

Sabendo-se que o coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco **C** e os blocos **A** e **B** é μ = 0,60, pede-se traçar o gráfico da intensidade da velocidade dos três blocos em função do tempo a partir do instante t_0 = 0.

66. (Olimpíada Brasileira de Física) A boca de um copo é coberta com um cartão circular, e sobre o cartão coloca-se uma moeda (Veja a figura a seguir). Os centros do cartão e da moeda são coincidentes com o centro da boca do copo. Considere como dados deste problema: o raio do cartão, **R**, o raio da boca do copo, **r**, o coeficiente de atrito entre a moeda e o cartão, μ, e o módulo **g** da aceleração da gravidade. O raio da moeda pode ser desprezado.

Move-se o cartão horizontalmente, em trajetória retilínea e com aceleração constante. Determine o valor da menor aceleração do cartão, a_C, para que a moeda ainda caia dentro do copo quando o cartão for retirado por completo.

67. Considere três blocos **A**, **B** e **C** de mesma massa $M = 5{,}0$ kg em uma mesa horizontal e unidos por fios ideais (1) e (2) que se rompem quando a intensidade da força de tração atinge o valor de 20 N.

Os coeficientes de atrito entre os blocos **A**, **B** e **C** e a mesa são iguais a $\mu_A = 0{,}30$, $\mu_B = 0{,}20$ e $\mu_C = 0{,}10$. Adota-se $g = 10$ m/s^2.
Aplicamos ao bloco **A** uma força horizontal $\vec{F}$ cuja intensidade vai aumentando lentamente.
Qual o mínimo valor de $\vec{F}$ que provoca a ruptura de um dos fios?

68. Na figura, os blocos **A** e **B** são iguais, apresentando peso de intensidade igual a 100 N cada um. Os coeficientes de atrito estático entre **A** e **B** e entre **B** e a superfície do plano inclinado têm o mesmo valor: μ.

Dados: sen $\theta = 0{,}60$; cos $\theta = 0{,}80$.
Sabendo que os blocos estão em equilíbrio, com **B** na iminência de escorregar, calcule:
a) o valor de μ;
b) a intensidade da força de tração no fio.

69. Um bloco de massa $m = 4{,}0$ kg é empurrado, ao longo do teto horizontal, por uma força constante $\vec{F}$, de intensidade $F = 100$ N e com inclinação de 37° em relação à vertical, como sugere a figura.

O bloco tem uma aceleração horizontal constante de módulo igual a 7,0 m/s^2.
Despreze o efeito do ar e considere os seguintes dados:
$g = 10$ m/s^2, sen 37° = 0,60 e cos 37° = 0,80.
O coeficiente de atrito dinâmico entre o bloco e o teto é igual a:
a) 0,10.
b) 0,30.
c) 0,50.
d) 0,60.
e) 0,80.

70. (Ufes) No teto de um vagão, presa por uma haste rígida, está fixada uma polia ideal. Pela polia, passa um fio ideal. Nas extremidades do fio estão presos uma pequena esfera de massa **m** e um bloco de massa $M = 28$ m. A esfera encontra-se suspensa e o bloco está em repouso em relação ao vagão, em contato com o piso. Devido ao fato de o vagão estar acelerado horizontalmente com uma aceleração de módulo $a = 3$ g/4, em que **g** é a intensidade da aceleração da gravidade, a parte do fio que passa pela polia e prende a esfera não se encontra na vertical.

Com base nessas informações, determine:
a) o ângulo θ de inclinação do fio que prende a esfera, em relação à vertical.
b) a intensidade da força de atrito estático que age sobre o bloco, em função de **m** e de **g**.
c) o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre o piso do vagão e o bloco para que o bloco permaneça em repouso em relação ao vagão.

Tópico 3

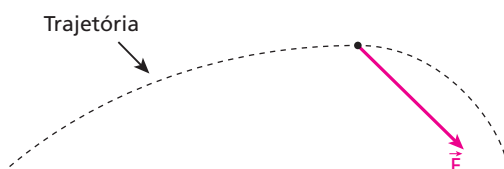
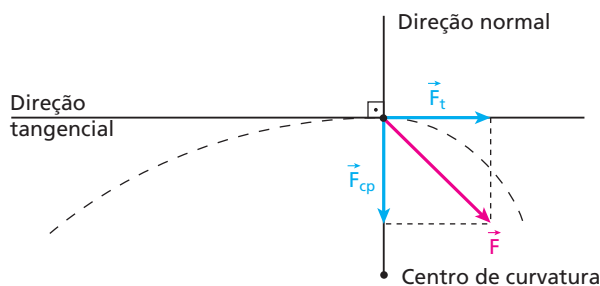
Resultantes tangencial e centrípeta

Bloco 1

1. Componentes da força resultante

Neste Tópico, faremos uma reflexão mais conceitual sobre a influência da força resultante sobre uma partícula. Buscaremos explicar como essa força afeta a velocidade vetorial em casos de arrancadas, freadas e trajetórias curvas.

Para tanto, devemos recordar que a força resultante é o resultado de uma adição vetorial, ou seja, é a soma vetorial de todas as forças que atuam na partícula.

Consideremos a figura abaixo, na qual está representada uma partícula em dado instante do seu movimento curvilíneo e variado. Nesse instante, $\vec{F}$ é a resultante de todas as forças.

A resultante $\vec{F}$ pode ser decomposta em duas direções perpendiculares entre si: uma tangencial e outra normal à trajetória. Essa decomposição é usualmente feita quando conveniente. Decompondo $\vec{F}$, obtemos a configuração a seguir:

Para $\vec{F}_t$ e $\vec{F}_{cp}$ atribuímos as denominações **componente tangencial** e **componente centrípeta** respectivamente.

O termo "centrípeta" advém do fato de a componente $\vec{F}_{cp}$ estar, a cada instante, dirigida para o centro de curvatura da trajetória.

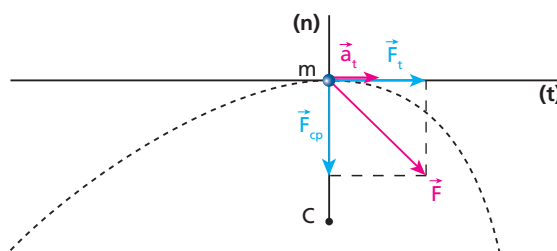
Como as componentes $\vec{F}_t$ e $\vec{F}_{cp}$ são perpendiculares entre si, podemos relacionar suas intensidades com a intensidade de $\vec{F}$, aplicando o **Teorema de Pitágoras**:

$$F^2 = F_t^2 + F_{cp}^2$$

A componente centrípeta da força resultante, por ter a direção do raio de curvatura da trajetória em cada ponto, é também denominada **radial** ou **normal**.

2. A componente tangencial $(\vec{F}_t)$

Intensidade

Na figura seguinte, seja **m** a massa da partícula e $\vec{a}_t$ a aceleração produzida por $\vec{F}_t$:

Aplicando a **2ª Lei de Newton**, podemos escrever que:

$$\vec{F}_t = m\,\vec{a}_t$$

Conforme sabemos, o módulo de $\vec{a}_t$ é igual ao módulo da aceleração escalar **α**:

$$|\vec{a}_t| = |\alpha|$$

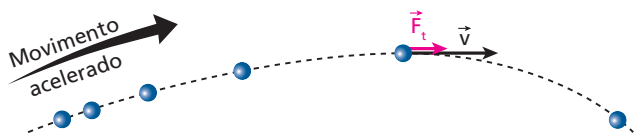
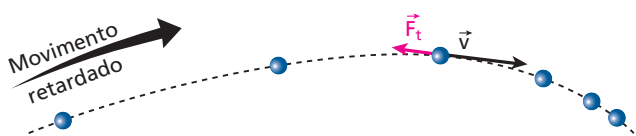
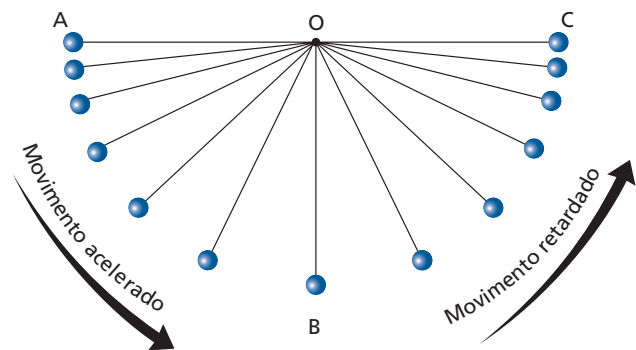
Assim, a intensidade da componente tangencial da força resultante pode ser expressa por:

$$|\vec{F}_t| = m\ |\ \alpha\ |$$

Orientação

A direção de $\vec{F}_t$ é sempre a da **tangente** à trajetória em cada instante. Por isso, é a mesma da velocidade vetorial, que também é tangente à trajetória em cada instante.

O sentido de $\vec{F}_t$, por sua vez, depende do fato de o movimento ser acelerado ou retardado.

No caso de **movimento acelerado**, $\vec{F}_t$ tem o **mesmo sentido** da velocidade vetorial $\vec{v}$. Veja:

No caso de **movimento retardado**, $\vec{F}_t$ tem **sentido contrário** ao da velocidade vetorial $\vec{v}$:

Admitamos, por exemplo, o pêndulo da figura seguinte, cujo fio é fixo no ponto **O**. Supondo desprezível a influência do ar, a esfera pendular, abandonada no ponto **A**, entra em movimento, passa pelo ponto **B**, no qual sua velocidade tem intensidade máxima, e vai parar no ponto **C**.

Entre os pontos **A** e **B**, o movimento é acelerado, o que significa que a componente tangencial da força resultante tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade vetorial.

Já entre os pontos **B** e **C**, o movimento é retardado, o que significa que a componente tangencial da força resultante tem mesma direção, porém, sentido oposto em relação à velocidade vetorial.

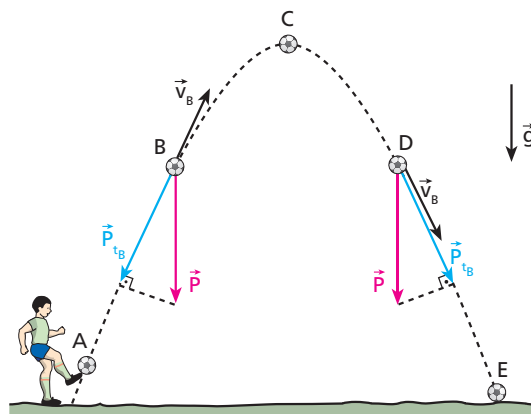
Função

A componente tangencial da força resultante ($\vec{F}_t$) tem por função **variar a intensidade da velocidade vetorial** ($\vec{v}$) da partícula móvel.

Isso se explica com base no fato de $\vec{F}_t$ e $\vec{v}$ terem mesma direção.

Nos movimentos variados (acelerados ou retardados), $\vec{v}$ varia em intensidade e quem provoca essa variação é a componente $\vec{F}_t$, que, nesses casos, é não nula.

Já nos movimentos uniformes, $\vec{v}$ não varia em intensidade, isto é, o valor de $\vec{v}$ é constante, o que implica, nessas situações, que a componente $\vec{F}_t$ é nula.

Consideremos, por exemplo, a figura seguinte, em que aparece um jogador de futebol chutando uma bola, à qual ele imprime uma velocidade inicial oblíqua em relação ao gramado.

Desprezando os efeitos do ar, a bola fica sob a ação exclusiva do campo gravitacional, e, por isso, a força resultante que sobre ela atua ao longo de toda a trajetória parabólica é seu peso $\vec{P}$.

Entre **A** e **C** (ponto mais alto), o movimento é retardado e a intensidade da velocidade vetorial da bola decresce. Quem responde por isso é a componente tangencial de $\vec{P}$, que, na subida da bola, tem sentido oposto ao de $\vec{v}$.

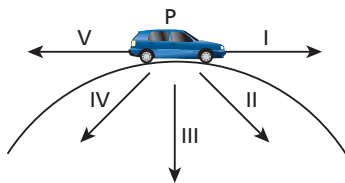
Entre **C** e **E**, o movimento é acelerado e a intensidade da velocidade vetorial da bola cresce. Quem responde por isso é também a componente tangencial de $\vec{P}$, que, na descida da bola, tem o mesmo sentido de $\vec{v}$.

Photo Researchers/Diomedia

Trem-bala: mais veloz que um Fórmula 1?

Os trens-bala utilizados na Europa e no Japão trafegam ao longo das ferrovias com velocidades de até 500 km/h. Na fase de arrancada, que se sucede à partida de uma estação, a força resultante sobre eles deve admitir uma componente tangencial no sentido do movimento, o que provoca a intensificação da velocidade vetorial.

Exercícios nível 1

Considere a situação seguinte, referente aos exercícios de **1** a **5**.
No esquema abaixo aparece, no ponto **P**, um carrinho de massa 2,0 kg, que percorre a trajetória indicada da esquerda para a direita. A aceleração escalar do carrinho é constante e seu módulo vale 0,50 m/s^2.
As setas enumeradas de I a V representam vetores que podem estar relacionados com a situação proposta.

1. A velocidade vetorial do carrinho em **P** é mais bem representada pelo vetor:
a) I b) II c) III d) IV e) V

2. Se o movimento for acelerado, a componente tangencial da força resultante que age no carrinho em **P** será mais bem representada pelo vetor:
a) I v) II c) III d) IV e) V

3. Se o movimento for retardado, a componente tangencial da força resultante que age no carrinho em **P** será mais bem representada pelo vetor:
a) I b) II c) III d) IV e) V

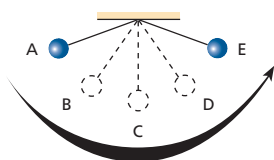
4. A intensidade da componente tangencial da força resultante que age no carrinho em **P** vale:
a) zero b) 2,0 N c) 1,0 N d) 0,50 N e) 0,25 N

5. Analise as proposições seguintes:
I. Ao longo da trajetória, a componente tangencial da força resultante que age no carrinho tem intensidade variável.
II. Ao longo da trajetória, a componente tangencial da força resultante que age no carrinho é constante.
III. Ao longo da trajetória, a velocidade vetorial do carrinho tem intensidade variável.
IV. Quem provoca as variações do módulo da velocidade do carrinho ao longo da trajetória é a componente tangencial da força resultante que age sobre ele.

Responda mediante o código:
a) Todas são corretas.
b) Todas são incorretas.
c) Somente I e II são corretas.
d) Somente III e IV são corretas.
e) Somente II, III e IV são corretas.

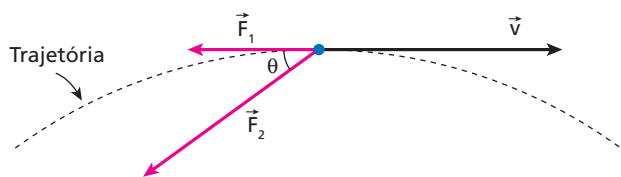
Exercícios nível 2

Considere o enunciado abaixo para os exercícios de **6** a **8**.

Abandona-se um pêndulo no ponto **A**, representado na figura. Este desce livremente e atinge o ponto **E**, após passar pelos pontos **B**, **C** e **D**. O ponto **C** é o mais baixo da trajetória e despreza-se a influência do ar.

6. No ponto **B**, a componente da força resultante que age na esfera pendular, na direção tangencial à trajetória, é mais bem caracterizada pelo vetor:
a)
b)
c)
d)
e) Nenhum dos anteriores.

7. No ponto **C**, a componente da força resultante que age na esfera pendular, na direção tangencial à trajetória, é mais bem caracterizada pelo vetor:
a)
b)
c)
d)
e) Nenhum dos anteriores.

8. No ponto **D**, a componente da força resultante que age na esfera pendular, na direção tangencial à trajetória, é mais bem caracterizada pelo vetor:
a)
b)
c)
d)
e) Nenhum dos anteriores.

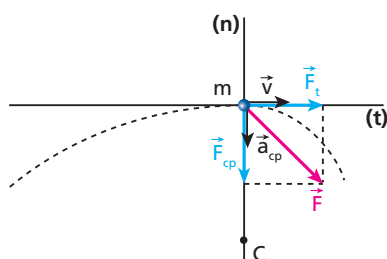
9. Na figura a seguir, está representada uma partícula de massa **m** em determinado instante de seu movimento curvilíneo. Nesse instante, a velocidade vetorial é $\vec{v}$ a aceleração escalar tem módulo α e apenas duas forças agem na partícula: $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

No instante citado, é correto que:

a) o movimento é acelerado e $F_1 = m\,\alpha$.
b) o movimento é retardado e $F_1 = m\,\alpha$.
c) o movimento é acelerado e $F_1 + F_2 \cos\theta = m\,\alpha$.
d) o movimento é retardado e $F_1 + F_2 \cos\theta = m\,\alpha$.
e) o movimento é retardado e $F_1 + F_2 \operatorname{sen}\theta = m\,\alpha$.

Bloco 2

3. A componente centrípeta ($\vec{F}_{cp}$)

Intensidade

Na figura seguinte, representamos uma partícula de massa **m**, vista num instante em que sua velocidade vetorial é $\vec{v}$.

A trajetória descrita por ela é uma curva que, para a posição destacada no esquema, tem raio de curvatura **R**. Seja, ainda, $\vec{a}_{cp}$ a aceleração centrípeta comunicada por $\vec{F}_{cp}$.

Aplicando a **2ª Lei de Newton**, podemos escrever que:

$$\vec{F}_{cp} = m\,\vec{a}_{cp}$$

Conforme vimos em Cinemática Vetorial, o módulo de $\vec{a}_{cp}$ é dado pelo quociente do quadrado do módulo de $\vec{v}$ por **R**, isto é:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Assim, a intensidade da componente centrípeta da força resultante fica determinada por:

$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{mv^2}{R}$$

Para **m** e **v** constantes, $|\vec{F}_{cp}|$ é inversamente proporcional a **R**. Isso significa que quanto mais "fechada" é a curva (menor raio de curvatura), maior é a intensidade da força centrípeta requerida pelo móvel. Reduzindo-se **R** à metade, por exemplo, $|\vec{F}_{cp}|$ dobra.

Para **m** e **R** constantes, $|\vec{F}_{cp}|$ é diretamente proporcional ao quadrado de **v**. Assim, para uma mesma curva (raio constante), quanto maior é a velocidade **v**, maior é a intensidade da força centrípeta requerida pelo móvel. Dobrando-se **v**, por exemplo, $|\vec{F}_{cp}|$ quadruplica.

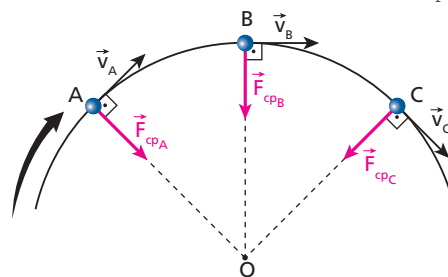
Sendo $\boldsymbol{\omega}$ a velocidade angular, expressemos $|\vec{F}_{cp}|$ em função de **m**, $\boldsymbol{\omega}$ e **R**:

$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{m\,v^2}{R} = \frac{m\,(\omega R)^2}{R} = \frac{m\,\omega^2\,R^2}{R}$$

Logo:

$$|\vec{F}_{cp}| = m\,\omega^2\,R$$

Orientação

Conforme definimos, a componente $\vec{F}_{cp}$ tem, a cada instante, direção normal à trajetória e sentido para o centro de curvatura. Note que $\vec{F}_{cp}$ é perpendicular à velocidade vetorial em cada ponto da trajetória. A figura abaixo ilustra a orientação de $\vec{F}_{cp}$.

Função

A componente centrípeta da força resultante ($\vec{F}_{cp}$) tem por função **variar a direção da velocidade vetorial** ($\vec{v}$) da partícula móvel. Isso se explica pelo fato de $\vec{F}_{cp}$ e $\vec{v}$ serem perpendiculares entre si.

Nos movimentos curvilíneos, $\vec{v}$ varia em direção ao longo da trajetória e quem provoca essa variação é a componente $\vec{F}_{cp}$, que, nesses casos, é não nula.

Já nos movimentos retilíneos, $\vec{v}$ não varia em direção, o que implica, nessas situações, que a componente $\vec{F}_{cp}$ é nula.

Consideremos, por exemplo, a Lua em seu movimento orbital ao redor da Terra.

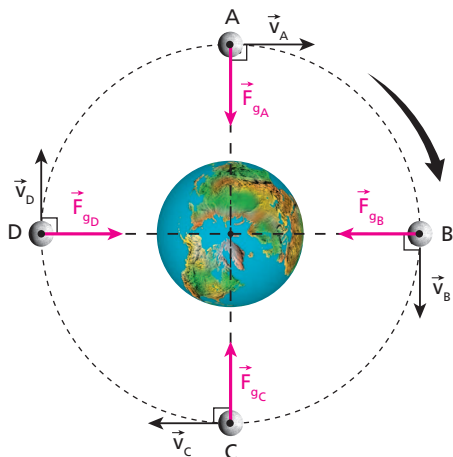
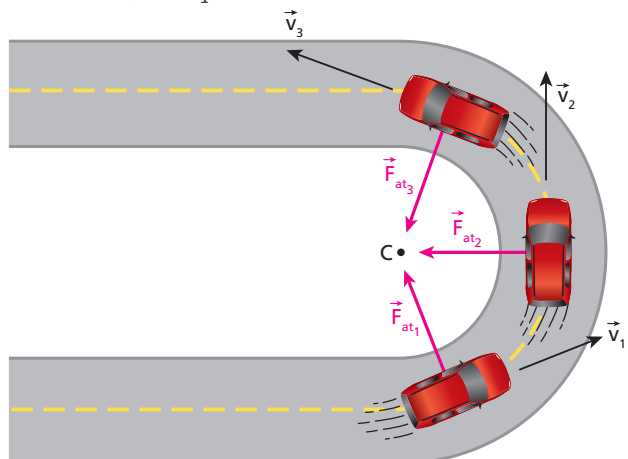



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

Para um referencial inercial ligado ao centro da Terra, a Lua descreve um movimento praticamente circular, em que sua velocidade vetorial varia em direção ao longo da trajetória. Quem, no entanto, provoca essa variação na direção da velocidade vetorial da Lua, mantendo-a em sua órbita? É a força de atração gravitacional ($\vec{F}_g$) exercida pela Terra, que, estando sempre dirigida para o centro da trajetória, desempenha a função de resultante centrípeta no movimento circular.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{cp}$$

Observe outro exemplo interessante: a figura abaixo representa a vista aérea de uma pista plana e horizontal, em que existe uma curva circular.

Um carro, ao percorrer o trecho curvo em movimento uniforme, tem sua velocidade vetorial variando em direção de ponto para ponto. Desprezando a influência do ar, tem-se que a força responsável por esse fato é a força de atrito, que o carro recebe do asfalto por intermédio dos seus pneus. A força de atrito ($\vec{F}_{at}$), estando dirigida em cada instante para o centro da trajetória, é a resultante centrípeta que mantém o carro em movimento circular e uniforme.

$$\vec{F}_{at} = \vec{F}_{cp}$$

O que ocorreria se, a partir de certo ponto da curva, a pista deixasse de oferecer atrito ao carro? Sem a força de atrito (resultante centrípeta), o carro "escaparia pela tangente" à trajetória, já que um corpo, por si só, é incapaz de variar sua velocidade vetorial (Princípio da Inércia).

Queremos, com isso, enfatizar que, **sem força centrípeta, corpo nenhum pode manter-se em trajetória curvilínea**.

Alamy/Diomedia

Na fotografia, aviões soltando fumaça descrevem curvas espetaculares. Isso significa que, em cada ponto dessa trajetória, a resultante das forças externas que agem sobre um dos aviões admite uma componente dirigida para o centro de curvatura. Essa componente é a força centrípeta que provoca as variações de direções da velocidade vetorial.

4. As componentes tangencial e centrípeta nos principais movimentos

Comentaremos, nos movimentos mencionados a seguir, a presença ou não das componentes tangencial e centrípeta da força resultante.

Movimento retilíneo e uniforme

Pelo fato de o movimento ser uniforme:

$$|\vec{v}| = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$$

Pelo fato de o movimento ser retilíneo:

$$\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

A resultante total é nula.

Movimento retilíneo e variado

Pelo fato de o movimento ser variado:

$$|\vec{v}| \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$$

Pelo fato de o movimento ser retilíneo:

$$\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

A resultante total é tangencial

Movimento circular e uniforme

Pelo fato de o movimento ser uniforme:

$$|\vec{v}| = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$$

Pelo fato de o movimento ser circular:

$$\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$$

A resultante total é centrípeta

Movimento curvilíneo e variado

Pelo fato de o movimento ser variado:

$$|\vec{v}| \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$$

Pelo fato de o movimento ser curvilíneo:

$$\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$$

A resultante total admite duas componentes: a tangencial e a centrípeta.

Esqui na neve: habilidade e emoção

Randy Lincks/Age Fotostock/Grupo Keystone

Os dois esquiadores que aparecem nesta fotografia descrevem trajetórias sinuosas ao percorrerem a encosta não muito íngreme de uma montanha. Eles realizam movimentos ora acelerados, ora retardados. Nos trechos de movimento curvilíneo e acelerado, a força resultante admite uma componente centrípeta e uma componente tangencial de sentido igual ao da velocidade, enquanto nos trechos de movimento curvilíneo e retardado a força resultante admite uma componente centrípeta e uma componente tangencial de sentido oposto ao da velocidade.

Leitura

Traçado de curva

No automobilismo, sobretudo na Fórmula 1, os décimos e até os centésimos de segundo são decisivos.

Uma ótima máquina e muita sorte são detalhes que não podem ser dissociados de um campeão, mas apenas isso não basta! É preciso também muito arrojo e técnica ao dirigir. Utilizar um autódromo e usufruir de um carro extraindo de ambos toda a sua potencialidade é privilégio de poucos.

Um dos pontos fundamentais para boa dirigibilidade é o **traçado de curva**, que consiste em fazer uma curva buscando uma trajetória que harmonize velocidade e estabilidade.

Suponhamos que um piloto deva fazer uma curva circular contida em um plano horizontal como a que esquematizamos na figura ao lado. Admitamos que o movimento seja uniforme.

Recomenda-se, então, o traçado em que o carro tangencie as zebras **A**, **B** e **C**, isto é, aquele que tem o **maior raio possível**.

O motivo dessa recomendação é fundamentado no fato de que para uma mesma massa (**m**) e uma mesma velocidade ($\vec{v}$), a intensidade da resultante centrípeta ($\vec{F}_{cp}$) é inversamente proporcional ao raio (**R**):

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{R}$$

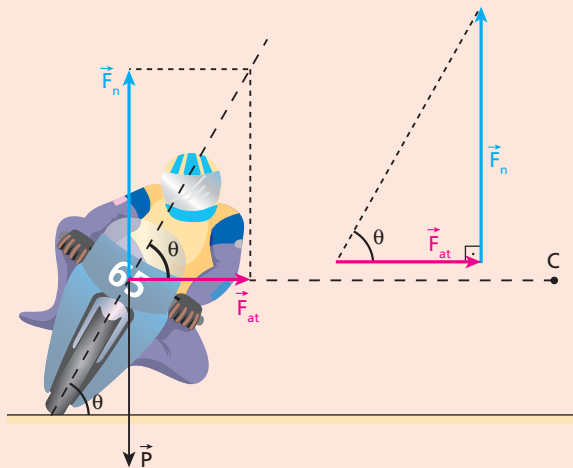
Quanto maior for o raio da trajetória, menor será a intensidade da resultante centrípeta exigida pelo carro e, consequentemente, menor será a solicitação dos pneus e da estrutura do veículo. Dessa forma, o piloto poderá percorrer a curva em maior velocidade e com maior estabilidade.

Motos inclinadas

Em corridas de motocicletas, é comum observarmos os pilotos tombando suas máquinas nas curvas na tentativa de percorrê-las com a maior velocidade possível. Isso é realmente necessário? Sim! Veja a explicação a seguir.

Thinkstock/Getty Images

Vamos considerar um conjunto moto-piloto de massa **m** percorrendo uma curva circular de raio **R**, contida em um plano horizontal, em movimento uniforme, com velocidade de intensidade **v**. Sejam **θ** a inclinação do eixo do corpo do piloto em relação à pista e **g** o módulo da aceleração da gravidade no local.

No esquema abaixo, estão representadas, em dado ponto da curva, a força da gravidade (peso) $\vec{P}$, a reação normal do solo $\vec{F}_n$ e a força de atrito $\vec{F}_{at}$, que impede a derrapagem da moto:

Observando que $\vec{F}_n$ equilibra $\vec{P}$ e que $\vec{F}_{at}$ desempenha o papel de resultante centrípeta, calculemos **v** em função de **g**, **R** e **θ**.

$$\text{tg}\,\theta = \frac{F_n}{F_{at}} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{mg}{\frac{mv^2}{R}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{gR}{v^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{gR}{\text{tg}\theta}}}$$

Note que, quanto maior for **v**, menor deverá ser **tg** θ, o que obriga o piloto a tombar a moto a ponto de, em alguns casos, esfregar um dos joelhos na pista.

Destacamos que, para pequenas tg θ, devemos ter pequenos ângulos **θ**.

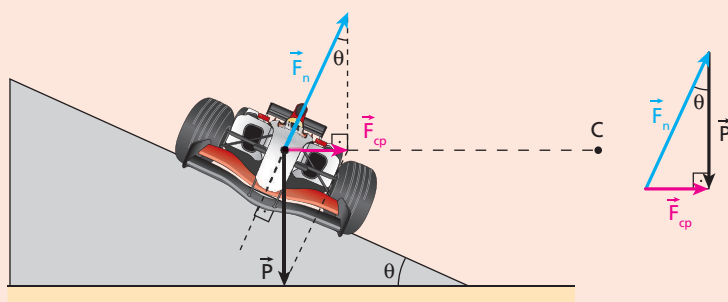
TF1-207_229_5P_P2T3.indd 213 16/08/12 17:29

Curva circular em pista sobrelevada sem atrito

Reuters/Latinstock

Algumas modalidades de corrida são realizadas em pistas circulares ou ovais dotadas de **sobrelevação** (inclinação do piso em relação ao plano horizontal), que contribui para reduzir a necessidade de atrito entre os pneus do veículo e o solo.

Consideremos um carro de massa **m** percorrendo uma curva circular de raio **R**, sobrelevada de um ângulo **θ** em relação ao plano horizontal. Suponhamos que a aceleração da gravidade tenha módulo **g** e que o movimento seja uniforme, com velocidade de intensidade **v**.

Admitindo uma situação teórica em que não há atritos nem influência do ar, apenas duas forças agirão no carro: a força da gravidade (peso) $\vec{P}$ e a reação normal da pista $\vec{F}_n$ conforme está esquematizado a seguir.

Nesse caso, para que o veículo se mantenha em trajetória circular, a resultante entre $\vec{P}$ e $\vec{F}_n$ deverá ser centrípeta, e a velocidade **v** em função de **g**, **R** e **θ** ficará determinada por:

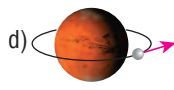
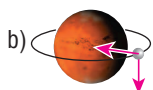
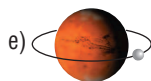
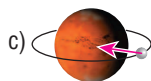
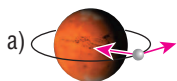
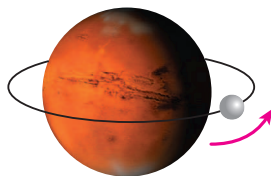
$$\text{tg}\,\theta = \frac{F_{cp}}{P} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{m\,v^2}{R\,m\,g}$$

Assim: $\boxed{v = \sqrt{g\,R\,\text{tg}\,\theta}}$

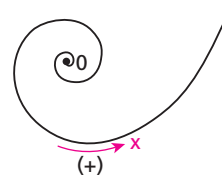
Destacamos ainda que, para **g** e **R** constantes, quanto maior for **θ**, maiores serão tg θ e **v**.

Exercícios

nível 1

10. (Cesgranrio-RJ) Uma nave Mariner permanece alguns meses em órbita circular em torno de Marte. Durante essa fase, as forças que agem sobre a nave são, em um referencial inercial ligado ao centro do planeta:

11. Um avião de massa 4,0 toneladas descreve uma curva circular de raio R = 200 m com velocidade escalar constante igual a 216 km/h. Qual a intensidade da resultante das forças que agem na aeronave?

12. Considere um carro de massa $1{,}0 \cdot 10^3$ kg percorrendo, com velocidade escalar constante, uma curva circular de 125 m de raio, contida em um plano horizontal. Sabendo que a força de atrito responsável pela manutenção do carro na curva tem intensidade 5,0 kN, determine o valor da velocidade do carro. Responda em km/h.

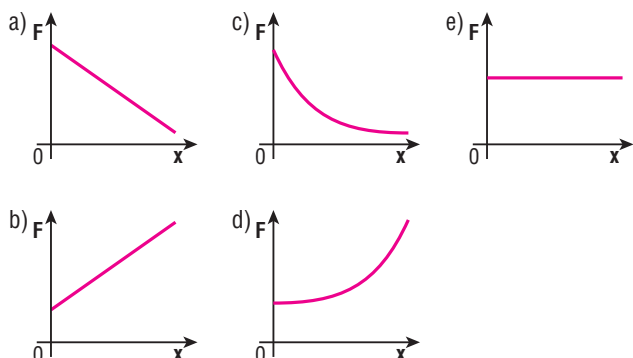
13. Considere uma partícula de massa **m** percorrendo a trajetória espiralada esboçada na figura, com velocidade escalar constante, no sentido anti-horário a partir da origem **O**.

Admita que o raio de curvatura da trajetória cresça uniformemente com a coordenada de posição **x**. Sendo **F** a intensidade da resultante das forças que agem na partícula, qual dos gráficos a seguir melhor traduz **F** ***versus*** **x**?

a)

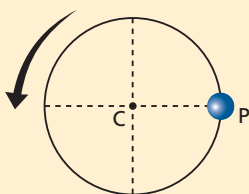
c)

e)

b)

d)

14. E.R. A figura representa uma partícula em movimento circular no instante em que ela passa por um ponto **P** de sua trajetória. Sabendo que o movimento acontece no sentido anti-horário, reproduza a figura, desenhando o vetor que representa a força resultante sobre a partícula nos seguintes casos:

a) quando o movimento é acelerado;

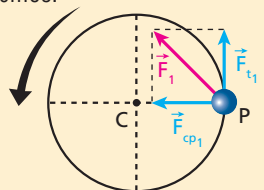
b) quando o movimento é retardado.

Resolução:

a) No caso de o movimento ser acelerado, a força resultante deve admitir uma componente tangencial ($\vec{F}_{t_1}$) de mesmo sentido que o movimento.

Pelo fato de o movimento ser circular, a força resultante deve admitir uma componente centrípeta ($\vec{F}_{cp_1}$).

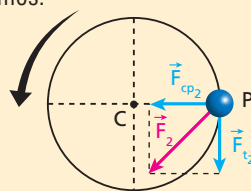
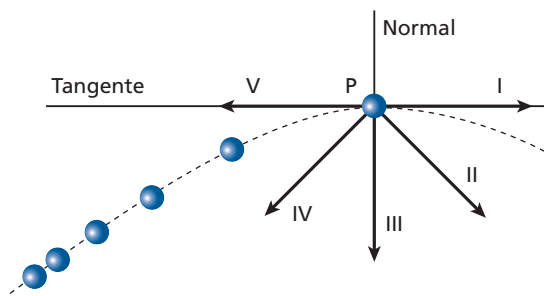
A resultante total, nesse caso, é $\vec{F}_1$, dada por:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{t_1} + \vec{F}_{cp_1}$$

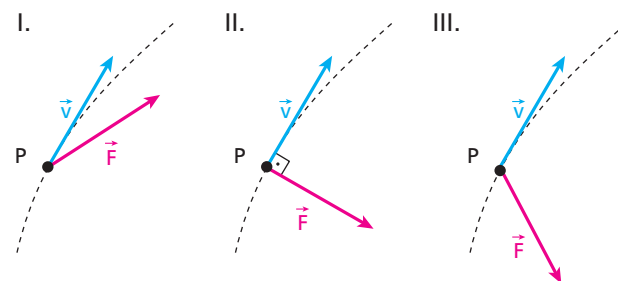
Graficamente, temos:

b) No caso de o movimento ser retardado, a força resultante deve admitir uma componente tangencial ($\vec{F}_{t_2}$) de sentido contrário ao do movimento.

Pelo fato de o movimento ser circular, a força resultante deve admitir uma componente centrípeta ($\vec{F}_{cp_2}$).

A resultante total, nesse caso, é $\vec{F}_2$, dada por: $\vec{F}_2 = \vec{F}_{t_2} + \vec{F}_{cp_2}$

Graficamente, temos:

15. A figura abaixo mostra a fotografia estroboscópica do movimento de uma partícula:

A resultante das forças que atuam na partícula no ponto **P** é mais bem representada pelo vetor:

a) I b) II c) III d) IV e) V

16. Uma partícula percorre certa trajetória curva e plana, como a representada nos esquemas a seguir. Em **P**, a força resultante que age sobre ela é $\vec{F}$ e sua velocidade vetorial é $\vec{v}$:

Nos casos I, II e III, a partícula está dotada de um dos três movimentos citados abaixo:

A — movimento uniforme;

B — movimento acelerado;

C — movimento retardado.

A alternativa que traz as associações corretas é:

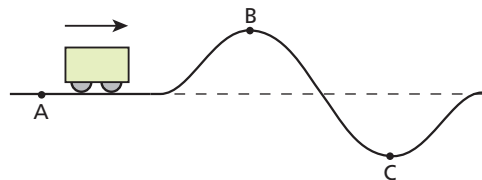
a) I – A; II – B; III – C.

b) I – C; II – B; III – A.

c) I – B; II – A; III – C.

d) I – B; II – C; III – A.

e) I – A; II – C; III – B.

17. Um carrinho, apenas apoiado sobre um trilho, desloca-se para a direita com velocidade escalar constante, conforme representa a figura abaixo. O trilho pertence a um plano vertical e o trecho que contém o ponto **A** é horizontal. Os raios de curvatura nos pontos **B** e **C** são iguais.

Sendo F_A, F_B e F_C, respectivamente, as intensidades das forças de reação normal do trilho sobre o carrinho nos pontos **A**, **B** e **C**, podemos concluir que:

a) $F_A = F_B = F_C$

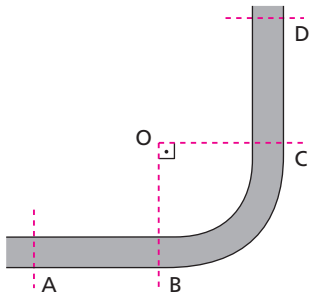
b) $F_C > F_A > F_B$

c) $F_B > F_A > F_C$

d) $F_A > F_B > F_C$

e) $F_C > F_B > F_A$

Exercícios nível 2

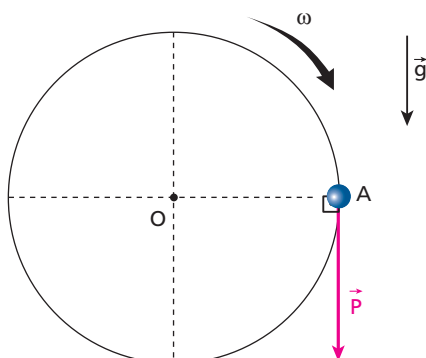
18. Uma pista é constituída por três trechos: dois retilíneos, **AB** e **CD**, e um circular, **BC**, conforme representa a vista aérea abaixo.

Admita que um carro de massa **m** percorra a pista com velocidade de intensidade constante igual a **v**. Sendo **R** o raio do trecho **BC**, analise as proposições a seguir:

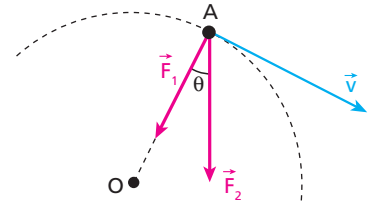
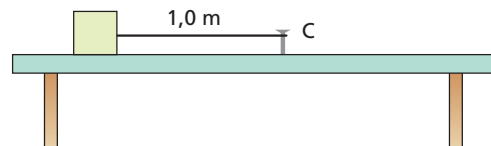
(01) No trecho **AB**, a força resultante sobre o carro é nula.
(02) No trecho **CD**, a força resultante sobre o carro é não nula.
(04) Em qualquer ponto do trecho **BC**, a força resultante sobre o carro é dirigida para o ponto **O** e sua intensidade é dada por $\frac{m\,v^2}{R}$.
(08) No trecho **BC**, a força resultante sobre o carro é constante.
(16) De **A** para **D**, a variação da velocidade vetorial do carro tem intensidade $v\sqrt{2}$.

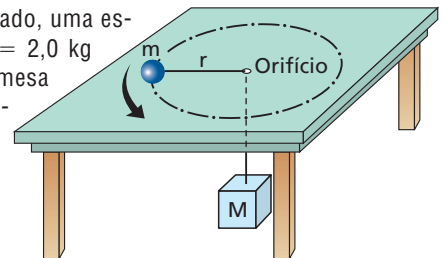
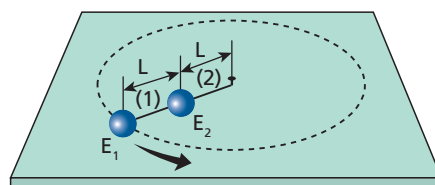
Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

19. Considere uma partícula de massa **M** descrevendo movimento circular e uniforme com velocidade de intensidade **v**. Se o período do movimento é igual a **T**, a intensidade da força resultante na partícula é:

a) $\frac{M\,v}{T}$
b) $\frac{2M\,v}{T}$
c) $\frac{2\pi M\,v}{T}$
d) $\frac{\pi M\,v}{T}$
e) $\frac{2\pi\,v}{T}$

20. Um ponto material de massa 4,0 kg realiza movimento circular e uniforme ao longo de uma trajetória contida em um plano vertical de 7,5 m de raio. Sua velocidade angular é $\omega = 1{,}0$ rad/s e, no local, $|\vec{g}| = 10$ m/s². No ponto **A** indicado na figura, além da força da gravidade $\vec{P}$, age no ponto material somente uma outra força, $\vec{F}$. Caracterize $\vec{F}$, calculando sua intensidade e indicando graficamente sua orientação.

21. A partícula indicada na figura descreve uma trajetória circular de raio **R** e centro **O**. Ao passar pelo ponto **A**, verifica-se que sobre ela agem apenas duas forças: $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.
Sendo **m** a massa da partícula e $\vec{v}$ a sua velocidade vetorial em **A**, é correto que:

a) $F_1 = \frac{m\,v^2}{R}$
b) $F_2 = \frac{m\,v^2}{R}$
c) $F_1 + F_2 = \frac{m\,v^2}{R}$
d) $F_1 + F_2 \cos\theta = \frac{m\,v^2}{R}$
e) $F_1 + F_2 \cos\theta + F' = \frac{m\,v^2}{R}$, em que F' é a força centrífuga.

22. Um bloco de massa 4,0 kg descreve movimento circular e uniforme sobre uma mesa horizontal perfeitamente polida. Um fio ideal, de 1,0 m de comprimento, prende-o a um prego **C**, conforme ilustra o esquema:

Se a força de tração no fio tem intensidade $1{,}0 \cdot 10^2$ N, qual a velocidade angular do bloco, em rad/s?

23. Na figura ao lado, uma esfera de massa m = 2,0 kg descreve sobre a mesa plana, lisa e horizontal um movimento circular. A esfera está ligada por um fio ideal a um bloco de massa M = 10 kg, que permanece em repouso quando a velocidade da esfera é v = 10 m/s. Sendo g = 10 m/s², calcule o raio da trajetória da esfera, observando a condição de o bloco permanecer em repouso.

24. A figura representa duas esferas iguais, E_1 e E_2, que, ligadas a fios inextensíveis e de massas desprezíveis, descrevem movimento circular e uniforme sobre uma mesa horizontal perfeitamente lisa:

Desprezando o efeito do ar e supondo que E_1 e E_2 se mantenham sempre alinhadas com o centro, aponte a alternativa que traz o valor correto da relação T_1/T_2, respectivamente, das forças de tração nos fios (1) e (2):

a) 2
b) $\frac{3}{2}$
c) 1
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{2}$

25. E.R. Um carro percorre uma pista circular de raio **R**, contida em um plano horizontal. O coeficiente de atrito estático entre seus pneus e o asfalto vale **μ** e, no local, a aceleração da gravidade tem módulo **g**. Despreze a influência do ar.

a) Com que velocidade linear máxima o carro deve deslocar-se ao longo da pista, com a condição de não derrapar?

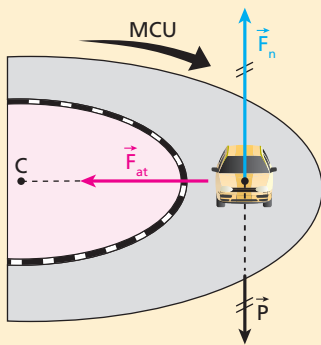
b) A velocidade calculada no item anterior depende da massa do carro?

Resolução:

a) Na figura, estão representadas as forças que agem no carro.

A reação normal da pista ($\vec{F}_n$) equilibra o peso do carro ($\vec{P}$):

$F_n = P \Rightarrow F_n = m\,g$ (I)

Já a força de atrito ($\vec{F}_{at}$) é a resultante centrípeta que mantém o carro em movimento circular e uniforme (MCU):

$$F_{at} = F_{cp} \Rightarrow F_{at} = \frac{m\,v^2}{R} \quad \text{(II)}$$

Como não há derrapagem, o atrito entre os pneus do carro e o solo é do tipo estático.

Assim:

$$F_{at} \leq F_{at_d} \Rightarrow F_{at} \leq \mu\,F_n \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), vem:

$$\frac{m\,v^2}{R} \leq \mu\,m\,g \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu\,g\,R}$$

Logo: $$\boxed{v_{máx} = \sqrt{\mu\,g\,R}}$$

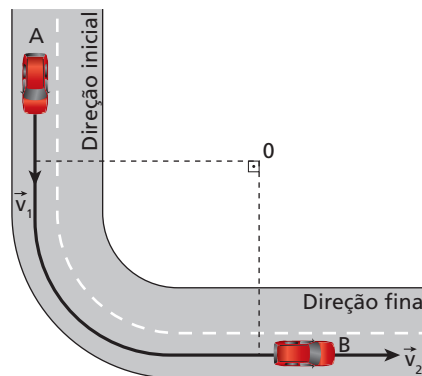
b) A velocidade calculada **independe** da massa do carro.

26. (Unesp-SP) Numa calçada de uma rua plana e horizontal, um patinador vira em uma esquina, descrevendo um arco de circunferência de 3,0 m de raio. Admitindo-se $g = 10\ m/s^2$ e sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre as rodas do patim e a calçada é $\mu_e = 0{,}30$, a máxima velocidade com que o patinador pode realizar a manobra sem derrapar é de:

a) 1,0 m/s.
b) 2,0 m/s.
c) 3,0 m/s.
d) 5,0 m/s.
e) 9,0 m/s.

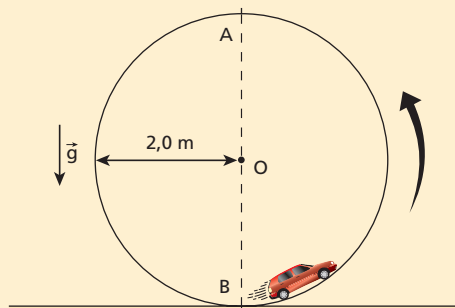
27. Um carro deverá fazer uma curva circular, contida em um plano horizontal, com velocidade de intensidade constante igual a 108 km/h. Se o raio da curva é $R = 300$ m e $g = 10\ m/s^2$, o coeficiente de atrito estático entre os pneus do carro e a pista (μ) que permite que o veículo faça a curva sem derrapar:

a) é $\mu \geq 0{,}35$.
b) é $\mu \geq 0{,}30$.
c) é $\mu \geq 0{,}25$.
d) é $\mu \geq 0{,}20$.
e) está indeterminado, pois não foi dada a massa do carro.

28. Um estudante, indo para a faculdade em seu carro, desloca-se num plano horizontal, no qual descreve uma trajetória curvilínea de 48 m de raio, com uma velocidade constante em módulo. Entre os pneus e a pista, o coeficiente de atrito estático é de 0,30.

Considerando-se a figura, a aceleração da gravidade no local, com módulo de 10 m/s², e a massa do carro de 1,2 t, faça o que se pede:

a) Caso o estudante resolva imprimir uma velocidade de módulo 60 km/h ao carro, ele conseguirá fazer a curva? Justifique.

b) A velocidade escalar máxima possível, para que o carro possa fazer a curva, sem derrapar, irá se alterar se diminuirmos sua massa? Explique.

29. E.R. Na figura seguinte, um carrinho de massa 1,0 kg descreve movimento circular e uniforme ao longo de um trilho envergado em forma de circunferência de 2,0 m de raio:

A velocidade escalar do carrinho vale 8,0 m/s, sua trajetória pertence a um plano vertical e adota-se $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$. Supondo que os pontos **A** e **B** sejam, respectivamente, o mais alto e o mais baixo do trilho, determine a intensidade da força que o trilho exerce no carrinho:

a) no ponto **A**;
b) no ponto **B**.

Resolução:

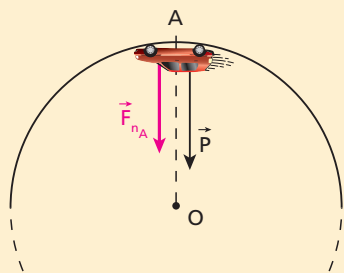
Como o carrinho executa movimento circular e uniforme, em cada ponto da trajetória a resultante das forças que nele agem deve ser centrípeta. Calculemos a intensidade constante dessa resultante:

$$F_{cp} = \frac{m\,v^2}{R}$$

$$F_{cp} = \frac{1{,}0\,(8{,}0)^2}{2{,}0}\ \text{(N)} \Rightarrow F_{cp} = 32\ \text{N}$$

O peso do carrinho vale:

$$P = m\,g = 1{,}0 \cdot 10\ \text{(N)} \Rightarrow P = 10\ \text{N}$$

a) No ponto **A**, o esquema das forças que agem no carrinho está dado abaixo:

$\vec{F}_{n_A}$ = força que o trilho exerce no carrinho em **A**.

A resultante de $\vec{F}_{n_A}$ e $\vec{P}$ deve ser centrípeta, isto é:

$$\vec{F}_{cp_A} = \vec{F}_{n_A} + \vec{P}$$

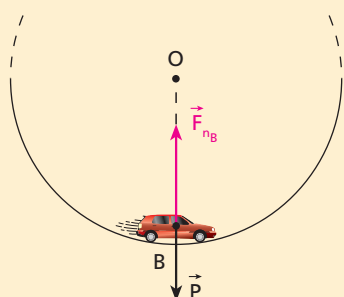
Em módulo:

$$F_{cp_A} = F_{n_A} + P$$

Calculemos F_{n_A}:

$$F_{n_A} = F_{cp_A} - P \Rightarrow F_{n_A} = (32 - 10)\ N$$

$$\boxed{F_{n_A} = 22\ N}$$

b) No ponto **B**, o esquema das forças que agem no carrinho está dado a seguir:

$\vec{F}_{n_B}$ = força que o trilho exerce no carrinho em **B**.

A resultante de $\vec{F}_{n_B}$ e $\vec{P}$ deve ser centrípeta, isto é:

$$\vec{F}_{cp_B} = \vec{F}_{n_B} + \vec{P}$$

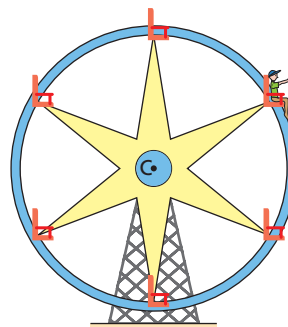
Em módulo:

$$F_{cp_B} = F_{n_B} - P$$

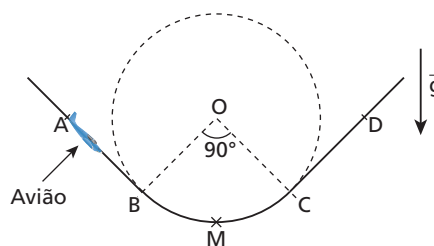
Calculemos F_{n_B}:

$$F_{n_B} = F_{cp_B} + P \Rightarrow F_{n_B} = (32 + 10)\ N$$

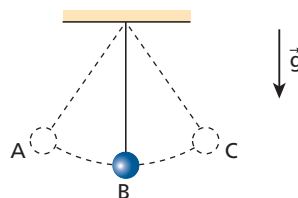
$$\boxed{F_{n_B} = 42\ N}$$

30. (UFRJ) A figura representa uma roda-gigante que gira com velocidade angular constante em torno de um eixo horizontal fixo que passa por seu centro **C**.

Numa das cadeiras, há um passageiro sentado sobre uma balança de mola (dinamômetro), cuja indicação varia de acordo com a posição do passageiro. No ponto mais alto da trajetória, o dinamômetro indica 234 N e, no ponto mais baixo, indica 954 N. Calcule:

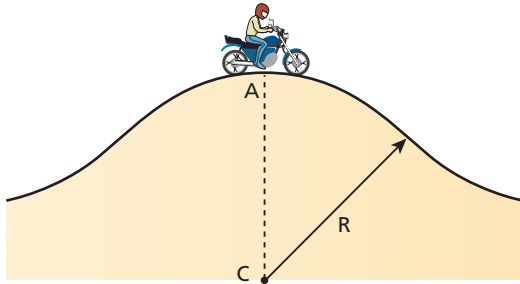
a) o peso da pessoa;
b) a intensidade da força resultante na pessoa.

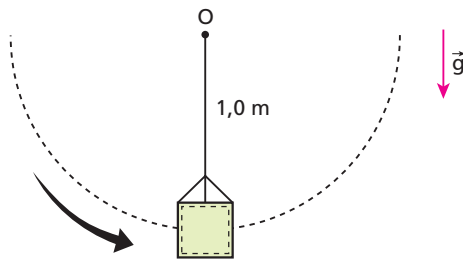
31. (Unicamp-SP) A figura adiante descreve a trajetória ABMCD de um avião em um voo em um plano vertical. Os trechos AB e CD são retilíneos. O trecho BMC é um arco de 90° de uma circunferência de 2,5 km de raio. O avião mantém velocidade de módulo constante igual a 900 km/h. O piloto tem massa de 80 kg e está sentado sobre uma balança (de mola) neste voo experimental.

Adotando-se $g = 10\ m/s^2$ e $\pi \cong 3$, pergunta-se:

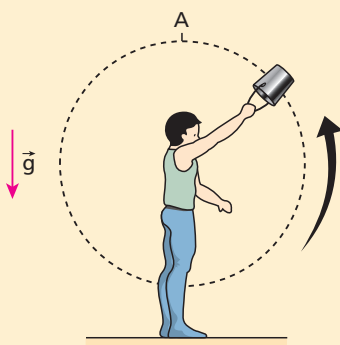
a) Quanto tempo o avião leva para percorrer o arco BMC?
b) Qual a marcação da balança no ponto **M** (ponto mais baixo da trajetória)?

32. O pêndulo da figura oscila em condições ideais, invertendo sucessivamente o sentido do seu movimento nos pontos **A** e **C**:

A esfera tem massa 1,0 kg e o comprimento do fio, leve e inextensível, vale 2,0 m. Sabendo que no ponto **B** (mais baixo da trajetória) a esfera tem velocidade de módulo 2,0 m/s e que $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$, determine:

a) a intensidade da força resultante sobre a esfera quando ela passa pelo ponto **B**;
b) a intensidade da força que traciona o fio quando a esfera passa pelo ponto **B**.

33. Uma moto percorre um morro, conforme ilustra a figura a seguir. Visto em corte, esse morro pode ser comparado a um arco de circunferência de raio **R**, contido em um plano vertical. Observe:

Ao passar no ponto **A**, o mais alto do morro, a moto recebe da pista uma força de reação normal 25% menor que aquela que receberia se estivesse em repouso nesse ponto. Se no local a aceleração da gravidade vale **g**, qual será o módulo da velocidade da moto no ponto **A**?

34. A figura a seguir representa uma lata de paredes internas lisas, dentro da qual se encaixa perfeitamente um bloco de concreto, cuja massa vale 2,0 kg. A lata está presa a um fio ideal, fixo em **O** e de 1,0 m de comprimento. O conjunto realiza *loopings* circulares num plano vertical:

A lata passa pelo ponto mais alto dos *loopings* com velocidade de 5,0 m/s e adota-se, no local, $|\vec{g}| = 10$ m/s^2. Desprezando as dimensões da lata e do bloco, determine a intensidade da força vertical que o bloco troca com o fundo da lata no ponto mais alto dos *loopings*.

35. E.R. No esquema abaixo, um homem faz com que um balde cheio de água, dotado de uma alça fixa em relação ao recipiente, realize uma volta circular de raio **R** num plano vertical.

Sabendo que o módulo da aceleração da gravidade vale **g**, responda: qual a mínima velocidade linear do balde no ponto **A** (mais alto da trajetória) para que a água não caia?

Resolução:

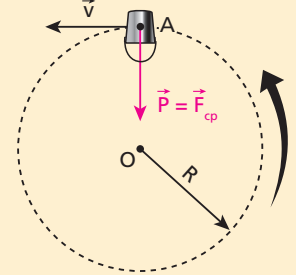
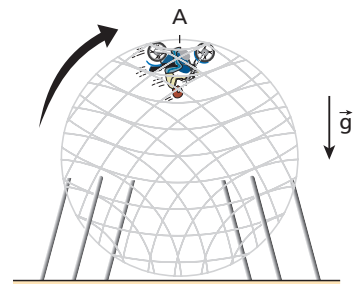
Ao passar em **A** com a mínima velocidade admissível, a água não troca forças verticais com o balde. Assim, a única força vertical que nela age é a da gravidade, que desempenha o papel de resultante centrípeta:

Ponto **A**: $P = F_{cp}$

$$m\,g = \frac{m v_{mín}^2}{R}$$

Assim: $\boxed{v_{mín} = \sqrt{g\,R}}$

Nota:

- $v_{mín}$ independe da massa de água.

36. A ilustração ao lado representa um globo da morte, dentro do qual um motociclista realiza evoluções circulares contidas em um plano vertical. O raio da circunferência descrita pelo conjunto moto-piloto é igual ao do globo e vale **R**.

O ponto **A** é o mais alto da trajetória e por lá o conjunto moto-piloto, que tem massa **M**, passa com a mínima velocidade admissível para não perder o contato com a superfície esférica. Supondo que a aceleração da gravidade tenha módulo **g**, analise as proposições a seguir:

(01) No ponto **A**, a força vertical trocada pelo conjunto moto-piloto e o globo é nula.

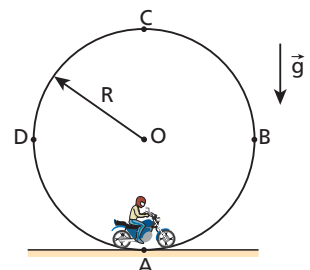
(02) No ponto **A**, a força resultante no conjunto moto-piloto tem intensidade M g.

(04) No ponto **A**, o peso do conjunto moto-piloto desempenha a função de resultante centrípeta.

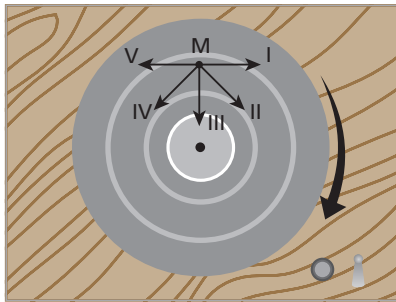
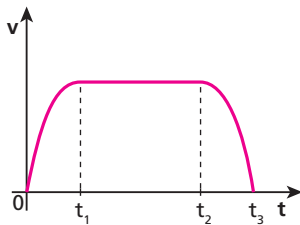
(08) No ponto **A**, a velocidade do conjunto moto-piloto tem módulo $\sqrt{g\,R}$.

(16) Se a massa do conjunto moto-piloto fosse 2M, sua velocidade no ponto **A** teria módulo $\sqrt{2\,g\,R}$.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

37. (Unicamp-SP) Uma atração muito popular nos circos é o "Globo da Morte", que consiste em uma gaiola de forma esférica no interior da qual se movimenta uma pessoa pilotando uma motocicleta. Considere um globo de raio R = 3,6 m.

a) Reproduza a figura, fazendo um diagrama das forças que atuam sobre a motocicleta nos pontos **A**, **B**, **C** e **D** sem incluir as forças de atrito. Para efeitos práticos, considere o conjunto piloto + motocicleta como sendo um ponto material.

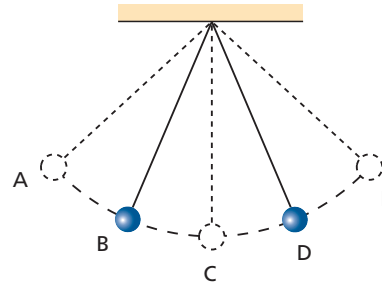
b) Qual a velocidade mínima que a motocicleta deve ter no ponto **C** para não perder o contato com o interior do globo? Adote $|\vec{g}| = 10$ m/s^2.

Na figura abaixo, vemos, de cima, um antigo toca-discos apoiado sobre uma mesa horizontal. Sobre o prato do aparelho, que em operação gira no sentido horário, foi colocada uma pequena moeda **M**, que não escorrega em relação à superfície de apoio.

O toca-discos é ligado e, depois de funcionar normalmente durante certo intervalo de tempo, é desligado. O gráfico a seguir mostra a variação da intensidade **v** da velocidade tangencial de **M** em função do tempo **t**.

Com base neste enunciado, responda às questões 38, 39 e 40.

38. Qual das setas numeradas de I a V melhor representa a força resultante em **M** num instante do intervalo de 0 a t_1?
a) I b) II c) III d) IV e) V

39. Qual das setas numeradas de I a V melhor representa a força resultante em **M** num instante do intervalo de t_1 a t_2?
a) I b) II c) III d) IV e) V

40. Qual das setas numeradas de I a V melhor representa a força resultante em **M** num instante do intervalo de t_2 a t_3?
a) I b) II c) III d) IV e) V

41. Na figura, está representado um pêndulo em oscilação num plano vertical. O fio é inextensível e de massa desprezível e o ar não influencia significativamente o movimento do sistema. Na posição **C**, o fio apresenta-se na vertical. Nas posições **A** e **E**, ocorre inversão no sentido do movimento.

Reproduza o esquema do pêndulo desenhando nas posições **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, respectivamente, cinco setas representativas das forças resultantes $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$, $\vec{F}_D$ e $\vec{F}_E$ na esfera pendular.

42. Uma partícula de massa 3,0 kg parte do repouso no instante $t_0 = 0$, adquirindo movimento circular uniformemente acelerado. Sua aceleração escalar é de 4,0 m/s^2 e o raio da circunferência suporte do movimento vale 3,0 m. Para o instante $t_1 = 1,0$ s, calcule a intensidade da força resultante sobre a partícula.

Descubra mais

1. As plantas “percebem” a gravidade da Terra. O crescimento de suas raízes e de seus caules é significativamente influenciado pelo campo gravitacional do planeta, o que caracteriza um tipo de **geotropismo**. Um pé de milho, por exemplo, plantado no solo, desenvolve-se de modo que seu caule se mantenha praticamente vertical durante todo o processo, na direção do vetor $\vec{g}$ do local. Suponha que um pé de milho seja plantado em um vaso fixo à borda de um carrossel que gira, o qual tem eixo vertical. Admita que esse carrossel tenha funcionamento ininterrupto por tempo indeterminado. Considerando-se apenas os efeitos ligados ao geotropismo, em que direção crescerá o caule dessa planta? Pesquise.

2. No dia 30 de março de 2006 o primeiro astronauta brasileiro, Marcos César Pontes, foi lançado ao espaço a bordo da nave russa *Soyuz TMA-8*. Sua missão foi permanecer cerca de oito dias na Estação Espacial Internacional (EEI) e realizar alguns experimentos científicos. Durante sua estada na EEI, Pontes observou a germinação de grãos de feijão em ambiente de microgravidade. Houve alguma direção preferencial em que essas sementes lançaram suas raízes?

3. A Terra fotografada do espaço assemelha-se a uma esfera perfeita. No entanto, estudos elaborados pelo matemático e astrônomo alemão Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), aliados a avaliações mais recentes, dão conta de que a Terra tem forma de **geoide**, que corresponde aproximadamente à de um elipsoide de revolução. De maneira mais simples, costuma-se dizer que a Terra é ligeiramente “achatada nos polos e dilatada no equador”. A que se deve essa forma geodésica do planeta? Pesquise.

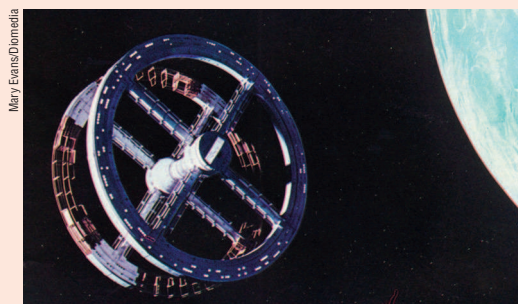
Leitura

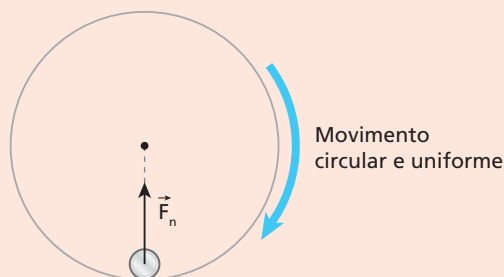
Uma questão de peso

A possibilidade de visitar outros planetas e galáxias sempre fascinou o imaginário humano, promovendo viagens mentais aos mais diferentes rincões do Universo. Mas até que ponto esse sonho pode se tornar realidade?

Considerando-se a tecnologia de que dispomos, há muitos embaraços que dificultariam viagens espaciais. Um deles é a questão da gravidade a que nosso organismo está condicionado. O coração humano, bem como o sistema circulatório, muscular e ósseo, é dimensionado para operar sob uma gravidade da ordem de 10 m/s^2 e, no espaço, longe de qualquer influência gravitacional, ficaria exposto a situações de falta de gravidade, o que provocaria um verdadeiro colapso, sobretudo se pensarmos nas longas durações das viagens espaciais. Teríamos atrofia muscular, degeneração óssea, além de muitos outros problemas.

Os filmes de ficção científica raramente abordam a questão da ausência de gravidade de maneira satisfatória. Os personagens deslocam-se dentro de espaçonaves como se estivessem caminhando confortavelmente sobre a superfície terrestre. E de onde vem a gravidade que os mantém saudáveis praticando todas as ações da mesma forma que em nosso planeta? Isso quase nunca é revelado ao espectador. Há, porém, exceções, como em *2001 – Uma Odisseia no Espaço* (Estados Unidos, 1968, Stanley Kubrick e Arthur Clarke), em que uma estação espacial, parecida com uma roda de carroça, gira em torno do seu eixo, produzindo uma gravidade artificial confortável para astronautas em contato com pisos e paredes internas.

Mary Evans/Diomedia

Estação espacial de *2001 – Uma Odisseia no Espaço*: rotação uniforme para produzir gravidade artificial.

Consideremos uma espaçonave cilíndrica de diâmetro interno igual a 125 m. Admitindo-se $\pi \cong 3$ e desprezando-se as forças de Coriolis inerentes a essa situação, com que frequência esse cilindro deveria rotar de maneira uniforme em torno do seu eixo para que o corpo de dimensões desprezíveis e massa **m** "percebesse" uma gravidade artificial de mesma intensidade que a terra, isto é, 10 m/s^2?

A força normal $\vec{F}_n$ exercida radialmente pela parede desempenha a função de resultante centrípeta no movimento circular e uniforme do corpo. Essa força surge como reação à força de compressão que o corpo exerce contra a parede do cilindro. É o "efeito centrífugo", que tende a projetar o corpo contra a superfície interna do rotor, de modo que ele fique o mais distante possível do eixo de rotação.

Observando-se que a intensidade de $\vec{F}_n$ deve ser igual à do peso do corpo na Terra, vem:

$$F_n = F_{cp} \Rightarrow m\,g = m\,\omega^2 R \Rightarrow g = (2\pi f)^2\,R$$

Da qual:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Substituindo-se os valores numéricos, vem:

$$f = \frac{1}{2 \cdot 3}\sqrt{\frac{10}{\frac{125}{2}}}\ \frac{\text{rotações}}{\text{s}}$$

$$f = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4}{25}}\ \frac{\text{rotações}}{\frac{1}{60}\text{min}}$$

Da qual:

$$\boxed{f = 4\,\frac{\text{rotações}}{\text{min}}}$$

Salientemos que esse resultado independe da massa do corpo.

Do ponto de vista prático, porém, uma situação como essa traria muitos inconvenientes. Imaginando-se que a espaçonave fosse dotada de alguns andares internos, também cilíndricos e com eixo coincidente com o do cilindro externo, em cada "nível" seria percebida uma gravidade diferente, chegando-se a uma gravidade praticamente nula nas vizinhanças do eixo de rotação. No caso de uma espaçonave de pequenas dimensões, um astronauta sentiria uma determinada gravidade na região dos pés e outra menos intensa, na região da cabeça. Além disso, se fosse jogada uma partícula dentro da espaçonave, esta descreveria

uma trajetória bastante diferente daquela verificada na Terra em iguais condições de lançamento. O que ocorreria com o astronauta se ele, por exemplo, desse um salto "vertical"? Como ficaria um corpo sem contato com o piso ou as paredes da espaçonave?

Mas também haveria vantagens nesse processo: a rotação do sistema seria mantida por inércia, depois da aplicação um impulso inicial. Não seria necessária a utilização de combustível para a manutenção do movimento giratório da espaçonave.

Outro modo de gerar gravidade artificial seria acelerar a espaçonave numa direção perpendicular à do piso sobre o qual os astronautas se apoiam, no sentido de seus pés para suas cabeças. Nesse caso, no entanto, haveria necessidade da queima permanente de combustível. Na busca de uma gravidade de intensidade semelhante à da Terra, a espaçonave teria que permanecer acelerada, apresentando ao fim de um ano terrestre uma velocidade próxima à da luz no vácuo ($3,0 \cdot 10^8$ m/s), o que constitui uma conjectura impraticável.

Mais uma maneira de produzir gravidade artificial seria instalar eletroímãs sob o piso da espaçonave. Estes interagiriam com os astronautas dotados de acessórios ferromagnéticos estrategicamente fixados em seus trajes. Mas também nesse caso haveria uma série de problemas, como o consumo permanente de energia pelos eletroímãs e a exposição continuada de organismos humanos à ação magnética.

Discuta com seus colegas as melhores formas de produzir gravidade artificial. Analise os convenientes e inconvenientes, bem como a viabilidade de cada processo. Tenha sempre presente como seria a adaptação do corpo humano a cada caso. Envolva conhecimentos de Biologia, dentre outros.

Para saber mais:

<http://www.xr.pro.br/fc/GRAVIDADE.HTML>

<http://algol.fis.uc.pt/quark/viewtopic.php?f=88t=220>

<http://www.fisica.ufs.br/egsantana/dinamica/circular3/circular3.htm>

Acessos em: 25 jul. 2012.

Exercícios

nível 3

43. (Vunesp–Uncisal) As corridas de Fórmula Indy são famosas por uma série de características que lhe são peculiares por exemplo, a pontuação pelos melhores lugares no *grid* de largada ou pelo número de voltas na liderança da corrida durante sua realização etc. Uma outra característica marcante está no fato de alguns circuitos serem denominados ovais.

Considere a pista de um circuito oval, cujo traçado tem dois trechos retilíneos e paralelos, AB e CD, ligados por dois trechos semicirculares, BC e DA, como mostra a figura.

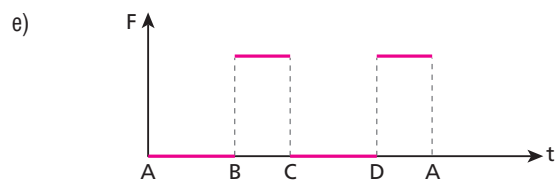
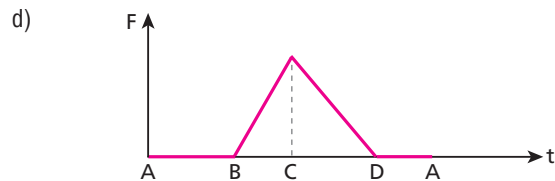
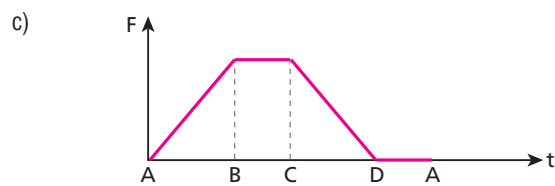
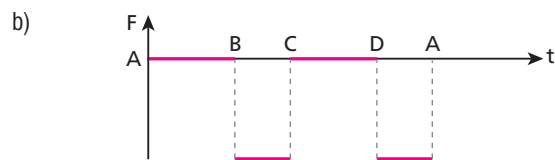
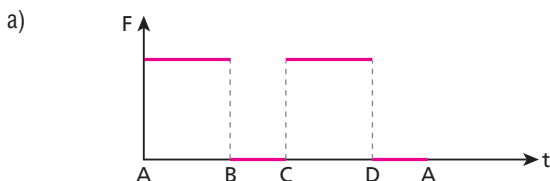
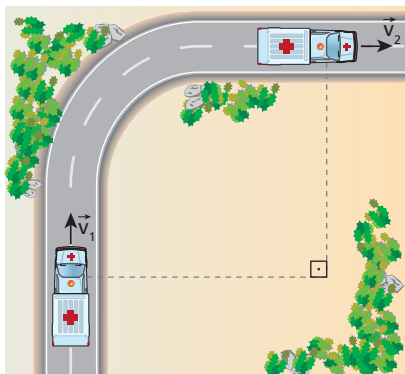
Imaginando-se que um carro percorra os trechos retilíneos e curvilíneos com velocidades escalares constantes, o esboço gráfico que melhor representa a intensidade da força resultante sobre o carro em função dos instantes de passagem pelos pontos **A**, **B**, **C** e **D** é o da alternativa:

a)

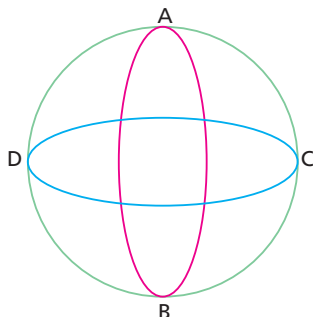
b)

c)

d)

e)

44. Uma ambulância de massa igual a 1 500 kg, em atendimento a uma emergência, percorre uma trajetória contida em um plano horizontal que, em determinado local, se apresenta em forma de curva circular em 90°, conforme representa a figura.

O veículo entra na curva com velocidade $V_1 = 144$ km/h e diminui uniformemente a velocidade, saindo da curva com velocidade $V_2 = 72$ km/h. Sabendo-se que a curva é percorrida em 5,0 s e que $\pi \cong 3$, determine:

a) A intensidade da força tangencial que provoca a frenagem da ambulância ao longo da curva;
b) A intensidade da força centrípeta que mantém a ambulância na curva.

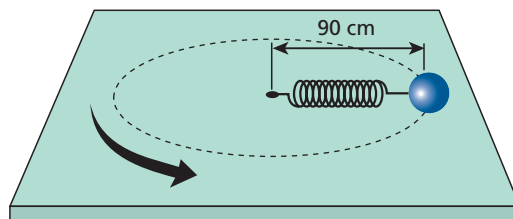
45. (UFPA) Num circo, na apresentação do número conhecido como globo da morte, um motociclista com sua moto descreveu no interior da esfera duas trajetórias circulares de raios 2,5 m, sendo uma horizontal e outra vertical, como na figura abaixo, ambas com a mesma velocidade escalar constante.

Use, se necessário: módulo da aceleração da gravidade: 10,0 m/s^2

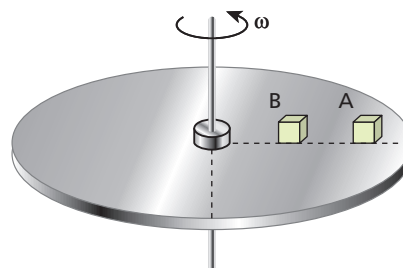
Sobre o fato, analise as afirmações:

I. A força exercida sobre as paredes do globo pela passagem da moto foi a mesma nos pontos **A**, **B**, **C**, e **D** devido ao fato de as velocidades escalares terem sido iguais e constantes.
II. Em qualquer ponto da trajetória horizontal, o peso conjugado da moto e motociclista é equilibrado pela força centrípeta.
III. O valor mínimo da velocidade escalar da moto, necessário para a realização da trajetória vertical, é 5,0 m/s.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

a) II, apenas.
b) III, apenas.
c) I e II, apenas.
d) II e III, apenas.
e) I e III, apenas.

46. Na situação esquematizada na figura, a mesa é plana, horizontal e perfeitamente polida. A mola tem massa desprezível, constante elástica igual a $2{,}0 \cdot 10^2$ N/m e comprimento natural (sem deformação) de 80 cm.

Se a esfera (massa de 2,0 kg) descreve movimento circular e uniforme, qual o módulo da sua velocidade tangencial?

47. O esquema seguinte representa um disco horizontal que, acoplado rigidamente a um eixo vertical, gira uniformemente sem sofrer resistência do ar:

Sobre o disco, estão apoiados dois blocos, **A** e **B**, constituídos de materiais diferentes, que distam do eixo 40 cm e 20 cm respectivamente. Sabendo que, nas condições do problema, os blocos estão na iminência de deslizar, obtenha:

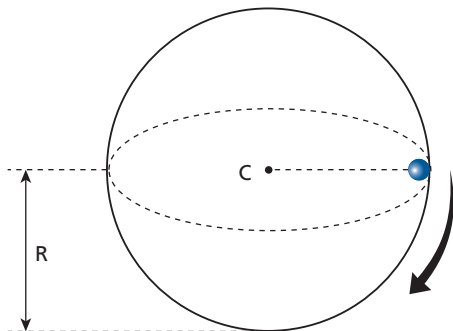
a) a relação v_A/v_B das velocidades lineares de **A** e de **B** em relação ao eixo;
b) a relação μ_A/μ_B dos coeficientes de atrito estático entre os blocos **A** e **B** e o disco.

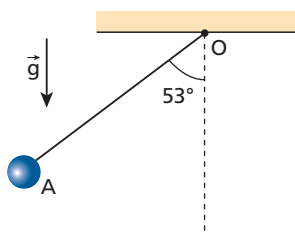
48. (Ufla-MG) Um dos fatores que influem no desempenho de um carro de Fórmula 1 é o "efeito asa". Esse efeito, que pode ser mais ou menos acentuado, surge na interação do ar com a geometria do carro. Quando se altera o ângulo de inclinação dos aerofólios, surge uma força vertical para baixo, de forma que o carro fica mais preso ao solo. Considerando-se um carro com "efeito asa" igual ao seu peso, coeficiente de atrito estático $\mu_e = 1{,}25$ entre pneus e asfalto e $g = 10$ m/s^2, esse carro pode fazer uma curva plana horizontal de raio de curvatura 100 m, sem deslizar, com velocidade escalar máxima de:

a) 90 km/h.
b) 144 km/h.
c) 180 km/h.
d) 216 km/h.
e) 252 km/h.

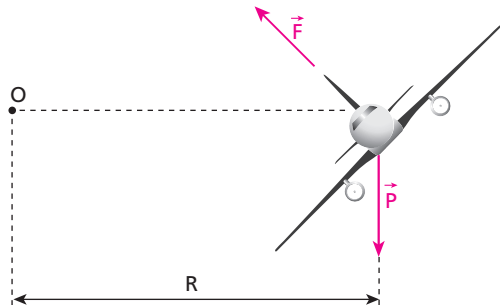
49. (Fuvest-SP) Um caminhão, com massa total de 10 000 kg, está percorrendo uma curva circular plana e horizontal a 72 km/h (ou seja, 20 m/s) quando encontra uma mancha de óleo na pista e perde completamente a aderência. O caminhão encosta então no muro lateral que acompanha a curva e que o mantém em trajetória circular de raio igual a 90 m. O coeficiente de atrito entre o caminhão e o muro vale 0,30. Podemos afirmar que, ao encostar no muro, o caminhão começa a perder velocidade à razão de, aproximadamente:

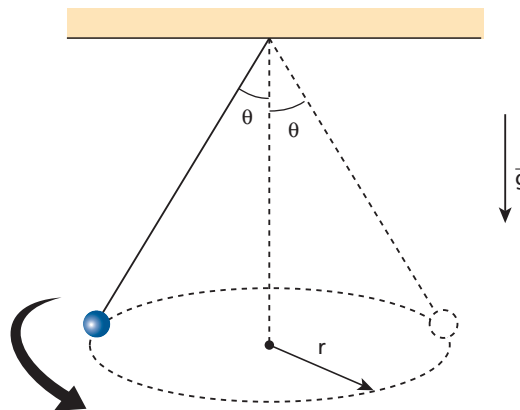
a) $0{,}070 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
b) $1{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
c) $3{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
d) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
e) $67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

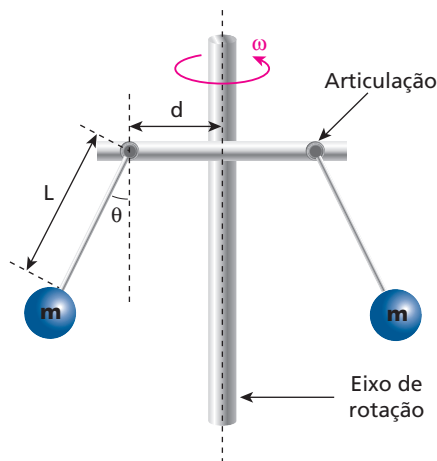
50 (Mack-SP) Um corpo de pequenas dimensões realiza voltas verticais no sentido horário dentro de uma esfera rígida de raio $R = 1{,}8$ m. Na figura abaixo, temos registrado o instante em que sua velocidade tem módulo igual a 6,0 m/s e a força de atrito, devido ao contato com a esfera, é equilibrada pelo peso. Nessas condições, determine o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a esfera.

Adote $g = 10\ m/s^2$ e não considere o efeito do ar.

51. Na figura a seguir, representa-se um pêndulo fixo em **O**, oscilando num plano vertical. No local, despreza-se a influência do ar e adota-se $g = 10\ m/s^2$. A esfera tem massa de 3,0 kg e o fio é leve e inextensível, apresentando comprimento de 1,5 m. Se, na posição **A**, o fio forma com a direção vertical um ângulo de 53° e a esfera tem velocidade igual a 2,0 m/s, determine a intensidade da força de tração no fio.
Dados: sen 53° = 0,80; cos 53° = 0,60.

52. (AFA-SP) Na aviação, quando um piloto executa uma curva, a força de sustentação ($\vec{F}$) torna-se diferente do peso do avião ($\vec{P}$). A razão entre **F** e **P** é chamada fator de carga (**n**):

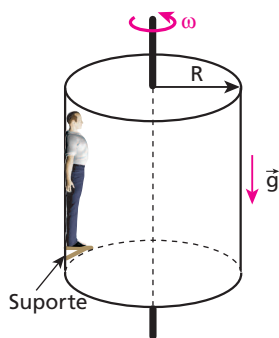
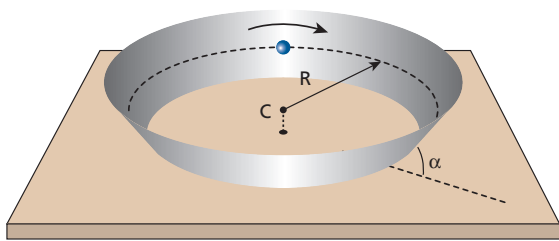
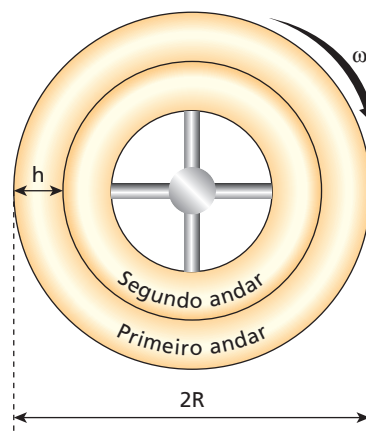
$$n = \frac{F}{p}$$

Um avião executa um movimento circular e uniforme, conforme a figura, em um plano horizontal com velocidade escalar de 40 m/s e com fator de carga igual a $\frac{5}{3}$.

Supondo $g = 10\ m \cdot s^{-2}$, calcule o raio **R** da circunferência descrita pelo avião.

53. No esquema a seguir, representa-se um pêndulo cônico operando em condições ideais. A esfera pendular descreve movimento circular e uniforme, num plano horizontal, de modo que o afastamento angular do fio em relação à vertical é **θ**. Sendo **g** o módulo do campo gravitacional do local e **r** o raio da circunferência descrita pela esfera pendular:

a) calcule o período de revolução do pêndulo;
b) discuta, justificando, se o período calculado no item anterior seria modificado se o pêndulo fosse levado para um outro local, de aceleração da gravidade igual a $\frac{g}{4}$.

54. (Unicamp-SP) As máquinas a vapor, que foram importantíssimas na Revolução Industrial, costumavam ter um engenhoso regulador da sua velocidade de rotação, como é mostrado esquematicamente na figura abaixo. As duas esferas afastavam-se do eixo em virtude de sua rotação e acionavam um dispositivo regulador da entrada de vapor, controlando assim a velocidade de rotação, sempre que o ângulo **θ** atingia 30°. Considere hastes de massas desprezível e comprimento $L = 0{,}2$ m, com esferas de massas $m = 0{,}18$ kg em suas pontas, $d = 0{,}1$ m e $\sqrt{3} \cong 1{,}8$. Adote $g = 10\ m/s^2$.

a) Faça um diagrama indicando as forças que atuam sobre uma das esferas.
b) Calcule a velocidade angular ω para a qual $\theta = 30°$.

55. Em alguns parques de diversões, existe um brinquedo chamado rotor, que consiste em um cilindro oco, de eixo vertical, dentro do qual é introduzida uma pessoa:

De início, a pessoa apoia-se sobre um suporte, que é retirado automaticamente quando o rotor gira com uma velocidade adequada. Admita que o coeficiente de atrito estático entre o corpo da pessoa e a parede interna do rotor valha **μ**. Suponha que o módulo da aceleração da gravidade seja **g** e que o rotor tenha raio **R**. Calcule a mínima velocidade angular do rotor, de modo que, com o suporte retirado, a pessoa não escorregue em relação à parede.

56. Considere uma superfície, em forma de tronco de cone, fixa sobre uma mesa, conforme representa a figura. Seja **α** o ângulo formado entre a parede externa da superfície e a mesa. Uma partícula de massa **m** percorre a parede interna da superfície em movimento uniforme, descrevendo uma circunferência de raio **R**, contida em um plano horizontal. Desprezando todos os atritos e adotando para a aceleração da gravidade o valor **g**, calcule a intensidade da velocidade linear da partícula.

57. (Unifesp-SP) Uma estação espacial, construída em forma cilíndrica, foi projetada para contornar a ausência de gravidade no espaço. A figura mostra, de maneira simplificada, a secção reta dessa estação, que possui dois andares.

Para simular a presença de gravidade, a estação deve girar em torno do seu eixo com certa velocidade angular. Se o raio externo da estação é **R**:

a) deduza a velocidade angular **ω** com que a estação deve girar para que um astronauta, em repouso no primeiro andar e a uma distância **R** do eixo da estação, fique sujeito a uma aceleração de módulo igua a **g**.

b) suponha que o astronauta, cuja massa vale **m**, vá para o segundo andar, a uma distância **h** do piso do andar anterior. Calcule o peso do astronauta nessa posição e compare-o com o seu peso quando estava no primeiro andar. O peso aumenta, diminui ou permanece inalterado?

Para raciocinar um pouco mais

58. Admita que fosse possível reunir, num mesmo grande prêmio de Fórmula 1, os memoráveis pilotos Chico Landi, José Carlos Pace, Ermerson Fittipaldi, Ayrton Senna e Nelson Piquet. Faltando apenas uma curva plana e horizontal para o final da prova, observa-se a seguinte formação: na liderança, vem Pace, a 200 km/h; logo atrás, aparece Landi, a 220 km/h; em terceira colocação, vem Senna, a 178 km/h, seguido por Fittipaldi, a 175 km/h. Por último, surge Piquet, a 186 km/h. A curva depois da qual os vencedores recebem a bandeirada final é circular e seu raio vale 625 m. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre os pneus dos carros e a pista é igual a 0,40 e que $g = 10\ m/s^2$, é muito provável que tenha ocorrido o seguinte:

a) Pace venceu a corrida, ficando Landi em segundo lugar, Senna em terceiro, Fittipaldi em quarto e Piquet em quinto.

b) Landi venceu a corrida, ficando Pace em segundo lugar, Piquet em terceiro, Senna em quarto e Fittipaldi em quinto.

c) Senna venceu a corrida, ficando Fittipaldi em segundo lugar; Pace, Landi e Piquet derraparam na curva.

d) Piquet venceu a corrida, ficando Senna em segundo lugar e Fittipaldi em terceiro; Pace e Landi derraparam na curva.

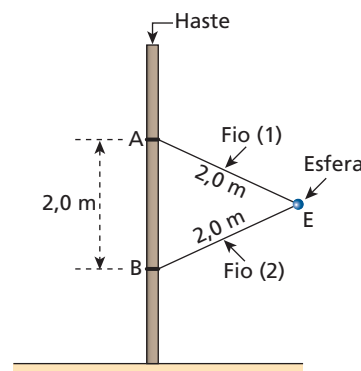
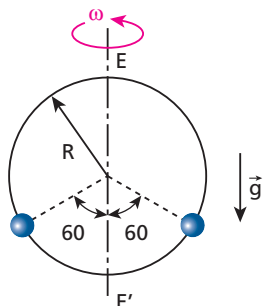
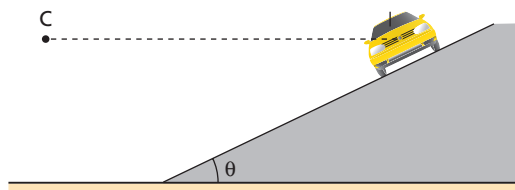
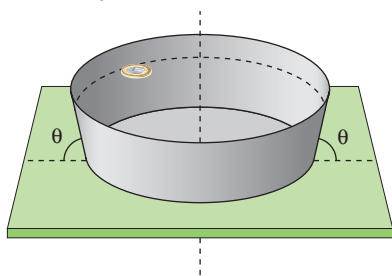
e) Pace venceu a corrida, ficando Senna em segundo lugar, Fittipaldi em terceiro e Piquet em quarto; Landi derrapou na curva.

59. (Unip-SP) Uma pequena esfera **E**, de massa 1,0 kg, gira em torno de uma haste vertical com velocidade angular constante de 5,0 rad/s.

A esfera está ligada à haste por dois fios ideais de 2,0 m de comprimento cada um, que estão em contato com a haste por meio de dois anéis, **A** e **B**, a uma distância fixa de 2,0 m um do outro.

A esfera **E** não se desloca verticalmente.

Adote $g = 10\ m/s^2$ e despreze o efeito do ar.

Determine as intensidades T_1 e T_2 das forças que tracionam os fios (1) e (2).

60. Um aro metálico circular e duas esferas são acoplados conforme a figura a seguir. As esferas são perfuradas diametralmente, de modo a poderem se deslocar ao longo do aro, sem atrito. Sendo **R** o raio do aro e **m** a massa de cada esfera, determine a velocidade angular que o aro deve ter, em torno do eixo vertical EE', para que as esferas fiquem na posição indicada. A aceleração da gravidade tem intensidade **g**.

61. Um automóvel está em movimento circular e uniforme com velocidade escalar **v**, numa pista sobrelevada de um ângulo θ em relação à horizontal. Sendo μ o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista, **R** o raio da trajetória e **g** a intensidade do campo gravitacional, determine o valor máximo de **v**, de modo que não haja deslizamento lateral do veículo.

62. Uma moeda descreve movimento circular e uniforme com velocidade angular ω encostada na parede interna de um recipiente em forma de tronco de cone, com eixo vertical. A trajetória descrita pelo objeto tem raio **R** e está contida num plano horizontal. As paredes do recipiente formam um ângulo θ com uma superfície horizontal de apoio e, no local, a influência do ar é desprezível e a intensidade da aceleração da gravidade é igual a **g**.

Sendo μ o coeficiente de atrito dinâmico entre a moeda e a parede interna do recipiente, pede-se determinar o mínimo valor de ω para a moeda não escorregar.

63. (Fuvest-SP) Um brinquedo consiste em duas pequenas bolas **A** e **B**, de massas iguais a **M**, e um fio flexível e inextensível: a bola **B** está presa na extremidade do fio e a bola **A** possui um orifício pelo qual o fio passa livremente. Para operar adequadamente o dispositivo, um jovem (com treino) deve segurar a extremidade livre do fio e girá-la de maneira uniforme num plano horizontal, de modo que as bolas realizem movimentos circulares e horizontais, de mesmo período, mas de raios diferentes. Nessa situação, como indicado na figura 1, as bolas permanecem em lados opostos em relação ao eixo vertical fixo, que apenas toca os pontos **O** e **Q** do fio. Na figura 2, estão indicados os raios das trajetórias de **A** e **B**, bem como os ângulos que os dois segmentos do fio fazem com a horizontal.

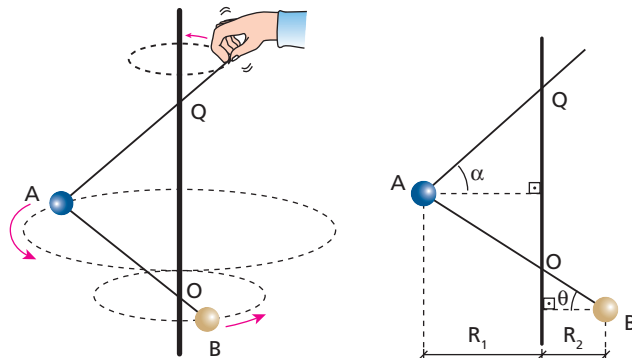



Figura 1 Figura 2

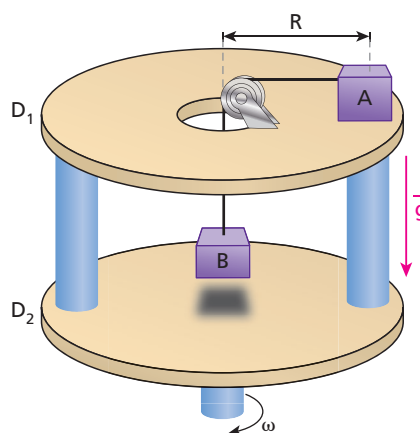
> **Note e adote:**
> Os atritos e a influência do ar são desprezíveis.
> A aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\ m/s^2$.
> sen $\theta \cong 0{,}4$; cos $\theta \cong 0{,}9$ e $\pi \cong 3$.

Determine:

a) a intensidade **F** da força de tração, admitida constante em toda a extensão do fio, em função de **M** e **g**;

b) a razão **K** = sen α / sen θ entre os senos dos ângulos indicados na figura 2;

c) o número de voltas por segundo que o conjunto deve realizar no caso de o raio R_2 da trajetória descrita pela bola **B** ser igual a 0,10 m.

64. Na situação esquematizada a seguir, o sistema realiza rotação uniforme de modo que o bloco **A** permanece apoiado sobre o disco horizontal $\mathbf{D_1}$ sem deslizar em relação a este. O bloco **B**, por sua vez, mantém-se em equilíbrio na vertical preso a um fio ideal que o conecta a **A**, sem tocar no disco $\mathbf{D_2}$, também horizontal. As massas de **A** e **B** valem respectivamente **m** e **M** e o coeficiente de atrito estático entre **A** e $\mathbf{D_1}$ vale μ.

Sendo $\omega_{máx}$ e $\omega_{mín}$, respectivamente, as velocidades angulares máxima e mínima do sistema que atendem às condições do problema e desprezando-se a influência do ar, calcule a relação entre $\omega_{máx}$ e $\omega_{mín}$.

TF1-207_229_5P_P2T3.indd 226 16/08/12 17:30

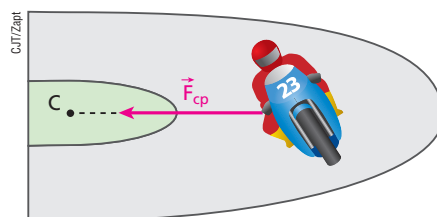
Apêndice

Força centrífuga

Thinkstock/Getty Images

Pessoas se divertindo no brinquedo conhecido como chapéu mexicano.

Uma atração muito concorrida nos parques de diversões é o chapéu mexicano, como o que aparece na fotografia. A rotação do dispositivo faz com que as pessoas descrevam trajetórias circulares de raios tanto maiores quanto maior for a velocidade angular do sistema. Para um referencial solidário ao banco ocupado por uma pessoa, esta se encontra em equilíbrio, o que torna nula a resultante das forças em seu corpo. Isso requer uma força de inércia, denominada **força centrífuga**, definida apenas em relação ao referencial acelerado do banco. Do ponto de vista da pessoa, é a força centrífuga que puxa seu corpo para fora da trajetória, fazendo-o distanciar-se do eixo de rotação do brinquedo. A força centrífuga somada vetorialmente com as demais forças (peso, força de tração aplicada pelo cabo de sustentação do banco, resistência do ar etc.) torna nula a força resultante no corpo da pessoa, o que justifica seu equilíbrio no referencial do banco. É importante salientar, porém, que a força centrífuga não é definida em relação ao solo (referencial inercial); só é "sentida" no referencial acelerado associado ao banco.

Consideremos um conjunto moto-piloto descrevendo uma curva circular em movimento uniforme. Nesse caso, em relação a um referencial ligado ao solo (**referencial inercial**), a resultante das forças no corpo do piloto é radial e dirigida para o centro da curva, sendo denominada **centrípeta** ($\vec{F}_{cp}$).

Em relação a um referencial no solo, a resultante das forças no corpo do piloto é **centrípeta**.

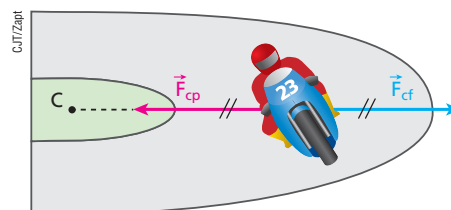
Chamando de **m** a massa do piloto, de **v** a intensidade da velocidade e de **R** o raio de curvatura da trajetória, temos:

$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{m\,v^2}{R}$$

Em relação a um referencial ligado à moto (**referencial acelerado**), entretanto, o piloto está em repouso e, por isso, a resultante das forças que agem em seu corpo deve ser nula. Isso significa que, em relação a esse referencial, deve ser considerada uma força que equilibra a resultante centrípeta. A equilibrante da força centrípeta é, portanto, uma força também radial, porém dirigida para fora da trajetória, sendo denominada **centrífuga** ($\vec{F}_{cp}$).

Destaquemos que a intensidade da força centrífuga é igual à da força centrípeta:

$$|\vec{F}_{cf}| = |\vec{F}_{cp}| \Rightarrow |\vec{F}_{cf}| = \frac{m\,v^2}{R}$$

A força centrífuga é uma **força de inércia** que é introduzida para justificar o equilíbrio de um corpo em relação a um referencial acelerado quando este corpo descreve trajetórias curvilíneas em relação a um referencial inercial. Trata-se de uma força fictícia, já que não é consequência de nenhuma interação: é um artifício criado para que as duas primeiras leis de Newton possam ser usadas em referenciais em que elas não valem.

Em relação a um referencial na moto, a resultante das forças no corpo do piloto é nula; a força centrífuga equilibra a força centrípeta.

Haja pescoço!

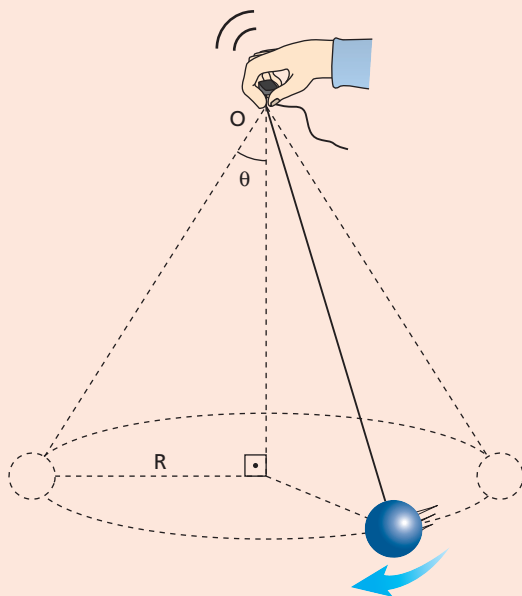
Luis Fernando R. Tucillo

Um piloto de Fórmula 1 tem a musculatura do pescoço bastante solicitada ao fazer uma curva. Em relação a um referencial no carro, isso se deve à **força centrífuga**, que "puxa" sua cabeça para fora da trajetória. Alguns amenizam este efeito adaptando elásticos, que conectam o capacete aos ombros.

Deve-se entender, entretanto, que a força centrífuga não existe para quem vê a corrida parado em relação ao solo; ela é definida em relação ao carro, que é um referencial acelerado (não inercial).

Faça você mesmo

Consiga um pedaço de barbante com aproximadamente 50 cm de comprimento e um pequeno objeto com cerca de 50 g de massa que possa ser atado a uma das extremidades do barbante. Pegue esse conjunto e, como sugere a figura a seguir, faça o objeto girar num plano horizontal descrevendo uma circunferência com velocidade de intensidade constante. Você notará que o barbante varrerá no espaço uma superfície cônica e permanecerá formando um ângulo θ invariável em relação a um eixo imaginário vertical baixado do ponto de suspensão **O**.

Você poderá verificar que, aumentando-se a intensidade da velocidade, maiores ficarão o ângulo θ e o raio **R** da circunferência descrita pelo objeto, isto é, mais o barbante tenderá a ficar horizontal.

Considerando-se um referencial ligado ao objeto, você poderá dizer de uma maneira pouco detalhada que, quanto maior for a intensidade da velocidade, maior será a força centrífuga, o que justifica o afastamento do objeto em relação ao eixo vertical do dispositivo, chamado **pêndulo cônico**, na busca de uma trajetória de raio maior.

Sendo **L** o comprimento do barbante, **g** a intensidade da aceleração da gravidade e ω a velocidade angular, demonstre que o raio **R** da circunferência descrita pelo objeto é função crescente de ω de acordo com a expressão:

$$R = \sqrt{L^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$$

Exercícios

65. Com relação à força centrífuga, aponte a alternativa incorreta:

a) É ela que "puxa" o nosso corpo para fora da trajetória quando fazemos uma curva embarcados em um veículo qualquer.
b) Numa mesma curva, sua intensidade cresce com o quadrado da velocidade do corpo.
c) Tem a mesma intensidade que a força centrípeta, porém sentido oposto.
d) É uma força de inércia, que só é definida em relação a referenciais acelerados.
e) É a reação à força centrípeta.

66. Considere a Lua (massa **M**) em sua gravitação em torno da Terra. Admita que, em relação à Terra, a órbita da Lua seja circular de raio **R** e que sua velocidade vetorial tenha intensidade **v**.
Analise os esquemas abaixo nos quais estão representadas forças na Lua com suas respectivas intensidades.

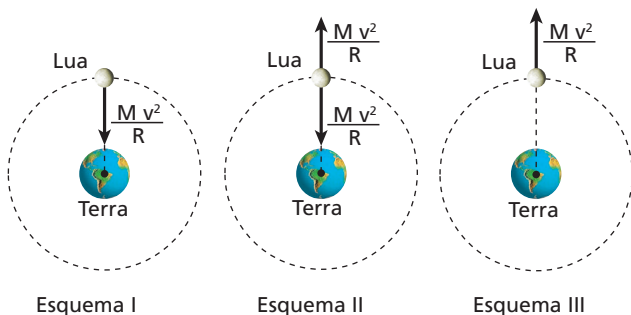
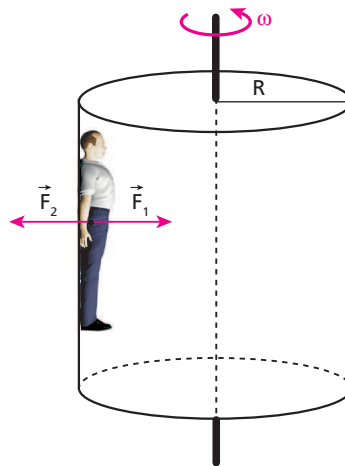



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

Para um referencial na Terra e um na Lua, os esquemas corretos são, respectivamente:

a) I e II
b) I e III
c) II e III
d) I e I
e) II e II

67. Considere um cilindro oco de raio **R**, como o esquematizado a seguir, em rotação em torno de um eixo vertical com velocidade angular igual a ω. Uma pessoa de massa **m** está acompanhando o movimento do sistema apenas encostada na parede interna do cilindro, porém na iminência de escorregar. As forças horizontais $\vec{F}_1$ (reação normal da parede) e $\vec{F}_2$ ($\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$) têm sentidos opostos e estão aplicadas no corpo da pessoa.

A respeito dessa situação, analise as proposições abaixo:

(01) Diminuindo-se a velocidade angular do cilindro aquém do valor ω, a pessoa escorrega em relação à parede, deslocando-se para baixo.
(02) Aumentando-se a velocidade angular do cilindro além do valor ω, a pessoa escorrega em relação à parede, deslocando-se para cima.
(04) Em relação a um referencial externo, fixo no solo, não deve ser considerada $\vec{F}_1$. $\vec{F}_2$ é a resultante centrífuga, de intensidade dada por $m\ \omega^2 / R$.
(08) Em relação a um referencial externo, fixo no solo, não deve ser considerada $\vec{F}_2$. $\vec{F}_1$ é a resultante centrípeta, de intensidade dada por $m\ \omega^2\ R$.
(16) Em relação a um referencial interno, fixo no cilindro, devem ser consideradas $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, ambas com intensidade dada por $m\ \omega^2\ R$. $\vec{F}_2$ é a força centrífuga que equilibra $\vec{F}_1$.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

Tópico 4

Gravitação

Bloco 1

1. Introdução

Gravitação é o estudo das forças de atração entre massas (forças de campo gravitacional) e dos movimentos de corpos submetidos a essas forças.

Muitas teorias se sucederam até que chegássemos à concepção atual do Sistema Solar a que pertencemos. De início, o misticismo e a religião dissociavam as idéias sobre o Universo do caráter científico.

Foram os antigos gregos os fundadores da ciência modernamente conhecida por Astronomia. No século II d.C., Cláudio Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo, propôs um modelo planetário em que a Terra era o centro do Sistema Solar, de modo que todos os astros conhecidos, inclusive o Sol e a Lua, deveriam gravitar ao seu redor. Esse modelo – **geocêntrico**, pois tinha a Terra como centro – foi aceito por mais de quinze séculos, sobretudo por ser coerente com a filosofia e os valores correntes.

No século XVI, o monge polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), estudioso de Medicina, Matemática e Astronomia, apresentou uma concepção revolucionária para o Sistema Solar. Segundo ele, o Sol, e não a Terra, seria o centro em torno do qual deveriam gravitar em órbitas circulares a Terra e todos os planetas conhecidos. Embora mais simples que o de Ptolomeu, o modelo de Copérnico – **heliocêntrico**, pois admitia o Sol como centro do sistema – encontrou grandes obstáculos para sua aceitação, já que se contrapunha aos preceitos antropocêntricos da Igreja.

Retrato de Ptolomeu.

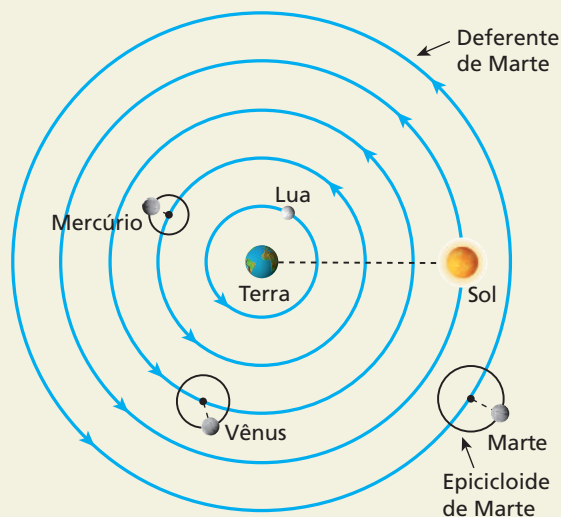
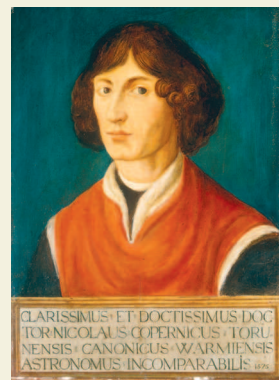



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.

No modelo ptolomaico do Sistema Solar, cada planeta realizava dois movimentos circulares concomitantemente. Marte, por exemplo, descrevia um epiciclo, cujo centro realizava uma deferente ao redor da Terra. Contudo, isso não acontecia com a Lua e com o Sol, que descreviam apenas a deferente.

Nicolau Copérnico. Sua obra mais importante, o livro *Das revoluções dos mundos celestes*, escrito originalmente em latim (*De Revolutionibus Orbium Coelestium*), conforme a tradição da época, constitui um dos mais importantes marcos da evolução dos conceitos referentes à situação da Terra diante do panorama universal. Copérnico recebeu o primeiro exemplar de seu livro no dia de sua morte (25 de maio de 1543), em Frauenburg, na Polônia. Nessa obra, ele propunha a **Teoria Heliocêntrica**, além de explicar os fundamentos do movimento de rotação da Terra, responsável pela sucessão dos dias e das noites. Por contestar o dogma de que o ser humano, obra-prima da criação divina, deveria ocupar juntamente com a Terra o centro do Universo, esse livro foi imediatamente incluído no *Index* – relação das leituras proibidas pela Igreja.

The Bridgeman Art Library/Getty Images

Um importante adepto do pensamento copernicano foi o físico e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642). Devido às necessidades de suas observações astronômicas, Galileu construiu diversas lunetas. Com elas, ele descobriu os satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, as manchas solares e detalhes da Lua. Além disso, elaborou mapas celestes de rara precisão para a época.

Seus estudos o levaram a também concordar com a ideia de que o Sol, e não a Terra, deveria ser o centro do Sistema Solar. Por essa razão, foi perseguido e preso pela Inquisição e, sob pressão, negou perante um tribunal as teses que defendia.

A crescente controvérsia entre as proposições de Ptolomeu e Copérnico levou os astrônomos a estudos mais profundos. Foi o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) quem conseguiu descrever de modo preciso os movimentos planetários.

Photo Researchers/Diomedia

Modelo de luneta utilizada por Galileu.

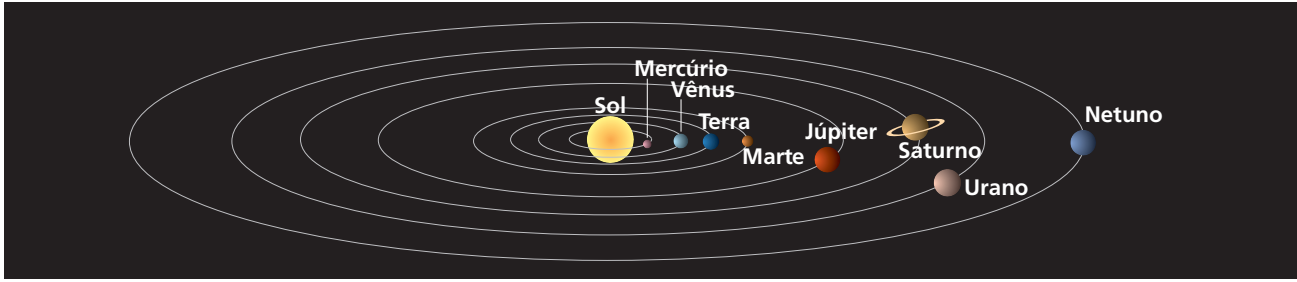
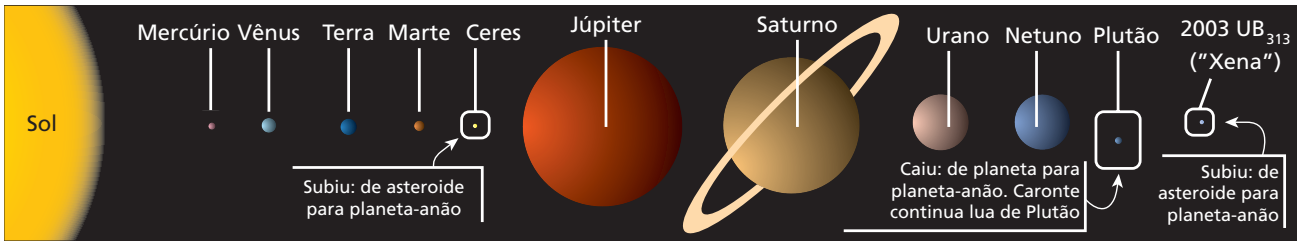
Atualmente, o modelo aceito para o Sistema Solar é basicamente o de Copérnico, feitas as correções sugeridas por Kepler e por cientistas que o sucederam.

Sabe-se que oito planetas gravitam em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas. Na ordem crescente de distância ao Sol, são eles: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

Nota:

- Na época de Kepler (por volta de 1600), eram conhecidos apenas seis planetas: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, todos observáveis a olho nu. A presença de Urano, Netuno e Plutão (planeta-anão) só foi constatada com a evolução de equipamentos de observação, como lunetas e telescópios.

Johannes Kepler. Autor de uma obra extensa que inclui vários opúsculos e livros, como *Epitome Astronomiae Copernicanae* e *Harmonice Mundi*, em que ratifica e amplia as teorias de Copérnico, descrevendo de maneira precisa os movimentos dos planetas em torno do Sol. Para elaborar seus trabalhos, Kepler fundamentou-se em suas observações do planeta Marte, em correspondências com Galileu Galilei e, sobretudo, em dados e medidas astronômicos obtidos pelo seu mestre dinamarquês, Tycho Brahe (1546-1601), com quem trabalhou durante algum tempo.

Album/akg-images /Latinstock

Na figura, temos um aspecto das órbitas planetárias em torno do Sol. Observe que as trajetórias descritas pelos planetas pertencem praticamente a um mesmo plano. A órbita de Mercúrio é a mais elíptica, sendo as demais aproximadamente circulares. (Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.)

Depois das deliberações da União Astronômica Internacional (UAI), em 2006, esta é a situação atual do Sistema Solar.

Plutão-Caronte

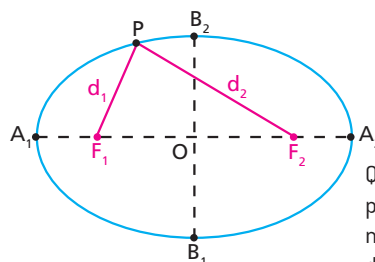
Descoberto em 1930, Plutão foi considerado até 2006 o nono planeta do Sistema Solar. Sua distância média ao Sol é de 39,6 UA (uma unidade astronômica – UA é a distância média entre a Terra e o Sol e equivale aproximadamente a 149 milhões de quilômetros) – e seu período de revolução equivale a 248 anos terrestres. A órbita de Plutão é uma elipse de grande excentricidade, inclinada cerca de 17° em relação ao plano das demais órbitas planetárias. Em 2006, porém, a União Astronômica Internacional (UAI), depois de estabelecer novos parâmetros para a definição do que deve ser chamado de planeta, deliberou por rebaixar Plutão à condição de planeta-anão, já que muitas de suas características não correspondem às atuais exigências. Plutão na verdade compõe com Caronte – um outro corpo celeste praticamente do mesmo tamanho, descoberto em 1978 – um sistema duplo em que os dois astros gravitam com períodos iguais ao redor de um centro imaginário que gira em torno do Sol. Caronte, no entanto, é considerado uma lua de Plutão.

Imagem do sistema Plutão-Caronte obtida em 1994 pelo telescópio Hubble.

Antes de seguirmos nosso estudo, é importante que você saiba o que é uma elipse.

Elipse é o conjunto de pontos de um plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2, respectivamente a dois pontos fixos, denominados focos, F_1 e F_2 pertencentes a esse plano, permanece constante.

Observando a figura a seguir, note que uma elipse é composta dos seguintes elementos geométricos:

F_1 e F_2 são os focos;
$OA_1 = OA_2$ são os semieixos maiores;
$OB_1 = OB_2$ são os semieixos menores.

Qualquer que seja o ponto **P** considerado na elipse, tem-se $d_1 + d_2 =$ constante.

Façamos $OA_1 + OA_2 = E$ (eixo maior da elipse) e $OF_1 + OF_2 = f$ (distância entre os focos da elipse). Chama-se **excentricidade da elipse** a grandeza adimensional **e** dada por:

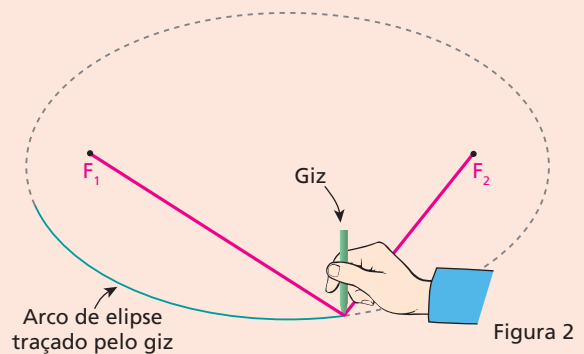
$$e = \frac{f}{E} \qquad (0 \leq e < 1)$$

Se $f = 0$, F_1 e F_2 serão coincidentes e a elipse assumirá a forma particular de uma circunferência com o centro localizado em $F_1 \equiv F_2$. Se **f** tender a **E**, porém, a excentricidade **e** se aproximará de 1 e a elipse ficará semelhante a um segmento de reta.

Faça você mesmo

Desenhar uma elipse é tarefa relativamente simples. Consiga dois pregos, um pedaço de barbante inextensível e um giz (ou lápis). Fixe os dois pregos em dois pontos F_1 e F_2 de uma superfície plana, de modo que a distância entre eles seja menor que o comprimento do barbante. Em cada prego, amarre uma das extremidades do barbante (figura 1).

Coloque o giz em contato com o barbante (de modo que este permaneça esticado) e, com ele, vá riscando a superfície (figura 2).

A figura obtida será uma elipse, de acordo com a definição apresentada, com os pregos situados em seus respectivos focos.

2. As leis de Kepler

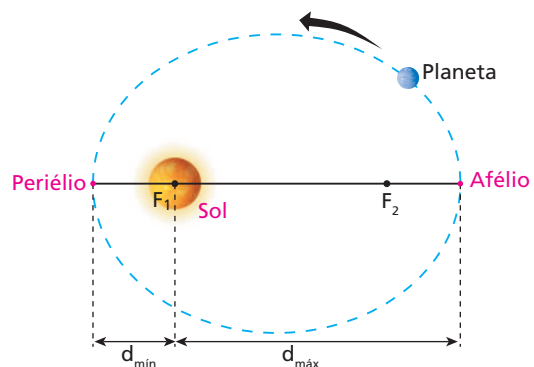
Foi por intermédio de Kepler que a Astronomia se desvencilhou da Teologia para se ligar definitivamente à Física.

Dono de uma personalidade indagadora e obstinada, este professor de Matemática e Astronomia, conhecedor das teorias de Copérnico, herdou um grande acervo de informações e medidas.

Ainda hoje, mesmo dispondo do supertelescópio Hubble, visto aqui em representação artística, e de outros artefatos de exploração espacial, não temos teorias definitivas sobre o Universo.

Esses ingredientes ajudaram-no a verificar que existem notórias regularidades nos movimentos planetários, de modo que ele pôde formular, mesmo sem demonstrar matematicamente, três generalizações, conhecidas como **Leis de Kepler**.

1ª Lei – Lei das órbitas

Em relação a um referencial no Sol, os planetas movimentam-se descrevendo **órbitas elípticas**, ocupando o Sol um dos focos da elipse.

O ponto da órbita mais próximo do Sol é denominado **periélio**, e o mais afastado, **afélio**.

Chamando de $d_{mín}$ e $d_{máx}$ as distâncias do periélio e do afélio ao centro do Sol, respectivamente, definimos **raio médio da órbita** (**R**) do planeta como a média aritmética entre $d_{mín}$ e $d_{máx}$.

$$R = \frac{d_{mín} + d_{máx}}{2}$$

De acordo com a definição acima, podemos concluir que o raio médio da órbita é o semieixo maior da elipse.

Entre os planetas do Sistema Solar, Mercúrio é o que descreve órbita de maior excentricidade. Os demais planetas, inclusive a Terra, realizam órbitas praticamente circulares, como pode ser observado na tabela abaixo, em que apresentamos o valor da excentricidade da órbita de cada planeta.

Planeta	Excentricidade da elipse
Mercúrio	0,20
Vênus	0,07
Terra	0,02
Marte	0,09
Júpiter	0,05
Saturno	0,06
Urano	0,05
Netuno	0,009

O fato de existirem órbitas praticamente circulares não invalida, contudo, a 1ª Lei de Kepler, já que a circunferência é um caso particular de elipse que tem os focos coincidentes.

Uma evidência de que a órbita da Terra é praticamente circular é que, quando observamos o Sol, ele nos aparenta ter o mesmo "tamanho" em qualquer época do ano. Se a órbita terrestre fosse uma elipse de grande excentricidade, visualizaríamos o Sol muito grande quando o planeta percorresse a região do periélio e muito pequeno quando o planeta percorresse a região do afélio. Além disso, na passagem da Terra pela região do periélio, sentiríamos um calor imenso, ficando sujeitos a marés devastadoras. Na passagem da Terra pela região do afélio, porém, nos submeteríamos a fenômenos opostos: sentiríamos um frio glacial e as marés seriam amenas, provocadas quase que exclusivamente pela influência da Lua.

2ª Lei – Lei das áreas

As áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são **diretamente proporcionais** aos respectivos intervalos de tempo gastos.

Sendo **A** a área e **Δt** o correspondente intervalo de tempo, podemos escrever que:

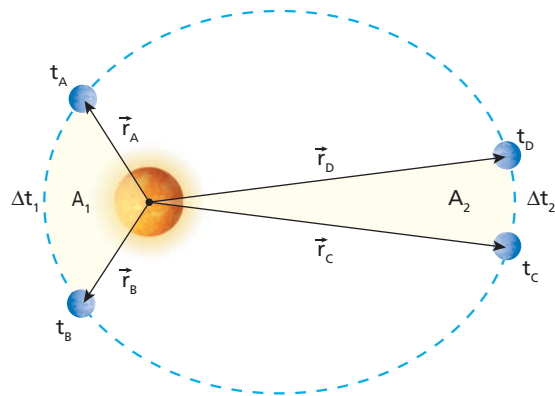
$$A = v_a \, \Delta t$$

A constante de proporcionalidade v_a denomina-se **velocidade areolar** e caracteriza a rapidez com que o vetor-posição do planeta, que tem origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta, varre as respectivas áreas.

Também podemos enunciar a Lei das áreas da seguinte maneira:

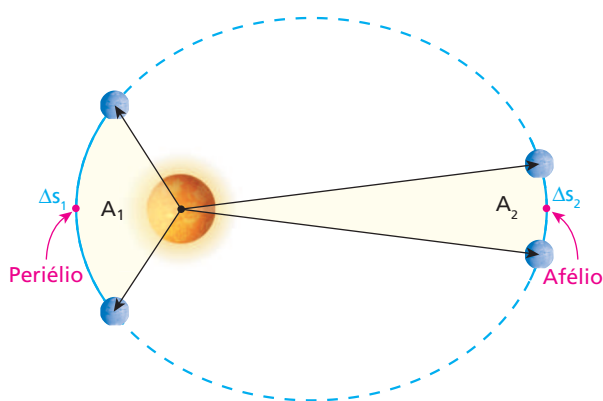
O vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol varre **áreas iguais em intervalos de tempo iguais**.

Considere a figura a seguir, que ilustra um planeta em quatro instantes consecutivos do seu movimento orbital em torno do Sol. Nela, estão representados os vetores-posição $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ e $\vec{r}_D$ associados aos instantes t_A, t_B, t_C e t_D respectivamente.

Representamos por A_1 e A_2 as áreas varridas pelo vetor-posição do planeta nos intervalos $\Delta t_1 = t_B - t_A$ e $\Delta t_2 = t_D - t_C$:

Conforme propõe a 2ª Lei de Kepler, temos:

$$\text{Se } \Delta t_1 = \Delta t_2, \text{ então } A_1 = A_2$$

É importante reforçar que a velocidade areolar para um dado planeta do Sistema Solar é **constante**. Isso não significa, porém, que o movimento do planeta ao longo de sua órbita seja uniforme.

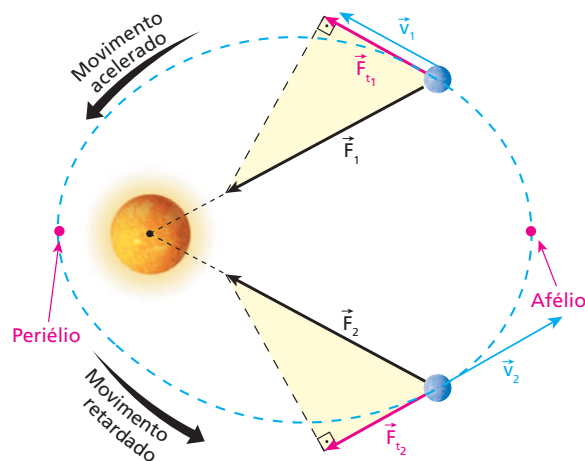
Admitamos que, na figura abaixo, as áreas A_1 e A_2 sejam varridas em intervalos de tempo iguais. Com base na Lei das áreas, concluímos que $A_1 = A_2$ e que, devido à excentricidade da órbita, o espaço percorrido pelo planeta na região do periélio (deslocamento escalar) é maior que o espaço percorrido pelo planeta na região do afélio ($\Delta s_1 > \Delta s_2$).

Se $A_1 = A_2$, então $\Delta s_1 > \Delta s_2$.

Ora, se na região do periélio, num intervalo de tempo de mesma duração, o planeta percorre um espaço maior que o percorrido na região do afélio, podemos dizer que sua velocidade escalar média de translação é maior na região do periélio que na do afélio.

No periélio, o planeta tem velocidade de translação com intensidade **máxima**, enquanto no afélio ele tem velocidade de translação com intensidade **mínima**.

Isso nos mostra que o movimento de um planeta que descreve órbita elíptica em torno do Sol **não é uniforme**. Do afélio para o periélio, o movimento é **acelerado**, e, do periélio para o afélio, o movimento é **retardado**.

A explicação para esse mecanismo está na **força de atração gravitacional** que o Sol exerce no planeta. Essa força, que está sempre dirigida para o centro de massa do Sol, foi descrita por Newton, como veremos detalhadamente no Bloco 2 deste Tópico.

Observe na figura a seguir que, do afélio para o periélio, a força gravitacional admite uma componente tangencial no sentido da velocidade, ocorrendo o contrário do periélio para o afélio.

Destacamos que:

O movimento será **uniforme** no caso particular de planetas descrevendo órbitas circulares.

3ª Lei – Lei dos períodos

Para qualquer planeta do Sistema Solar, é **constante** o quociente do cubo do raio médio da órbita, R^3, pelo quadrado do período de revolução (ou translação), T^2, em torno do Sol.

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

A constante K_p denomina-se **constante de Kepler** e seu valor depende apenas da massa do Sol e das unidades de medida.

Na tabela abaixo, estão relacionados os oito planetas do Sistema Solar com seus respectivos raios médios de órbita (**R**) e períodos de revolução (**T**). Na coluna à direita, aparecem os valores do quociente $\frac{R^3}{T^2}$ para cada caso.

Planeta	Raio médio da órbita (UA)	Período de revolução (dias)	$\frac{R^3}{T^2}$ (UA³/dias²)
Mercúrio	0,389	87,77	$7{,}64 \cdot 10^{-6}$
Vênus	0,724	224,70	$7{,}52 \cdot 10^{-6}$
Terra	1,000	365,25	$7{,}50 \cdot 10^{-6}$
Marte	1,524	686,98	$7{,}50 \cdot 10^{-6}$
Júpiter	5,200	4332,62	$7{,}49 \cdot 10^{-6}$
Saturno	9,510	10759,20	$7{,}43 \cdot 10^{-6}$
Urano	19,261	30787,03	$7{,}54 \cdot 10^{-6}$
Netuno	30,201	60185,18	$7{,}60 \cdot 10^{-6}$

TF1-230_259_5P_P2T4.indd 235 16/08/12 17:29

Note que o período de revolução cresce com o raio médio da órbita descrita pelo planeta em torno do Sol. Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol e, por isso, é o que tem o menor ano (aproximadamente 88 dias terrestres). Netuno é o planeta mais afastado do Sol e, por isso, é o que tem maior ano (aproximadamente 165 anos terrestres).

3. Universalidade das leis de Kepler

As três leis de Kepler apresentadas até aqui são **universais**, isto é, valem para o Sistema Solar a que pertencemos e também para qualquer outro sistema do Universo em que exista uma grande massa central em torno da qual gravitem massas menores. O planeta Júpiter e seus dezesseis satélites, por exemplo, constituem um sistema desse tipo. O mesmo ocorre com Marte e seus satélites Deimos e Fobos.

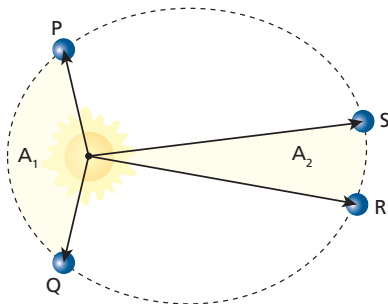
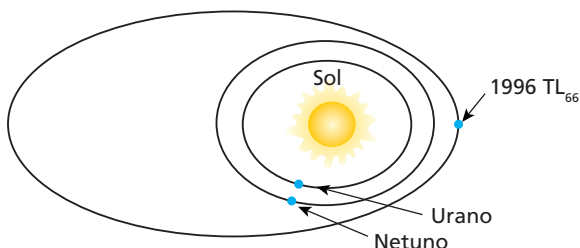
Em torno da Terra, gravitam a Lua e centenas de satélites artificiais, além de muita sucata espacial. Nessa situação, podemos aplicar as três leis de Kepler, com a Terra fazendo o papel de "Sol" e os citados corpos, o papel de "planetas".

Nesta imagem, um ônibus espacial coloca um satélite em órbita da Terra. Quanto maior for o raio médio da órbita do satélite, maior será seu período de revolução ao redor do planeta.

Exercícios

nível 1

1. Adotando o Sol como referencial, aponte a alternativa que condiz com a 1ª Lei de Kepler da Gravitação (Lei das órbitas):
a) As órbitas planetárias são quaisquer curvas, desde que fechadas.
b) As órbitas planetárias são espiraladas.
c) As órbitas planetárias não podem ser circulares.
d) As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando o centro da elipse.
e) As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.

2. Na figura a seguir, está representada a órbita elíptica de um planeta em torno do Sol:
a) Se os arcos de órbita PQ e RS são percorridos em intervalos de tempo iguais, qual a relação entre as áreas A_1 e A_2?
b) Em que lei física você se baseou para responder ao item **a**?

3. (PUC-MG) A figura abaixo representa o Sol, três astros celestes e suas respectivas órbitas em torno do Sol: Urano, Netuno e o objeto recentemente descoberto [década de 1990], de nome 1996 TL_{66}.

Analise as afirmativas a seguir:
I. Essas órbitas são elípticas, estando o Sol em um dos focos dessas elipses.
II. Os três astros representados executam movimento uniforme em torno do Sol, cada um com um valor de velocidade diferente do dos outros.
III. Dentre os astros representados, quem gasta menos tempo para completar uma volta em torno do Sol é Urano.

Indique:
a) se todas as afirmativas são corretas.
b) se todas as afirmativas são incorretas.
c) se apenas as afirmativas I e II são corretas.
d) se apenas as afirmativas II e III são corretas.
e) se apenas as afirmativas I e III são corretas.

4. A 2ª Lei de Kepler (Lei das áreas) permite concluir que:
a) as áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são diretamente proporcionais aos quadrados dos respectivos intervalos de tempo gastos;
b) a intensidade da velocidade de um planeta ao longo de sua órbita em torno do Sol é máxima no periélio;
c) a intensidade da velocidade de um planeta ao longo de sua órbita em torno do Sol é máxima no afélio;
d) o intervalo de tempo gasto pelo planeta em sua translação do afélio para o periélio é maior que o intervalo de tempo gasto por ele na translação do periélio para o afélio;
e) o movimento de translação de um planeta em torno do Sol é uniforme, já que sua velocidade areolar é constante.

5. O astrônomo alemão Johannes Kepler apresentou três generalizações a respeito dos movimentos planetários em torno do Sol, conhecidas como Leis de Kepler.
Fundamentado nessas leis, analise as proposições a seguir:
(01) O quociente do cubo do raio médio da órbita pelo quadrado do período de revolução é constante para qualquer planeta do Sistema Solar.

(02) Quadruplicando-se o raio médio da órbita, o período de revolução de um planeta em torno do Sol fica octuplica.
(04) Quanto mais próximo do Sol (menor raio médio de órbita) gravitar um planeta, maior será seu período de revolução.
(08) No Sistema Solar, o período de revolução dos planetas em torno do Sol cresce de Mercúrio para Netuno.
(16) Quando a Terra está mais próxima do Sol (região do periélio), a estação predominante no planeta é o verão.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

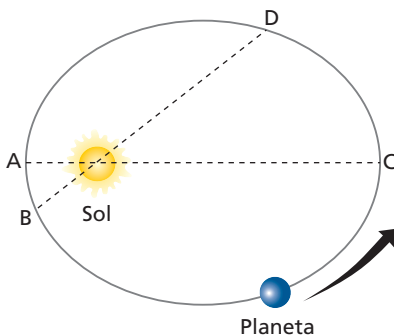
6. (Cesgranrio-RJ) Um satélite de telecomunicações está em sua órbita ao redor da Terra com período **T**. Uma viagem do Ônibus Espacial fará a instalação de novos equipamentos nesse satélite, o que duplicará sua massa em relação ao valor original. Considerando que permaneça com a mesma órbita, seu novo período T' será:

a) $T' = 9T$
b) $T' = 3T$
c) $T' = T$
d) $T' = \frac{1}{3}T$
e) $T' = \frac{1}{9}T$

Exercícios

nível 2

7. Com relação às Leis de Kepler, podemos afirmar que:
a) não se aplicam ao estudo da gravitação da Lua em torno da Terra;
b) só se aplicam ao Sistema Solar a que pertencemos;
c) aplicam-se à gravitação de quaisquer corpos em torno de uma grande massa central;
d) contrariam a Mecânica de Newton;
e) não preveem a possibilidade da existência de órbitas circulares.

8. (Unicamp-SP) A figura a seguir representa a órbita descrita por um planeta em torno do Sol. O sentido de percurso está indicado pela seta. Os pontos **A** e **C** são colineares com o Sol, o mesmo ocorrendo com os pontos **B** e **D.** O ponto **A** indica o local de maior aproximação do planeta em relação ao Sol e o ponto **C**, o local de maior afastamento.

a) Em que ponto da órbita o planeta tem velocidade de translação com intensidade máxima? E em que ponto sua velocidade de translação tem intensidade mínima?
b) Segundo Kepler, a linha imaginária que liga o planeta ao centro do Sol "varre" áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Fundamentado nessa informação, coloque em **ordem crescente** os intervalos de tempo necessários para o planeta realizar os seguintes percursos: ABC, BCD, CDA e DAB.

9. E.R. Considere um planeta hipotético gravitando em órbita circular em torno do Sol. Admita que o raio da órbita desse planeta seja o quádruplo do raio da órbita da Terra. Nessas condições, qual o período de translação do citado planeta, expresso em anos terrestres?

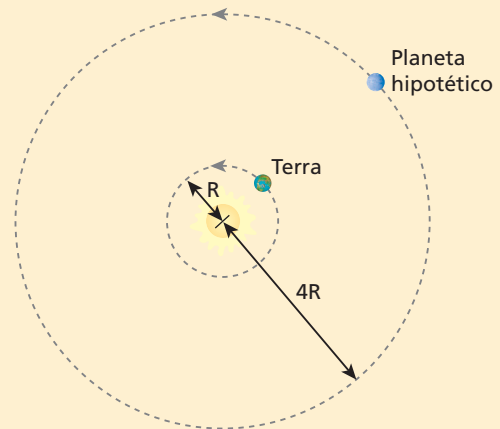
Resolução:

Sejam:

r_T : raio da órbita da Terra ($r_T = R$);

r_H : raio da órbita do planeta hipotético ($r_H = 4R$);

T_T : período de translação da Terra (ano da Terra);

T_H : período de translação do planeta hipotético (ano do planeta).

Aplicando a **3ª Lei de Kepler** (Lei dos períodos) para os dois planetas, temos:

$$\frac{r^3}{T^2} = K_p \text{ (constante de Kepler)}$$

Assim:

• para o planeta hipotético: $\frac{r_H^3}{T_H^2} = K_p$ (I)

• para a Terra: $\frac{r_T^3}{T_T^2} = K_P$ (II)

Comparando (I) e (II), segue que:

$$\frac{r_H^3}{T_H^2} = \frac{r_T^3}{T_T^2} \Rightarrow T_H^2 = \left(\frac{r_H}{r_T}\right)^3 T_T^2$$

Como estabelecemos que $r_H = 4R$ e $r_T = R$, temos:

$$T_H^2 = \left(\frac{4R}{R}\right)^3 T_T^2 \Rightarrow T_H^2 = 64T_T^2$$

$$\boxed{T_H = 8T_T}$$

Logo:

O ano do planeta hipotético é oito vezes o terrestre.

10. Dois satélites de um planeta hipotético têm períodos de revolução iguais a 32 dias e 256 dias, respectivamente. Se o raio da órbita do primeiro satélite vale 5 unidades, qual o raio da órbita do segundo?

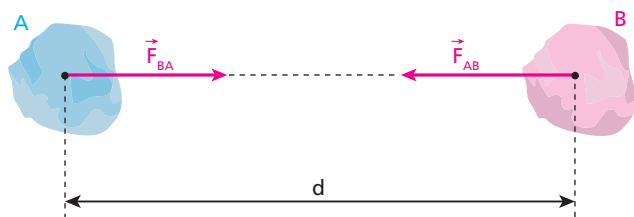
11. Em torno de um planeta fictício gravitam, em órbitas circulares e coplanares, dois satélites naturais: Taurus e Centaurus. Sabendo que o período de revolução de Taurus é 27 vezes o de Centaurus e que o raio da órbita de Centaurus vale **R**, determine:
a) o raio da órbita de Taurus;
b) o intervalo de valores possíveis para a distância que separa os dois satélites durante seus movimentos em torno do planeta.

12. Admita que o período de revolução da Lua em torno da Terra seja de 27 dias e que o raio da sua órbita valha 60 R, sendo **R** o raio da Terra. Considere um satélite geoestacionário, desses utilizados em telecomunicações. Em relação ao referido satélite, responda:
a) Qual o período de revolução?
b) Qual o raio de órbita?

Bloco 2

4. Lei de Newton da atração das massas

No ano de 1665, uma grande epidemia de peste assolou a Inglaterra. Buscando refugiar-se, Isaac Newton interrompeu suas atividades na Universidade de Cambridge, que foi fechada na ocasião, e retornou a Woolsthorpe, localidade em que seus familiares mantinham uma pequena propriedade rural. Foi nessa ocasião, na tranquilidade do campo, que Newton viveu, aos 23 anos, uma das fases mais fecundas de sua vida como homem de ciência. Apoiado nos trabalhos de seus antecessores (Copérnico, Galileu e Kepler), ele enunciou uma lei de âmbito universal, que trouxe nova luz ao conhecimento da época. A Lei de Newton da Atração das Massas é um dos mais notáveis trabalhos de seu autor, constituindo-se em um dos instrumentos que deu sustentação matemática às teorias da Mecânica Clássica.

Considere a figura seguinte, em que os corpos **A** e **B**, de massas m_A e m_B, respectivamente, têm seus centros de gravidade separados por uma distância **d**.

Newton verificou que os dois corpos se atraem mutuamente, trocando forças de **ação** e **reação**. O corpo **A** age no corpo **B** com uma força $\vec{F}_{AB}$, enquanto **B** reage em **A** com uma força $\vec{F}_{BA}$, de mesma intensidade que $\vec{F}_{AB}$.

Temos, então, que:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad \text{(vetorialmente)}$$

$$F_{AB} = F_{BA} \quad \text{(em módulo)}$$

As forças trocadas por **A** e **B** têm a mesma natureza daquela responsável pela manutenção da Lua em sua órbita em torno da Terra e também daquela responsável pela queda de corpos nas vizinhanças de um astro: são forças atrativas de **origem gravitacional**.

As intensidades de $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{BA}$ são diretamente proporcionais ao produto das massas m_A e m_B, mas inversamente proporcionais ao quadrado da distância **d**.

Representando por **F** a intensidade de $\vec{F}_{AB}$ ou de $\vec{F}_{BA}$, podemos escrever que:

$$F = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

A constante **G** denomina-se **Constante da Gravitação** e seu valor numérico, num mesmo sistema de unidades, **independe do meio** em que os corpos se encontram.

Foi o físico e químico inglês Henry Cavendish (1731-1810) quem, em 1798, obteve a primeira medida precisa para a Constante da Gravitação. Utilizando uma balança de torção, ele mediu a intensidade da força atrativa entre dois pares de corpos de massas conhecidas e, a partir dos dados obtidos, calculou o valor de **G**.

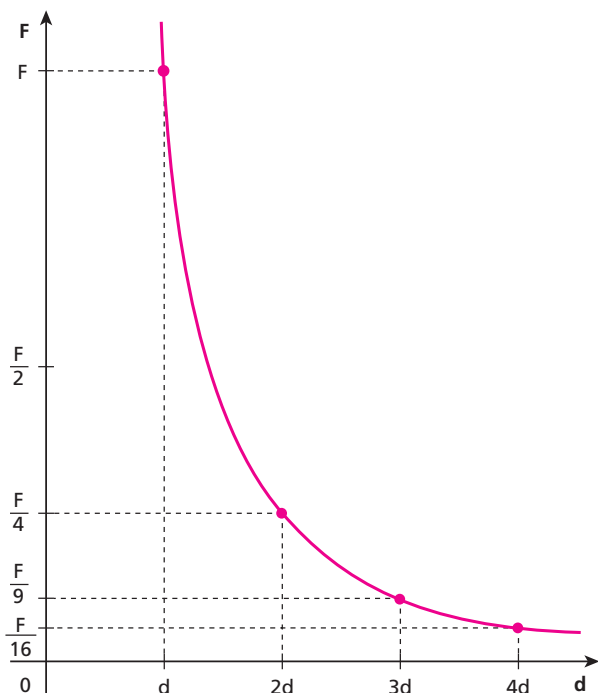
Atualmente, o valor aceito para **G** é:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2$$

Vamos agora estudar como varia a intensidade (**F**) da força de atração gravitacional entre dois corpos de massas **M** e **m** em função da distância **d** entre seus centros de gravidade.

Levando em consideração que **F** é inversamente proporcional ao quadrado de **d**, temos a tabela:

Distância	d	2d	3d	4d
Força	F	$\frac{F}{4}$	$\frac{F}{9}$	$\frac{F}{16}$

A variação de **F** em função de **d** pode ser observada neste diagrama:

Nota:

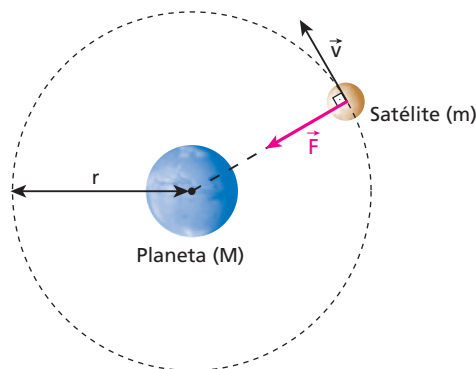
- Dois corpos quaisquer sempre interagem gravitacionalmente, atraindo-se. Entretanto, pelo fato de o valor de **G** ser muito pequeno ($6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI), a intensidade da força atrativa só se torna apreciável se pelo menos uma das massas for consideravelmente grande. É por isso que duas pessoas, por exemplo, se atraem gravitacionalmente, mas com forças de intensidade tão pequena que seus efeitos passam despercebidos. A força de atração gravitacional adquire intensidade considerável quando um dos corpos é, por exemplo, um planeta e, além disso, a distância envolvida é relativamente pequena.

Thinkstock/Getty Images

A Terra e a Lua atraem-se gravitacionalmente trocando forças de ação e reação. É devido à força recebida da Terra que a Lua mantém-se em órbita ao seu redor, realizando uma volta completa em, aproximadamente, 27 dias.

5. Satélites

Estudo do movimento de um satélite genérico

Considere a figura a seguir, em que um satélite genérico de massa **m** gravita em órbita circular em torno de um planeta de massa **M**. Representemos por **r** o raio da órbita e por **G** a Constante da Gravitação.

Como prevê, por exemplo, a **2ª Lei de Kepler**, se a órbita descrita pelo satélite é circular, seu movimento é **uniforme**.

Determinação da velocidade orbital (v)

A força gravitacional que o satélite recebe do planeta é a **resultante centrípeta** no seu movimento circular e uniforme.

$$F = F_{cp}$$

Mas: $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ e $F_{cp} = \dfrac{mv^2}{r}$

Assim: $G\dfrac{Mm}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r}$

Logo: $$v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$$

Observe que **v** independe da massa do satélite, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada de **r**.

Determinação do período de revolução (T)

Como o satélite realiza movimento circular e uniforme, temos que:

$$v = \frac{2\pi\, r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi\, r}{v}$$

Sendo $v = v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{r}}$, segue que:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^2}{\frac{GM}{r}}}$$

Donde: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Note que **T** também independe da massa do satélite, sendo proporcional à raiz quadrada do cubo de **r**. Se um outro satélite, com massa diferente do primeiro, descrevesse a mesma órbita, esta seria percorrida com o mesmo período de revolução.

Ao formular a Lei da Atração das Massas, Newton pôde demonstrar matematicamente a 3ª Lei de Kepler. Seguindo um raciocínio semelhante ao que desenvolvemos para obter a equação do período de revolução, ele confirmou que, para qualquer corpo em órbita de uma grande massa central, o quociente $\frac{r^3}{T^2}$ é **constante**. A constante, denominada constante de Kepler no caso do Sistema Solar, nada mais é que o quociente $\frac{GM}{4\pi^2}$ e, de fato, só depende da massa central (**M**).

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \textbf{constante}$$

Determinação da velocidade areolar

Quando o satélite realiza uma volta completa em sua órbita, seu vetor-posição em relação ao centro do planeta varre uma área $A = \pi r^2$ durante um intervalo de tempo $\Delta t = T$.

Da **2ª Lei de Kepler**, sabemos que:

$$A = v_a \Delta t \Rightarrow v_a = \frac{A}{\Delta t}$$

Com $A = \pi r^2$ e $\Delta t = T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$, calculemos v_a:

$$v_a = \frac{A}{\Delta t} \Rightarrow v_a = \frac{\pi r^2}{2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

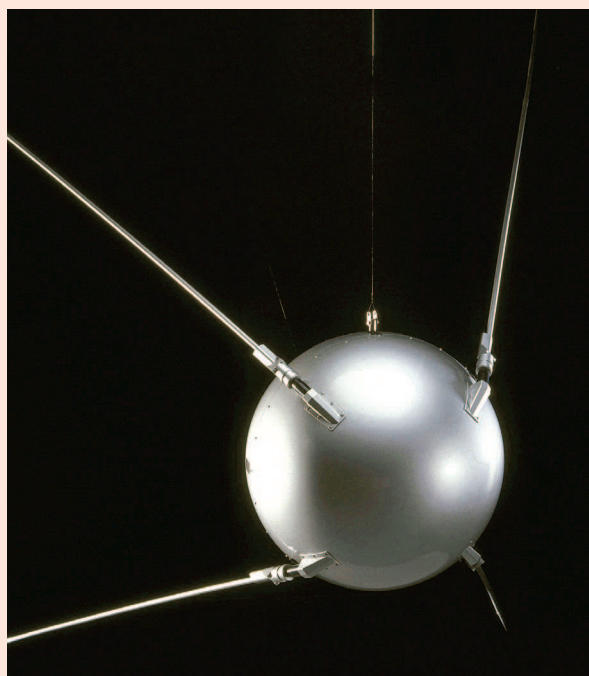
Logo: $$v_a = \frac{1}{2}\sqrt{GMr}$$

Da mesma forma que **v** e **T**, a velocidade areolar v_a independe da massa do satélite, mas depende do raio da órbita (**r**) e da massa do planeta (**M**) que, no caso, faz o papel de "Sol".

Leitura

Satélites estacionários

A saga dos satélites artificiais teve início em 4 de outubro de 1957 quando foi colocado em órbita o *Sputnik*, fabricado pela então União Soviética. Esse artefato deu início à corrida espacial, que envolveu as duas superpotências da época, Estados Unidos e União Soviética. A busca pela supremacia espacial, que incluiu o desenvolvimento de satélites "espiões", exacerbou a "guerra fria" entre as duas nações.

Idealizados por Arthur C. Clarke (1917-2008), inventor e autor de ficção científica inglês, em um artigo de 1945, os satélites estacionários – ou geoestacionários – são utilizados essencialmente para observação de pontos específicos da Terra e em telecomunicações, prestando-se, sobretudo, à telefonia e à transmissão de sinais de TV. Recebem e transmitem micro-ondas de frequências compreendidas entre 1 GHz e 10 GHz. Essas radiações têm a propriedade de atravessar facilmente a ionosfera, tanto em direção ao satélite como no retorno, rumo a antenas captadoras na superfície do planeta.

Science Museum, London /Diomedia

O *Sputnik* foi o pioneiro. Lançado pelos soviéticos, esse satélite, de forma esférica, permaneceu 22 dias em órbita baixa e obteve dados importantes a respeito das altas camadas da atmosfera terrestre.

Satélite: a Física nas comunicações

Os satélites estacionários descrevem órbitas circulares contidas no plano equatorial, no mesmo sentido da rotação da Terra, e recebem esse nome por permanecerem sempre parados em relação ao solo. Por exemplo, um satélite geoestacionário sobre a cidade de Macapá, situada na linha do Equador, quando visualizado por alguém naquela localidade, sempre será observado imóvel e no zênite (a pino).

O período de translação desses satélites deve ser igual ao período de rotação da Terra, isto é $T = 1 \text{ dia} = 24 \text{ h} = 8{,}64 \cdot 10^4 \text{ s}$. Pode-se dizer também que os satélites estacionários deslocam-se em sua órbita com velocidade angular ω igual à velocidade angular de rotação do planeta.

Para permanecer parado em relação à superfície terrestre, um satélite estacionário deve descrever uma órbita de raio **R** bastante específica. É a chamada órbita *Clarke*.

Mike Agliolo/Latinstock

Vivemos hoje a era das comunicações. Esse novo tempo é possibilitado pela tecnologia, que coloca à nossa disposição a telefonia, a televisão e a internet. O tráfego de dados eletrônicos é feito em grande parte "via satélite", como sugere a ilustração acima (com tamanhos e distâncias fora de escala). Ondas eletromagnéticas contendo informações são transmitidas para satélites estacionários que as devolvem para a Terra, dirigindo-as aos locais de recepção.

Considerando-se a massa da Terra $M \cong 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg e a constante da Gravitação $G \cong 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, determinemos o raio **R** da órbita dos satélites estacionários.

A força de atração gravitacional exercida pela Terra desempenha o papel de resultante centrípeta no movimento circular e uniforme do satélite.

$$F = F_{cp} \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow G\frac{M}{R^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

Da qual:

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2 G\, M}{4\pi^2}}$$

Adotando-se $\pi \cong 3{,}14$ e substituindo-se os valores de **T**, **G** e **M**, vem:

$$R = \sqrt[3]{\frac{(8{,}64 \cdot 10^4)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{4 \cdot (3{,}14)^2}} \text{ (m)}$$

Da qual:

$$\boxed{R \cong 42\,265 \text{ km}}$$

Observando-se que o raio da Terra é $R_T \cong 6\,370$ km, a altura do satélite estacionário em relação à superfície terrestre é $H = R - R_T$. Dessa forma, o valor de **H** fica determinado por:

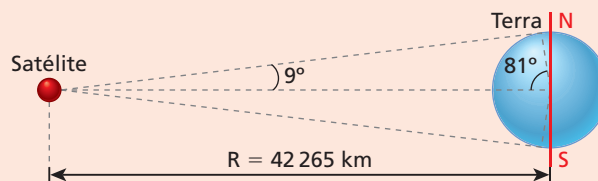
$$H \cong 42\,265 - 6\,370 \text{ (km)}$$

Logo:

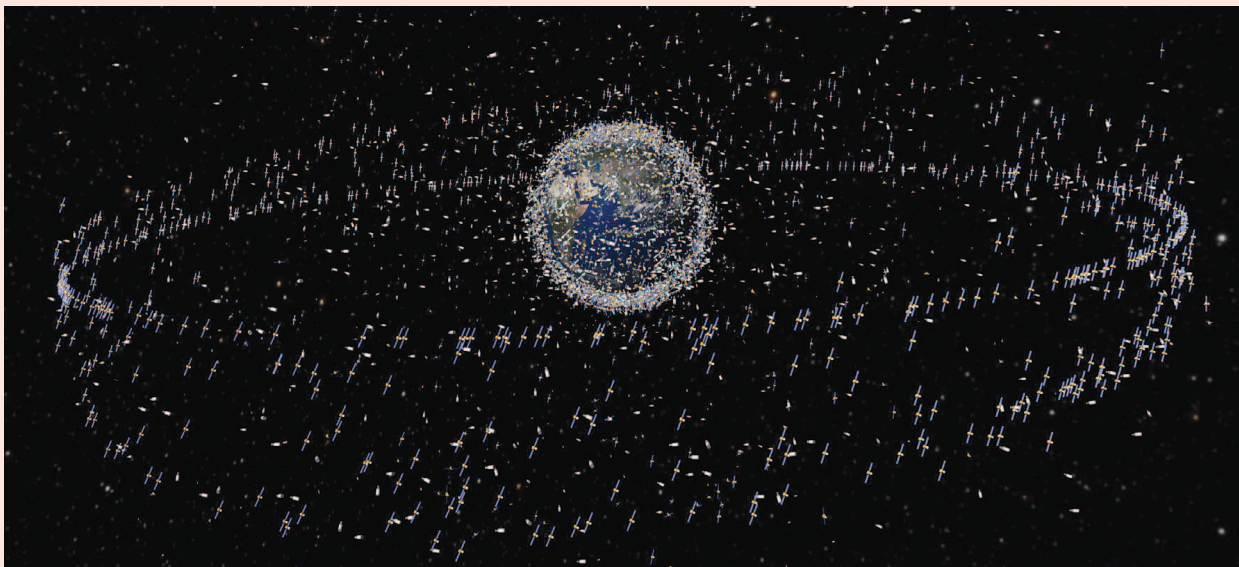
$$\boxed{H \cong 35\,895 \text{ km}}$$

Tendo em conta os dados oferecidos, calcule em km/h a intensidade da velocidade de translação $\vec{V}$ do satélite estacionário. Verifique que essa velocidade é próxima de $11\,059\frac{km}{h}$.

O telescópio *Hubble*, que descreve uma órbita praticamente circular em torno da Terra, a aproximadamente 600 km de altitude em relação ao solo, desloca-se em sua trajetória com que velocidade em km/h? Utilize os dados disponíveis neste texto, faça os cálculos e verifique que a citada velocidade é cerca de $27\,233\frac{km}{h}$.

Levando-se em consideração aspectos puramente geométricos, cada satélite estacionário pode cobrir uma vasta região da superfície terrestre, como pode ser observado na ilustração a seguir, elaborada fora de escala, mas de acordo com os valores mencionados e determinados acima. O território brasileiro, por exemplo, poderia ser abrangido por um único satélite posicionado sobre a região amazônica.

Na órbita dos satélites estacionários há mais de uma centena de artefatos em operação, pertencentes a vários países e corporações. Como todos trafegam no mesmo sentido e com a mesma velocidade linear, não ocorrem colisões entre eles. Pequenas correções de órbita podem ser realizadas por meio de autopropulsão controlada – geralmente minifoguetes acoplados a cada equipamento.

Mas satélites em geral têm vida útil determinada. Depois de esgotarem suas baterias e outros sistemas se deteriorarem, transformam-se em lixo espacial.

Atualmente, gravitam ao redor da Terra cerca de 30 000 objetos, que vão de ferramentas e pequenas peças largadas por astronautas da Estação Espacial Internacional até grandes corpos, como satélites e antigas bases espaciais. Alguns desses corpos acabam despencando, acelerados e atraídos pelo campo gravitacional do planeta, mas, para sorte da população, desintegram-se ao adentrar a atmosfera, e os pequenos fragmentos que não se desmancham caem em grande número nos oceanos, mares e regiões desabitadas.

Newscom/Glow Images

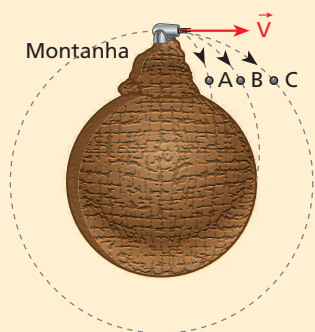
Nesta ilustração, representa-se o lixo especial que gravita ao redor da Terra: cerca de 30 000 objetos. Fragmentos de tamanho avantajado, com velocidades da ordem de 10^4 km/h, constituem perigo iminente a satélites e para astronautas em missão fora das respectivas naves espaciais.

Para saber mais:

<http://www.geocities.ws/saladefisica5/leituras/satelites.html>

Acesso em: 25 jul. 2012.

Lançamento horizontal com entrada em órbita

Sabe-se que Newton unificou as ideias de Galileu e Kepler ao identificar a órbita da Lua como equivalente ao movimento de um projétil. O raciocínio de Newton foi o seguinte: imagine um canhão no topo de uma montanha muito alta, como mostrado esquematicamente, fora de escala, na figura:

A trajetória de um projétil disparado pelo canhão vai depender de sua velocidade inicial. Na ausência de gravidade ou resistência do ar, o movimento do projétil seria uma linha reta com velocidade constante, conforme determinado pelo princípio da inércia; mas a gravidade deflete a trajetória do projétil, fazendo-o cair com aceleração vertical. Se sua velocidade inicial for pequena, o projétil cairá perto da base da montanha (trajetória **A**). De acordo com essas ideias, é possível imaginar que, se aumentássemos a potência do canhão, no final o projétil teria uma velocidade horizontal suficiente para, simplesmente, "continuar caindo". Embora esteja sendo atraído continuamente para baixo pela força gravitacional, ele nunca vai bater no chão. Ou seja, o projétil entraria em órbita (trajetória **C**), e viraria um satélite da Terra.

Considerando um corpo de massa **m** em órbita rasante (raio da órbita praticamente igual ao raio **R** terrestre), calculemos a intensidade **v** da velocidade de lançamento.

O peso faz o papel de resultante centrípeta, logo:

$$P = F_{cp} \Rightarrow m\,g = \frac{m\,v^2}{R}$$

Daí: $$v = \sqrt{g\,R}$$

Sendo $g \cong 10\ m/s^2$ a aceleração da gravidade nas proximidades da Terra e $R \cong 6{,}4 \cdot 10^6$ m o raio do planeta, vem:

$$v = \sqrt{10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}\ (m/s)$$

$$\boxed{v = 8{,}0 \cdot 10^3\ m/s = 8{,}0\ km/s}$$

Em km/h, a velocidade calculada fica expressa por:

$$v = 8{,}0 \cdot 10^3 \cdot 3{,}6\ (km/h) \Rightarrow \boxed{v = 28\,800\ km/h}$$

A velocidade determinada tem a denominação de **velocidade cósmica primeira**.

Observe que essa velocidade independe da massa do corpo.

Leitura

A Estação Espacial Internacional (EEI)

O fim da Guerra Fria provocou sensíveis distensões nas relações entre Estados Unidos e Rússia, os quais passaram a adotar políticas de cooperação mútua e parcerias tecnológicas. O sonho norte-americano de construir uma base espacial maior e mais moderna que a soviética Mir, colocada em órbita em 1986 e notabilizada por abrigar astronautas por longos períodos de tempo, de um ano ou mais, ganhou contornos concretos, já que o ideal envolveu e agregou também outras nações.

Associaram-se às duas nações outros quatorze países – o Canadá, o Japão, o Brasil (único país emergente a integrar o consórcio) e onze países da Europa –, cada qual com direito de utilização proporcional aos investimentos financeiros aplicados e às contribuições tecnológicas propostas. O grupo elaborou, então, um ambicioso projeto, orçado em cerca de 100 bilhões de dólares, prevendo a construção de uma gigantesca base a ser montada em etapas, denominada Estação Espacial Internacional (EEI). Em novembro de 1998, foram lançados os primeiros módulos, iniciando-se assim uma sucessão de acoplagens e conexões em pleno espaço, com conclusão prevista para esta década.

Depois de pronta, a EEI terá 450 toneladas e abrangerá uma área equivalente a quase dois campos de futebol, com 110 m de comprimento por 80 m de largura. Ela poderá ser vista da Terra, inclusive durante o dia, constituindo-se no corpo mais brilhante no céu depois do Sol e da Lua. Sua órbita, que tem altura média de 407 km em relação à superfície terrestre, é percorrida a cada 1 h 30 min a uma velocidade próxima de 28 000 km/h, o que lhe possibilita percorrer a distância entre Rio de Janeiro e Paris em apenas 20 min.

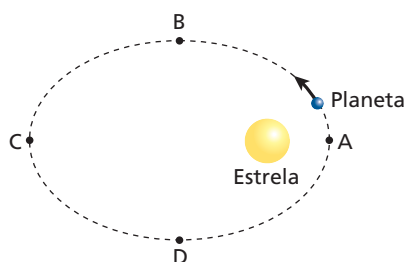
Em plena operação, a EEI servirá de ponto de partida para outras missões de exploração do cosmo. Em razão de sua inclinação de 51,6 graus em relação ao Equador, será um posto privilegiado de observação da Terra, já que praticamente a totalidade do planeta (85% da sua área superficial) poderá ser visualizada e monitorada. Fenômenos meteorológicos serão mais bem avaliados. Cientistas dos países signatários do ousado empreendimento poderão realizar experimentos em ambiente de microgravidade, verificando o comportamento de substâncias e organismos vivos – até do próprio ser humano – submetidos a essas condições, o que permitirá o desenvolvimento de novos materiais, procedimentos técnicos, terapias e medicamentos. Será possível criar tecnologias mais avançadas para diversas áreas, como robótica, computação e telecomunicações.

NASA

Fotomontagem da EEI elaborada pela Nasa. A estação é um superlaboratório que comporta até sete astronautas de cada vez. Nesta imagem, ela está passando sobre o Estreito de Gibraltar.

Exercícios

nível 1

13. (UFRGS-RS) Um planeta descreve trajetória elíptica em torno de uma estrela que ocupa um dos focos da elipse, conforme indica a figura abaixo. Os pontos **A** e **C** estão situados sobre o eixo maior da elipse e os pontos **B** e **D**, sobre o eixo menor.

Se t_{AB} e t_{BC} forem os intervalos de tempo para o planeta percorrer os respectivos arcos de elipse, e se $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ forem, respectivamente, as forças resultantes sobre o planeta nos pontos **A** e **B**, pode-se afirmar que:

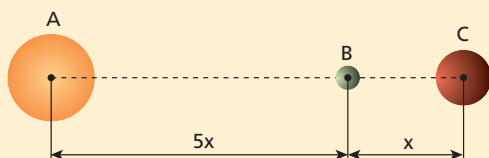
a) $t_{AB} < t_{BC}$ e que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ apontam para o centro da estrela.
b) $t_{AB} < t_{BC}$ e que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ apontam para o centro da elipse.
c) $t_{AB} = t_{BC}$ e que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ apontam para o centro da estrela.
d) $t_{AB} = t_{BC}$ e que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ apontam para o centro da elipse.
e) $t_{AB} > t_{BC}$ e que $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ apontam para o centro da estrela.

14. Duas partículas de massas respectivamente iguais a **M** e **m** estão no vácuo, separadas por uma distância **d**. A respeito das forças de interação gravitacional entre as partículas, podemos afirmar que:

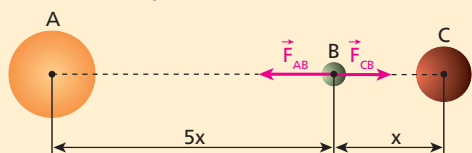
a) têm intensidade inversamente proporcional a **d**.
b) têm intensidade diretamente proporcional ao produto M m.
c) não constituem entre si um par ação-reação.
d) podem ser atrativas ou repulsivas.
e) teriam intensidade maior se o meio fosse o ar.

15. (Unifor-CE) A força de atração gravitacional entre dois corpos de massas **M** e **m**, separados de uma distância **d**, tem intensidade **F**. Então, a força de atração gravitacional entre dois outros corpos de massas $\frac{M}{2}$ e $\frac{m}{2}$, separados de uma distância $\frac{d}{2}$, terá intensidade:

a) $\frac{F}{4}$ b) $\frac{F}{2}$ c) F d) 2F e) 4F

16. E.R. Considere uma estrela **A** e dois planetas **B** e **C** alinhados em determinado instante, conforme indica a figura. A massa de **A** vale 200 M e as massas de **B** e **C**, **M** e **2M**, respectivamente.

Sendo dada a distância **x** e a Constante da Gravitação (**G**), calcule, no instante da figura, a intensidade da força resultante das ações gravitacionais de **A** e **C** sobre **B**.

Resolução:

O planeta **B** é atraído gravitacionalmente pela estrela **A** e pelo planeta **C**, recebendo, respectivamente, as forças $\vec{F}_{AB}$ e $\vec{F}_{CB}$, representadas no esquema abaixo:

As intensidades de $\vec{F}_{AB}$ e de $\vec{F}_{CB}$ ficam determinadas pela **Lei de Newton da Atração das Massas**.

$$F_{AB} = G\frac{200M \cdot M}{(5x)^2} \Rightarrow F_{AB} = 8G\frac{M^2}{x^2}$$

$$F_{CB} = G\frac{2M \cdot M}{x^2} \Rightarrow F_{CB} = 2G\frac{M^2}{x^2}$$

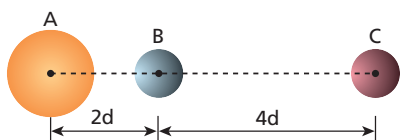
A intensidade (**F**) da força resultante das ações gravitacionais de **A** e **C** sobre **B** é calculada por:

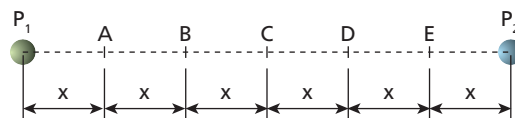
$$F = F_{AB} - F_{CB} \Rightarrow F = 8G\frac{M^2}{x^2} - 2G\frac{M^2}{x^2}$$

Logo:

$$\boxed{F = 6G\frac{M^2}{x^2}}$$

Nota:
• A força resultante calculada é dirigida para a estrela A.

17. Em determinado instante, três corpos celestes **A**, **B** e **C** têm seus centros de massa alinhados e distanciados, conforme mostra o esquema abaixo:

Sabendo que as massas de **A**, **B** e **C** valem, respectivamente, **5M**, **2M** e **M**, determine a relação entre as intensidades das forças gravitacionais que **B** recebe de **A** e de **C**.

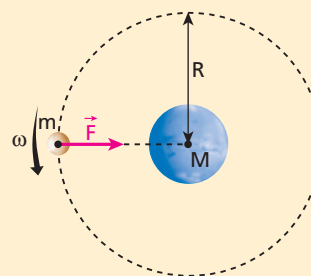
18. Na situação esquematizada na figura, os corpos P_1 e P_2 estão fixos nas posições indicadas e suas massas valem **8M** e **2M** respectivamente.

Deve-se fixar no segmento que une P_1 a P_2 um terceiro corpo P_3, de massa **M**, de modo que a força resultante das ações gravitacionais dos dois primeiros sobre este último seja **nula**. Em que posição deve-se fixar P_3?

a) A b) B c) C d) D e) E

19. E.R. Um satélite de massa **m** descreve uma órbita circular de raio **R** em torno de um planeta de massa **M**. Sendo **G** a Constante da Gravitação, responda:

a) Qual a velocidade angular **ω** do satélite?
b) O valor de **ω** depende de **m**?

Resolução:

a)

A força gravitacional $\vec{F}$ desempenha a função de **resultante centrípeta** no movimento circular e uniforme do satélite.

$$F = F_{cp}$$

Sendo $F = G\frac{Mm}{R^2}$ e $F_{cp} = m\,\omega^2 R$, vem:

$$G\frac{M\,m}{R^2} = M\omega^2 R \Rightarrow \frac{G\,M}{R^3} = \omega^2$$

Então:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{G\,M}{R^3}}}$$

b) O valor de **ω independe** de **m**.

Nota:
• Satélites diferentes percorrendo uma mesma órbita circular não colidem entre si, já que suas velocidades angulares são iguais.

20. (UEL-PR) O planeta Vênus descreve uma trajetória praticamente circular de raio $1{,}0 \cdot 10^{11}$ m ao redor do Sol. Sendo a massa de Vênus igual a $5{,}0 \cdot 10^{24}$ kg e seu período de translação 224,7 dias ($2{,}0 \cdot 10^7$ segundos), pode-se afirmar que a força exercida pelo Sol sobre Vênus é, em newtons, aproximadamente:

a) $5{,}0 \cdot 10^{22}$
b) $5{,}0 \cdot 10^{20}$
c) $2{,}5 \cdot 10^{15}$
d) $5{,}0 \cdot 10^{13}$
e) $2{,}5 \cdot 10^{11}$

21. (Fuvest-SP) Um satélite artificial move-se em órbita circular ao redor da Terra, ficando permanentemente sobre a cidade de Macapá.

a) Qual o período de revolução do satélite em torno da Terra?
b) Por que o satélite não cai sobre a cidade?

Exercícios nível 2

22. Sabemos que a Constante da Gravitação vale, aproximadamente, $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Nessas condições, qual é a ordem de grandeza, em newtons, da força de atração gravitacional entre dois navios de 200 toneladas de massa cada um, separados por uma distância de 1,0 km?

a) 10^{-11}
b) 10^{-6}
c) 10^{-1}
d) 10^{5}
e) 10^{10}

23. **"Nasa quer construir base espacial próxima à Lua**

Embora a construção da Estação Espacial Internacional (EEI) ainda esteja longe de acabar, a NASA está fazendo de tudo para deixar claro que seu programa espacial tripulado não para por aí. Durante o Congresso Espacial Mundial, que começou na última quinta-feira e vai até sábado, em Houston, EUA, a agência espacial norte-americana apresentou o próximo item em sua lista de prioridades aeronáuticas: uma nova base no espaço. (...)

A base, apelidada de L_1 *Gateway*, ficaria mais de 800 vezes mais distante da Terra que a EEI. Sua localização seria no primeiro dos cinco pontos de Lagrange do sistema Terra-Lua (daí o "L_1" do nome). O ponto de Lagrange, nesse caso, é um local do espaço em que as gravidades da Terra e da Lua se compensam, fazendo com que um objeto ali colocado fique mais ou menos no mesmo lugar (com relação à Terra e à Lua) o tempo todo. (...)"

(*Folha de S.Paulo*, 15 out. 2002)

Considere que a massa da Terra seja cerca de 81 vezes a massa da Lua. Sendo **D** a distância entre os centros de massa desses dois corpos celestes, a distância **d** entre o local designado para a base L_1 *Gateway* e o centro da Terra deve corresponder a que porcentagem de **D**?

24. Pretende-se colocar um satélite em órbita circular em torno da Terra, a uma altitude de 270 km acima da superfície terrestre. Sendo conhecidas a Constante da Gravitação ($G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg²), a massa da Terra ($M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg) e o raio do planeta ($R = 6{,}4 \cdot 10^{6}$ m), determine:

a) a intensidade da velocidade linear que o satélite manterá ao longo da órbita;
b) o período de revolução do satélite.

25. Considere o raio médio da órbita de Plutão (planeta-anão) cem vezes raio médio da órbita de Mercúrio e 40 vezes o raio médio da órbita da Terra. Sabendo que a duração aproximada do ano de Mercúrio é de três meses terrestres e que a velocidade orbital da Terra tem intensidade igual a 30 km/s, determine:

a) a duração do ano de Plutão expressa em anos terrestres;
b) a intensidade da velocidade orbital de Plutão.

26. (UFRJ) A tabela a seguir ilustra uma das leis do movimento dos planetas: a razão entre o cubo da distância média **D** de um planeta ao Sol e o quadrado do seu período de revolução **T** em torno do Sol é constante (3ª Lei de Kepler). O período é medido em anos e a distância em unidades astronômicas (UA). A unidade astronômica é igual à distância média entre o Sol e a Terra. Suponha que o Sol esteja no centro comum das órbitas circulares dos planetas.

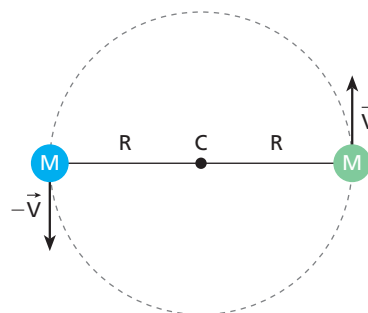
Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno
T^2	0,058	0,378	1,00	3,5	141	868
D^3	0,058	0,378	1,00	3,5	141	868

Um astrônomo amador supõe ter descoberto um novo planeta no Sistema Solar e o batiza como planeta **X**. O período estimado do planeta **X** é de 125 anos. Calcule:

a) a distância do planeta **X** ao Sol em UA;
b) a razão entre o módulo da velocidade orbital do planeta **X** e o módulo da velocidade orbital da Terra.

27. (Fuvest-SP) Um anel de Saturno é constituído por partículas girando em torno do planeta em órbitas circulares.

a) Em função da massa **M** do planeta, da Constante da Gravitação Universal **G** e do raio de órbita r, calcule a intensidade da velocidade orbital de uma partícula do anel.
b) Sejam R_i o raio interno e R_e o raio externo do anel. Qual a razão entre as velocidades angulares ω_i e ω_e de duas partículas, uma da borda interna e outra da borda externa do anel?

28. (UPE) A figura abaixo representa a trajetória de duas estrelas idênticas (cada uma com massa M) que giram em torno do centro de massa das duas estrelas. Cada órbita é circular e possui raio R, de modo que as duas estrelas estão sempre diametralmente opostas. Considere G a constante de gravitação universal.

Analise as proposições que se seguem.

(1) A intensidade da força de atração gravitacional de uma estrela sobre a outra vale $\dfrac{GM^2}{4R^2}$

(2) O módulo da velocidade orbital de cada estrela vale $\sqrt{\dfrac{4M}{GR}}$

(3) O período orbital de cada estrela vale $4\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$

Somente está correto o que se afirma em:

a) (1)
b) (2)
c) (3)
d) (1) e (2)
e) (1) e (3)

Bloco 3

6. Estudo do campo gravitacional de um astro

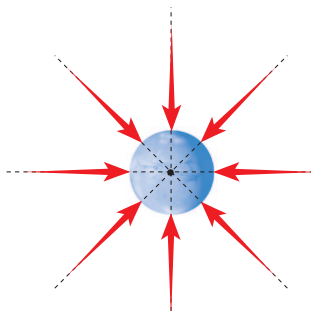
Linhas de força do campo gravitacional

De acordo com os preceitos da Física Clássica, toda massa tem capacidade de criar em torno de si um campo de forças, denominado **campo gravitacional**. Uma estrela, por exemplo, tem ao seu redor um campo gravitacional, o mesmo ocorrendo com um simples asteroide.

A intensidade do campo gravitacional em determinado ponto aumenta com a massa geradora do campo e diminui com a distância até essa massa, como verificaremos mais adiante em nosso estudo.

O campo gravitacional é **atrativo**, já que partículas submetidas exclusivamente aos seus efeitos são "puxadas" para junto da massa geradora.

> **Linhas de força** de um campo gravitacional são linhas que representam, em cada ponto, a orientação da força que atua em uma partícula (massas de prova) submetida exclusivamente aos efeitos desse campo.

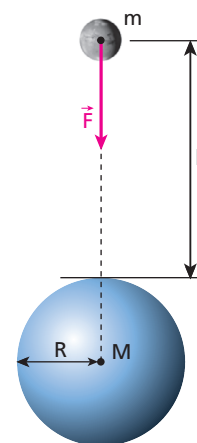
Se o astro considerado for esférico e homogêneo, as linhas de força do seu campo gravitacional terão a direção do raio da esfera em cada ponto (linhas radiais), sendo orientadas para o centro do astro, como representa a figura abaixo.

Nesta ilustração, a redução na espessura das linhas de força representa a diminuição da intensidade do campo gravitacional com o aumento da distância à massa geradora.

A grandeza física que caracteriza um campo gravitacional é o **vetor aceleração da gravidade** ($\vec{g}$), que é a aceleração adquirida por uma partícula deixada exclusivamente aos efeitos do campo.

A aceleração da gravidade tem a mesma direção e o mesmo sentido das linhas de força, isto é, é radial ao astro e dirigida para o seu centro.

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade num ponto externo ao astro

Vamos admitir um astro esférico e homogêneo de raio **R** e massa **M**. Nesse caso, podemos considerar toda a sua massa concentrada em seu centro geométrico.

Um corpo de massa **m**, situado a uma altura **h** em relação à sua superfície, receberá uma força de atração gravitacional $\vec{F}$, conforme representa a figura abaixo.

Sendo **G** a Constante da Gravitação, podemos expressar a intensidade de $\vec{F}$ pela **Lei de Newton da Atração das Massas**:

$$F = G\frac{M\,m}{d^2} \Rightarrow F = G\frac{M\,m}{(R+h)^2} \qquad \text{(I)}$$

Representando, porém, por **g** a intensidade da aceleração da gravidade no ponto em que o corpo se encontra, também podemos expressar a intensidade de $\vec{F}$ por:

$$F = m\,g \qquad \text{(II)}$$

Comparando (II) e (I), temos:

$$m\,g = G\frac{M\,m}{(R+h)^2} \Rightarrow \boxed{g = G\frac{M}{(R+h)^2}}$$

O resultado acima evidencia que **g independe da massa de prova** (**m**), dependendo apenas da massa geradora do campo (**M**) e da distância $d = R + h$, como mencionamos anteriormente.

Como exemplo, observe, na tabela abaixo, a variação da intensidade da aceleração da gravidade na Terra em função da altitude.

Altitude (m)	**g** (m/s^2)	**Altitude** (m)	**g** (m/s^2)
0	9,806	32 000	9,71
1 000	9,803	100 000	9,60
4 000	9,794	500 000	8,53
8 000	9,782	1 000 000	7,41
16 000	9,757	380 000 000	0,00271

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade na superfície do astro

Retomemos a expressão anterior:

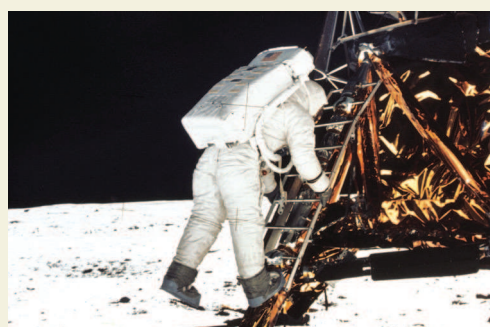
$$g = G\frac{M}{(R + h)^2}$$

Desprezando os efeitos ligados à rotação e observando que sobre a crosta do astro $h = 0$, a intensidade da aceleração da gravidade na superfície (g_0) fica dada por:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}$$

Na tabela abaixo, estão relacionados os valores aproximados das acelerações da gravidade nas superfícies dos planetas do Sistema Solar.

Planeta	**g_0** (m/s^2)
Mercúrio	2,647
Vênus	8,433
Terra	9,806
Marte	3,628
Júpiter	25,887
Saturno	11,473
Urano	9,021
Netuno	14,120

Na superfície do Sol, g_0 vale 274,568 m/s^2 e na superfície da Lua, 1,667 m/s^2.

Impact Photos /Diomedia

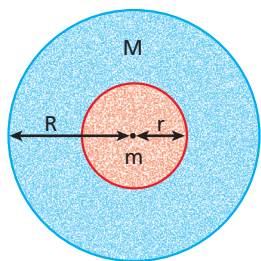
O dia 20 de julho de 1969 entrou para a história como um marco nas conquistas espaciais. Pela primeira vez um ser humano, representado pelo astronauta norte-americano Neil Armstrong, colocava os pés na Lua, coroando uma era de ousadia e evoluções. O próprio Armstrong reverenciou a importância daquele momento, proferindo uma frase lapidar: “Este é um pequeno passo para um homem, mas um grande passo para a humanidade”. Na Lua, a aceleração da gravidade tem valor igual a um sexto do valor registrado na Terra, aproximadamente, o que permitiu aos astronautas suportarem seus trajes e equipamentos com tranquilidade. Há registros em vídeo de alguns deles saltitando com extrema leveza, como que desfrutando de forma descontraída da baixa gravidade.

Brasileiro foi ao espaço

Tuca Vieira/Folhapress

O tenente-coronel aviador Marcos César Pontes tornou-se o primeiro brasileiro a ir ao espaço em março de 2006, após cerca de oito anos em treinamento divididos entre a Agência Espacial Norte-Americana (Nasa) e a Agência Espacial Russa (Roscosmos). O astronauta executou oito experimentos científicos solicitados por universidades e institutos de pesquisa, cujos resultados iniciais foram apresentados em seminário realizado em novembro do mesmo ano.

Cálculo da intensidade da aceleração da gravidade num ponto interno ao astro

A intensidade da aceleração da gravidade num ponto interno, distante **r** do centro do astro, é calculada admitindo-se que esse ponto pertença a uma superfície esférica de raio **r**. Essa superfície envolve uma massa **m**, evidentemente, menor que a massa **M** do astro.

Sobre a superfície de raio **r**, temos:

$$g = G\frac{m}{r^2} \qquad \text{(I)}$$

Suponha que o astro tenha massa específica uniforme e igual a **μ**. Sendo **V** o volume da esfera de raio **r**, podemos escrever que:

$$\mu = \frac{m}{V}$$

O volume **V**, porém, pode ser expresso por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Logo:

$$\mu = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow m = \frac{4}{3}\pi \mu r^3 \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

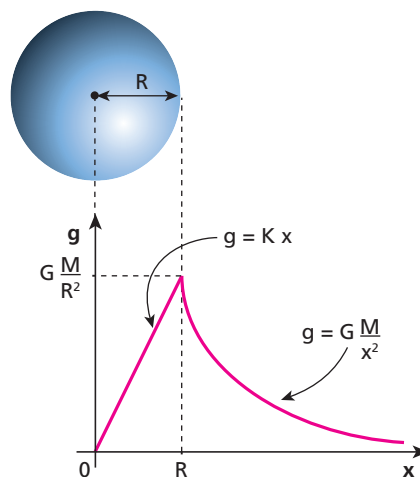
$$g = \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi \mu r^3 \Rightarrow g = \frac{4}{3}\pi \mu G r$$

Fazendo $\frac{4}{3}\pi \mu G = K$, em que **K** é uma constante, segue que:

$$g = K r$$

Concluímos, então, que, para pontos internos ao astro, o valor de **g** é **diretamente proporcional** a distância do ponto considerado ao centro do astro.

Gráfico g *versus* x

A intensidade da aceleração da gravidade varia em função da distância **x** ao centro do astro, conforme representa o gráfico abaixo.

Leitura

Buracos negros

O termo **universo** é a chave que remete nossa imaginação a uma imensidão sem fim, em que pontos e regiões brilhantes se sobressaem, contrastando com um fundo negro ilimitado que alguns chamam de infinito.

Os pontos brilhantes que adornam o céu escuro são, na maioria, estrelas, que apresentam um ciclo natural semelhante ao dos seres vivos, de nascimento, vida e morte.

Nuvens de gases e poeira cósmica, constituídas principalmente por hidrogênio, começam a se aglomerar movidas por forças de atração gravitacional. É nesse momento que tem início o surgimento de uma nova estrela, cujo núcleo vai adquirindo temperaturas elevadíssimas, da ordem de milhões de graus Celsius. Essa elevação da temperatura desencadeia o processo de fusão nuclear que transforma o hidrogênio em hélio. Dessa forma, quantidades fantásticas de energia radiante são lançadas no espaço, propagando-se com a velocidade da luz (c = 300 000 km/s).

A Terra recebe do Sol, a estrela mais próxima, uma quantidade de energia equivalente, em média, a 1,92 caloria por minuto por centímetro quadrado de área perpendicular aos raios solares. Só para se ter uma ideia da energia liberada pelo Sol, seriam necessárias todas as reservas de petróleo, gás natural e carvão da Terra para fornecer um milionésimo do que o Sol produz em 1 segundo.

Essa energia radiante, entretanto, é emanada pelas estrelas durante um intervalo de tempo limitado. Quando o combustível nuclear – o hidrogênio – se esgota, elas passam a se compactar, desabando sobre si mesmas, pela ação de forças de origem gravitacional, e concentrando suas enormes massas em volumes extremamente pequenos, se comparados aos volumes originais.

Dependendo de sua massa, uma estrela poderá transformar-se em um **buraco negro** — um corpo hipercompactado, que tem sua gigantesca quantidade de matéria aglomerada em um volume muito reduzido.

O Sol tem uma massa muito pequena para se transformar em um buraco negro. Sua agonia como estrela, prevista para daqui a 5 bilhões de anos, deverá conduzi-lo à condição de anã branca, que é outro tipo de cadáver estelar. Os buracos negros mais comuns têm massa equivalente à de dez sóis.

Recordemos que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de um astro (**g**), desprezada sua rotação, é dada em função de sua massa (**M**) e de seu raio (**R**) por:

$$\boxed{g = G\frac{M}{R^2}}$$

em que **G** é a Constante da Gravitação.

Como no caso dos buracos negros **M** é muito grande e **R** é muito pequeno, **g** resulta muito grande, o que produz em torno desses corpos campos gravitacionais extremamente intensos, que influem significativamente em todas as massas das proximidades, inclusive na luz, que é sensivelmente desviada pela sua atração.

Quando lançamos uma pedra verticalmente para cima, a partir da superfície de um astro, ela atinge determinada altura máxima e, depois de certo intervalo de tempo, retorna praticamente ao ponto de partida. Se repetirmos o lançamento imprimindo à pedra uma velocidade inicial maior, ela se elevará a uma altura maior, mas ainda voltará ao solo, atraída gravitacionalmente pelo astro. Se lançarmos a pedra sucessivamente com velocidades cada vez maiores, chegaremos a situações em que ela “escapará da gravidade do astro”, não mais retornando à sua superfície.

A velocidade de escape na Lua, por exemplo, é de 2,4 km/s; na Terra, de 11,2 km/s, e no Sol, de 620 km/s. Nos buracos negros, a velocidade de escape supera a barreira dos 300 000 km/s; por isso, nem mesmo a luz consegue escapar da sua atração. É por esse motivo que esses corpos celestes são invisíveis, tendo sua presença registrada apenas pela expressiva influência gravitacional manifestada nos arredores.

Se o Sol tivesse volume igual ao da Terra, a velocidade de escape desse astro fictício seria de 6 500 km/s. Para que a Terra se transformasse em um buraco negro, sua massa deveria ser compactada até volumes menores que o de uma bola de gude.

Apesar de ser um tema muito discutido nos dias de hoje, os buracos negros já vêm sendo estudados desde o século XVIII: o astrônomo inglês John **Michell** (1724-1793) analisou a possibilidade da existência desses corpos, o mesmo ocorrendo com o matemático francês Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827).

Atualmente, todas as teorias astronômicas utilizam essa concepção, dotando o Universo desses polos invisíveis, verdadeiros sorvedouros de matéria, que desafiam a imaginação e levam o ser humano a se questionar em busca de explicações.

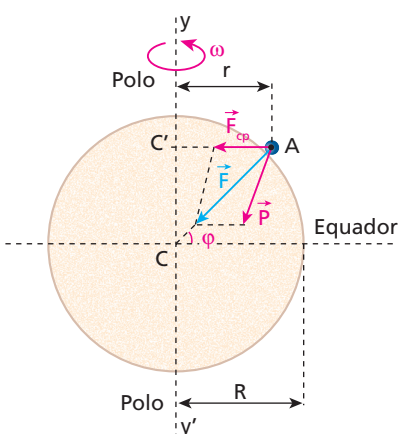
SPL /Diomedia

Galáxia espiral Messier 101. Essa imagem na verdade é resultado de uma fotomontagem composta de 51 fotografias individuais obtidas pelo telescópio Hubble e elementos de imagens obtidas a partir do solo terrestre. As galáxias são repletas de buracos negros.

7. Variação aparente da intensidade da aceleração da gravidade devido à rotação do astro

Considere um astro esférico e homogêneo de raio **R** e massa **M** em rotação uniforme em torno de um eixo imaginário yy', com velocidade angular igual a $\boldsymbol{\omega}$.

Um corpo de prova de massa **m**, colocado sobre a superfície do astro em um ponto **A** de latitude $\boldsymbol{\varphi}$, descreverá uma circunferência de raio **r** e centro no eixo yy', com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

Em **A**, o corpo de prova ficará sujeito à força de atração gravitacional $\vec{F}$, que admite duas componentes, $\vec{F}_{cp}$ e $\vec{P}$, conforme representa a figura a seguir.

$$\vec{F} = \vec{F}_{cp} + \vec{P}$$

A componente $\vec{F}_{cp}$ é a **força centrípeta** necessária para que o corpo realize o movimento circular e uniforme acompanhando a rotação do astro.

Como vimos no Tópico 3, a intensidade de $\vec{F}_{cp}$ é dada por:

$$F_{cp} = m\,\omega^2\,r$$

A componente $\vec{P}$, por sua vez, traduz o **peso aparente** do corpo, isto é, a indicação que seria fornecida por um dinamômetro situado no ponto **A**, caso o corpo de prova fosse dependurado nesse aparelho.

$$P = m\,g$$

em que **g** é o valor aparente da aceleração da gravidade no ponto **A**.

Corpo de prova no equador do astro (latitude $\varphi = 0°$)

Neste caso, **r** = **R** e a intensidade da força centrípeta será **máxima**. Isso significa que o peso aparente terá intensidade **mínima**, já que a força de atração gravitacional tem intensidade constante.

Vamos calcular, então, o valor aparente da aceleração da gravidade no equador do astro (g_e):

$$\vec{F} = \vec{F}_{cp} + \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{F} - \vec{F}_{cp}$$

Como nesse caso os vetores $\vec{F}$, $\vec{F}_{cp}$ e $\vec{P}$ têm mesma direção e mesmo sentido, vem:

$$F = F_{cp} + P \quad \Rightarrow \quad P = F - F_{cp}$$

Ou: $$m\,g_e = G\frac{M\,m}{R^2} - m\,\omega^2\,R$$

Cancelando **m**, obtemos:

$$g_e = G\frac{M}{R^2} - \omega^2 R$$

Destaquemos que, se o valor de $\boldsymbol{\omega}$ for aumentado, $\mathbf{g_e}$ **diminuirá**.

Se o astro for a Terra, por exemplo, pode-se verificar que, se a velocidade angular de rotação do planeta fosse aproximadamente 17 vezes a atual, os corpos situados na linha do equador aparentariam **peso nulo**.

Corpo de prova nos polos do astro (latitude $\varphi = 90°$ norte ou 90° sul)

Neste caso, **r** = **0** e a força centrípeta será **nula**. Isso significa que o peso aparente terá intensidade **máxima**, igual à intensidade da força de atração gravitacional.

Vamos calcular, então, o valor aparente da aceleração da gravidade nos polos do astro (g_p):

$$\vec{P} = \vec{F}$$

Ou, em módulo: $$P = F \Rightarrow m\,g_p = G\frac{M\,m}{R^2}$$

Donde: $$g_p = G\frac{M}{R^2}$$

Nos polos, como não há influência do movimento de rotação do astro, podemos dizer que o valor aparente da aceleração da gravidade **coincide com o valor real**.

Devido à forma não esférica da Terra, e também por causa da rotação do planeta, a aceleração da gravidade em sua superfície sofre variações. Na tabela abaixo, aparecem alguns valores de **g** medidos ao nível do mar em pontos de diferentes latitudes.

Latitude (graus)	**g** (m/s^2)	**Latitude** (graus)	**g** (m/s^2)
0	9,78039	50	9,81071
10	9,78195	60	9,81918
20	9,78641	70	9,82608
30	9,79329	80	9,83059
40	9,80171	90	9,83217

Exercícios — nível 1

29. Leia com atenção os quadrinhos:

Considere as proposições apresentadas a seguir:

(01) Num planeta em que a aceleração da gravidade for menor que a da Terra, o gato Garfield apresentará um peso menor.

(02) Num planeta em que a aceleração da gravidade for menor que a da Terra, o gato Garfield apresentará uma massa menor.

(04) Num planeta de massa maior que a da Terra, o gato Garfield apresentará um peso maior.

(08) Num planeta de raio maior que o da Terra, o gato Garfield apresentará um peso menor.

(16) Num planeta de massa duas vezes a da Terra e de raio duas vezes o terrestre, o gato Garfield apresentará um peso equivalente à metade do apresentado na Terra.

(32) O peso do gato Garfield será o mesmo, independentemente do planeta para onde ele vá.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

30. E.R. Sabe-se que a massa da Terra é cerca de 81 vezes a massa da Lua e que o raio da Terra é aproximadamente 3,7 vezes o da Lua. Desprezando os efeitos ligados à rotação, calcule o módulo da aceleração da gravidade na superfície da Lua (g_L) em função do módulo da aceleração da gravidade na superfície da Terra (g_T).

Resolução:

Podemos calcular g_L por:

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} \quad \text{(I)}$$

Podemos calcular g_T por:

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \text{(II)}$$

Dividindo as equações (I) e (II), vem:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{G\frac{M_L}{R_L^2}}{G\frac{M_T}{R_L^2}} \Rightarrow \frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2$$

Sendo $M_T = 81M_L$ e $R_T = 3,7R_L$, vem:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{1}{81}(3,7)^2 \Rightarrow \boxed{g_L \cong \frac{1}{6}g_T}$$

Na superfície lunar, o módulo da aceleração da gravidade é aproximadamente um sexto daquele determinado na superfície terrestre.

31. Em um planeta **X**, onde a aceleração da gravidade tem intensidade 4,0 m/s², uma pessoa pesa 240 N. Adotando para a aceleração da gravidade terrestre o valor 10 m/s², responda: qual a massa e qual o peso da pessoa na Terra?

32. Um planeta hipotético tem massa um décimo da terrestre e raio um quarto do da Terra. Se a aceleração da gravidade nas proximidades da superfície terrestre vale 10 m/s², a aceleração da gravidade nas proximidades da superfície do planeta hipotético é de:

a) 20 m/s²
b) 16 m/s²
c) 10 m/s²
d) 6,0 m/s²
e) 4,0 m/s²

33. Na Terra, onde a aceleração da gravidade vale 10 m/s², um astronauta vestido com seu traje espacial pesa $2,0 \cdot 10^3$ N. Sabendo que o diâmetro de Marte é a metade do da Terra e que a massa de Marte é um décimo da terrestre, determine:

a) a massa do conjunto astronauta-traje em Marte;
b) o peso do conjunto astronauta-traje em Marte.

34. E.R. Admita que, na superfície terrestre, desprezados os efeitos ligados à rotação do planeta, a aceleração da gravidade tenha intensidade g_0. Sendo **R** o raio da Terra, a que altitude a aceleração da gravidade terá intensidade $\frac{g_0}{16}$?

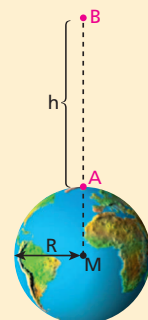
Resolução:

No ponto A: $g_0 = G\frac{M}{R^2}$ (I)

No ponto B: $\frac{g_0}{16} = G\frac{M}{(R+h)^2}$ (II)

(I) em (II): $\frac{1}{16}G\frac{M}{R^2} = G\frac{M}{(R+h)^2}$

$$\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 16 \Rightarrow R + h = 4R$$

$$\boxed{h = 3R}$$

35. (Ufal) Para que a aceleração da gravidade num ponto tenha intensidade de 1,1 m/s^2 (nove vezes menor que na superfície da Terra), a distância desse ponto à superfície terrestre deve ser:
a) igual ao raio terrestre.
b) o dobro do raio terrestre.
c) o triplo do raio terrestre.
d) o sêxtuplo do raio terrestre.
e) nove vezes o raio terrestre.

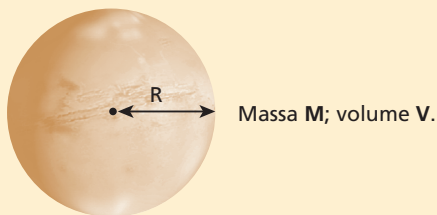
36. Admita que, na superfície terrestre, desprezados os efeitos ligados à rotação do planeta, a aceleração da gravidade tenha intensidade 10 m/s^2. Sendo o raio da Terra aproximadamente igual a 6 400 km, a que altitude a aceleração da gravidade terá intensidade 0,40 m/s^2?

37. (Vunesp-SP) Um astronauta flutua no interior de uma nave em órbita em torno da Terra. Isso ocorre porque naquela altura:
a) não há gravidade.
b) a nave exerce uma blindagem à ação gravitacional da Terra.
c) existe vácuo.
d) o astronauta e a nave têm aceleração igual à da gravidade, isto é, estão numa espécie de "queda livre".
e) o campo magnético terrestre equilibra a ação gravitacional.

Exercícios nível 2

38. (UCDB-MT) Em julho de 1997, a sonda norte-americana *Mars Pathfinder* chegou a Marte para uma nova exploração das condições do planeta. Nessa ocasião, os jornais publicaram comparações entre a Terra e Marte. Numa matéria publicada no jornal *Folha de S.Paulo*, verifica-se que o raio de Marte é 53% do raio da Terra e a massa de Marte é 11% da massa da Terra. Partindo desses dados e considerando que a aceleração da gravidade na Terra é 10 m/s^2, podemos concluir que a aceleração da gravidade na superfície de Marte, em m/s^2, é um valor mais próximo de:
a) 2,0 b) 3,0 c) 4,0 d) 5,0 e) 6,0

39. E.R. Um planeta perfeitamente esférico **A** tem raio R_A e densidade absoluta μ_A, enquanto outro planeta **B**, também perfeitamente esférico, tem raio $5R_A$ e densidade absoluta $2\mu_A$. Sendo g_A o módulo da aceleração da gravidade na superfície de **A** e g_B o módulo da aceleração da gravidade na superfície de **B**, calcule a relação g_B/g_A. Despreze os efeitos ligados às rotações de **A** e de **B**.

Resolução:
Considere um planeta esférico genérico de massa **M**, raio **R**, volume **V** e densidade absoluta **μ**.

A densidade absoluta do planeta pode ser expressa por:

$$\mu = \frac{M}{V}$$

Sendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volume da esfera), vem:

$$\mu = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi \mu R^3 \quad \text{(I)}$$

O módulo da aceleração da gravidade na superfície do planeta é calculado por:

$$g = G\frac{M}{R^2} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$g = G\frac{\frac{4}{3}\pi\mu R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{g = \frac{4}{3}\pi\mu R}$$

Para o planeta **B**, temos que:

$$g_B = \frac{4}{3}\pi G\, 2\mu_A\, 5R_A \quad \text{(III)}$$

Para o planeta **A**, temos que:

$$g_A = \frac{4}{3}\pi G \mu_A R_A \quad \text{(IV)}$$

Dividindo (III) por (IV), obtemos:

$$\frac{g_B}{g_A} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\, 2\mu_A\, 5R_A}{\frac{4}{3}\pi G \mu_A R_A} \Rightarrow \boxed{\frac{g_B}{g_A} = 10}$$

40. A aceleração da gravidade na superfície de um planeta hipotético, suposto esférico, vale 16 m/s^2. Se o volume do planeta for multiplicado por oito, mantida a mesma massa, qual será a nova aceleração da gravidade na sua superfície? Despreze os efeitos ligados à rotação.

41. Dois planetas esféricos P_1 e P_2 têm raios respectivamente iguais a **R** e **5R**. Desprezados os efeitos ligados às rotações, verifica-se que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície de P_1 é g_0 e na superfície de P_2 é 10 g_0. Qual a relação entre as densidades absolutas de P_1 e P_2?

42. E.R. (Fuvest-SP) Recentemente Plutão foi "rebaixado", perdendo sua classificação como planeta. Para avaliar os efeitos da gravidade em Plutão, considere suas características físicas, comparadas com as da Terra, que estão apresentadas, com valores aproximados, no quadro a seguir.

Massa da Terra (M_T) = 500 × Massa de Plutão (M_P)
Raio da Terra (R_T) = 5 × Raio de Plutão (R_P)

Note e adote:

$F = \frac{GMm}{R^2}$ Peso = mg

Intensidade da aceleração da gravidade na Terra: g_T = 10 m/s^2

a) Determine o peso, na superfície de Plutão (P_P), de uma massa que na superfície da Terra pesa 40 N ($P_T = 40$ N).

b) Estime a altura máxima **H**, em metros, que uma bola, lançada verticalmente com velocidade **V**, atingiria em Plutão. Na Terra, essa mesma bola, lançada com a mesma velocidade, atinge uma altura $h_T = 1{,}5$ m.

Resolução:

a) Desprezando-se os efeitos de rotação, temos:

$$P = F \Rightarrow mg = \frac{GMm}{R^2}$$

Assim: $\boxed{g = G\frac{M}{R^2}}$

Em Plutão: $g_P = G\frac{M_P}{R_P^2}$ (I)

Na Terra: $g_T = G\frac{M_T}{R_T^2}$ (II)

Dividindo (I) e (II) membro a membro

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G\frac{M_P}{R_P^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} \Rightarrow \frac{g_P}{g_T} = \frac{M_P}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2$$

$$\frac{g_P}{10} = \frac{M_P}{500\ M_P}\left(\frac{5R_P}{R_P}\right)^2$$

Logo: $\boxed{g_P = 0{,}5\ m/s^2}$

Em Plutão: $P_P = mg_p$ (III)

Na Terra: $P_T = mg_T$ (IV)

Dividindo-se (III) e (IV) membro a membro:

$$\frac{P_P}{P_T} = \frac{mg_P}{mg_T} \Rightarrow \frac{P_P}{P_T} = \frac{g_P}{g_T} \Rightarrow \frac{P_P}{40} = \frac{0{,}5}{10}$$

Logo: $\boxed{P_P = 2{,}0\ N}$

b) Movimento uniformemente variado:

$$V^2 = V_0^2 + 2\alpha\,\Delta s$$

Na subida: $0 = V_0^2 + 2(-g)H$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Em Plutão: $H_P = \frac{v_0^2}{2g_P}$ (V)

Na Terra: $H_T = \frac{v_0^2}{2g_T}$ (VI)

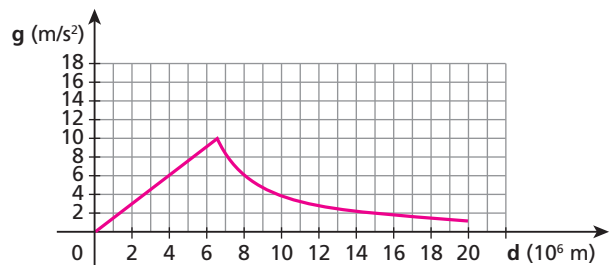
Dividindo-se (V) e (VI) membro a membro:

$$\frac{H_P}{H_T} = \frac{\frac{v_0^2}{2g_p}}{\frac{v_0^2}{2g_T}} \Rightarrow \frac{H_P}{H_T} = \frac{g_T}{g_p} \Rightarrow \frac{H_P}{1{,}5} = \frac{10}{0{,}5}$$

Da qual: $\boxed{H_P = 30\ m}$

43. (IME-RJ) Um astronauta com seu traje espacial e completamente equipado pode dar pulos verticais e atingir, na Terra, alturas máximas de 0,50 m. Determine as alturas máximas que esse mesmo astronauta poderá atingir pulando num outro planeta de diâmetro igual a um quarto do da Terra e massa específica equivalente a dois terços da terrestre. Admita que nos dois planetas o astronauta imprima aos saltos a mesma velocidade inicial.

44. Um meteorito adentra o campo gravitacional terrestre e, sob sua ação exclusiva, passa a se mover de encontro à Terra, em cuja superfície a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s². Calcule o módulo da aceleração do meteorito quando ele estiver a uma altitude de nove raios terrestres.

45. (Fuvest-SP) O gráfico da figura a seguir representa a aceleração da gravidade **g** da Terra em função da distância **d** ao seu centro.

Considere uma situação hipotética em que o valor do raio R_T da Terra seja diminuído para R', sendo $R' = 0{,}8R_T$, e em que seja mantida (uniformemente) sua massa total. Nessas condições, os valores aproximados das acelerações da gravidade g_1 à distância R' e g_2 a uma distância igual a R_T do centro da "Terra Hipotética" são, respectivamente:

	g_1 (m/s²)	g_2 (m/s²)
a)	10	10
b)	8	6,4
c)	6,4	4,1
d)	12,5	10
e)	15,6	10

46. E.R. Admita que a aceleração da gravidade nos pólos da Terra tenha intensidade 10 m/s² e que o raio terrestre valha $6{,}4 \cdot 10^6$ m. Chamemos de ω_0 a velocidade angular de rotação do planeta nas circunstâncias atuais. Se a velocidade angular de rotação da Terra começasse a crescer a partir de ω_0, estabelecer-se-ia um valor ω para o qual os corpos situados na linha do equador apresentariam peso nulo.

a) Qual o valor de ω? Responda em função de ω_0.

b) Qual seria a duração do dia terrestre caso a velocidade angular de rotação do planeta fosse igual a ω?

Resolução:

a) O período atual de rotação da Terra é $T_0 = 24$ h $= 86400$ s.

Logo:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{86400} \text{(rad/s)}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\pi}{43200} \text{(rad/s)}} \quad \text{(I)}$$

A intensidade (aparente) da aceleração da gravidade na linha do equador é g_e, dada por:

$$g_e = G\frac{M}{R^2} - \omega^2 R \quad \text{ou} \quad g_e = g_0 - \omega^2 R$$

No caso em que g_e anula-se, vem:

$$0 = g_0 - \omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$$

Sendo $g_0 = 10\ m/s^2$ e $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, calculemos $\boldsymbol{\omega}$.

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{6{,}4 \cdot 10^6}} \text{(rad/s)} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{800} \text{(rad/s)}} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), temos: $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\frac{1}{800}}{\frac{\pi}{43200}} \Rightarrow \boxed{\omega \cong 17\ \omega_0}$

b) $\omega \cong 17\omega_0 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cong 17 \cdot \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T \cong \frac{T_0}{17} \Rightarrow T \cong \frac{24\ h}{17}$

$$\boxed{T \cong 1{,}4\ h \cong 1\ h\ 25\ min}$$

47. Chamemos de I_1 e I_2 as indicações de um dinamômetro ideal para o peso de um mesmo corpo no Equador e no Polo Sul, respectivamente.

Nas duas medições, o corpo é dependurado no dinamômetro e o conjunto é mantido em repouso em relação ao solo.

Supondo conhecidos o raio da Terra (**R**), sua velocidade angular de rotação ($\boldsymbol{\omega}$) e a massa do corpo (**m**), calcule o valor da diferença $I_2 - I_1$.

Descubra mais

1. O experimento realizado por Henry Cavendish em 1798 utilizando uma balança de torção para a determinação da Constante da Gravitação (**G**) também presente na Lei de Newton da Atração das Massas $\left(F = G\frac{M\,m}{d^2}\right.$, com $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2\Big)$ é considerado um dos dez mais importantes da Física.
   Pesquise sobre esse experimento.

2. Há vários satélites estacionários, de diversas nacionalidades, inclusive brasileira, em órbita ao redor da Terra servindo às telecomunicações. Todos eles percorrem uma mesma órbita, aproximadamente circular, num mesmo sentido. Como se justifica o fato de não ocorrerem colisões entre esses satélites?

3. Na Terra, além do campo gravitacional terrestre, somos influenciados também por campos gravitacionais de outros astros, como o Sol e a Lua. A participação mais ou menos intensa desses campos na formação de um campo gravitacional resultante é determinante para a ocorrência de muitos fenômenos na Terra, como o das marés, por exemplo. Dê uma explicação mais substanciada para esse fenômeno.

4. Uma possibilidade que aterroriza a todos é a de que um asteroide colida com a Terra, o que provocaria um cataclismo de proporções inimagináveis. O que tem sido feito pela comunidade científica para impedir esse tipo de ocorrência?

Leitura

Uma teoria consistente

A Gravitação newtoniana, embora sabidamente limitada diante dos conhecimentos atuais, é bastante eficaz para resolver problemas como o que apresentamos a seguir.

Consideremos a órbita elíptica de Mercúrio em torno do Sol, cuja excentricidade *e* é a maior dentre os planetas de nosso Sistema Solar. Para esse caso, $e = 0{,}20$. O semieixo maior (ou raio médio) **R** da trajetória descrita por Mercúrio é de 0,389 UA, o que equivale aproximadamente a $5{,}8 \cdot 10^{10}$ m. Sejam $d_{mín}$ e $d_{máx}$, respectivamente, as distâncias mínima e máxima do citado planeta em relação ao centro do Sol, como está indicado, fora de escala, no esquema a seguir.

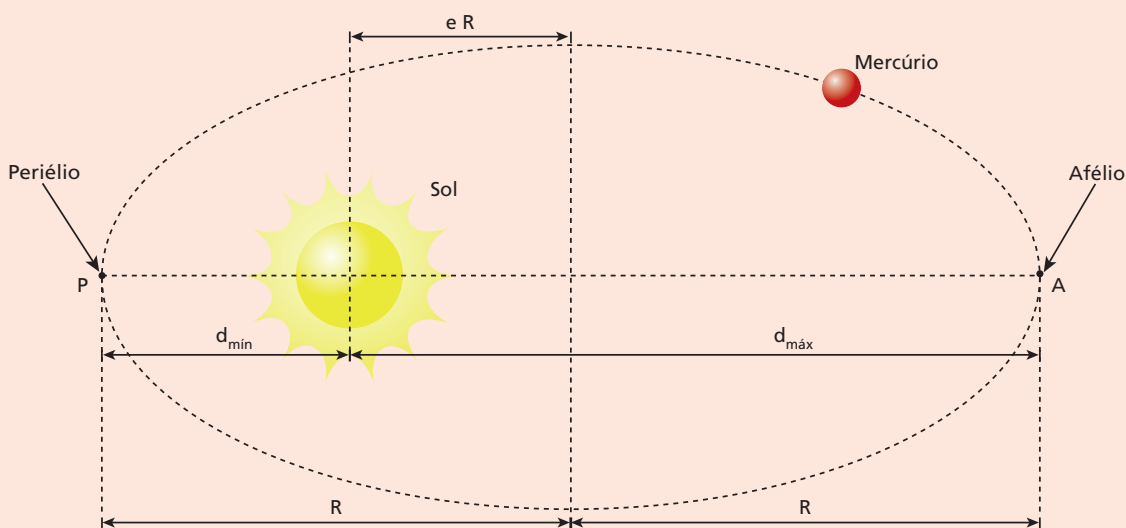



Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.

É possível determinar, por meio da Lei de Newton da Atração das Massas, a relação entre as intensidades da velocidade orbital de Mercúrio nos pontos **P** (periélio) e **A** (afélio) da órbita.

I. Cálculo da $d_{mín}$:

$$d_{mín} = R - e\,R \Rightarrow d_{mín} = R\,(1 - e)$$

$$d_{mín} = 5{,}8 \cdot 10^{10}\,(1 - 0{,}20)\,(m) \Rightarrow \boxed{d_{mín} \cong 4{,}6 \cdot 10^{10}\,m}$$

II. Cálculo da $d_{máx}$:

$$d_{máx} = R + e\,R \Rightarrow d_{máx} = R\,(1 + e)$$

$$d_{máx} = 5{,}8 \cdot 10^{10}\,(1 + 0{,}20)\,(m) \Rightarrow \boxed{d_{máx} \cong 6{,}9 \cdot 10^{10}\,m}$$

III. A elipse é uma figura simétrica, por isso seu raio de curvatura em **P** e **A** é o mesmo. Chamando esse raio de **r**, a Constante da Gravitação de **G**, a massa do Sol de **M** e a massa de Mercúrio de **m**, e observando ainda que a força gravitacional, dada pela Lei de Newton, desempenha o papel de resultante centrípeta em **P** e **A**, já que nesses locais ela é perpendicular à velocidade vetorial, podemos obter as intensidades da velocidade orbital de Mercúrio em **P** (V_P) e em **A** (V_A), fazendo:

no periélio (**P**): $F_P = F_{cp_P} \Rightarrow G\dfrac{M\,m}{d^2_{mín}} = \dfrac{m\,V_P^2}{r}$

Da qual: $V_P = \dfrac{\sqrt{G\,M\,r}}{d_{mín}} \Rightarrow V_P = \dfrac{\sqrt{G\,M\,r}}{4{,}6 \cdot 10^{10}}$

no afélio (**A**): $F_A = F_{cp_A} \Rightarrow G\dfrac{M\,m}{d^2_{máx}} = \dfrac{mV_A^2}{r}$

Da qual: $V_A = \dfrac{\sqrt{G\,M\,r}}{d_{máx}} \Rightarrow V_A = \dfrac{\sqrt{G\,M\,r}}{6{,}9 \cdot 10^{10}}$

Dividindo os valores de V_P e V_A, temos:

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{\sqrt{G\,M\,r}}{4{,}6 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{6{,}9 \cdot 10^{10}}{\sqrt{G\,M\,r}} \Rightarrow \frac{V_P}{V_A} = \frac{3}{2}$$

Da qual:

$$\boxed{V_P = 1{,}5\,V_A}$$

Observe que a relação obtida confirma que, de fato, no periélio a velocidade de translação do planeta tem intensidade maior que no afélio.

Como duvidar, então, da Gravitação newtoniana se os resultados previstos por ela condizem com a maioria das observações experimentais?

Algumas distorções teóricas, como as previstas na Teoria da Relatividade Geral, de Albert Einstein, porém, levaram os astrônomos a rever certos resultados, o que corroborou para dotar a Gravitação de contornos mais amplos, como o que explica a atração entre massas por meio de deformações do chamado espaço-tempo.

Exercícios

nível 3

48. Um planeta orbita uma estrela, descrevendo trajetória circular ou elíptica. O movimento desse planeta em relação à estrela:

a) não pode ser uniforme;
b) pode ser uniformemente variado;
c) pode ser harmônico simples;
d) tem características que dependem de sua massa, mesmo que esta seja desprezível em relação à da estrela;
e) tem aceleração exclusivamente centrípeta em pelo menos dois pontos da trajetória.

49. (Vunesp-FMJ) O planeta Saturno apresenta um grande número de satélites naturais. Dois deles são Encélado e Titan. Os raios de suas órbitas podem ser medidos em função do raio de Saturno, R_S. Dessa forma, o raio da órbita de Titan vale $20R_S$, enquanto o de Encélado vale $4R_S$. Sendo T(e) e T(t), respectivamente, os intervalos de tempo que Encélado e Titan levam para dar uma volta completa ao redor de Saturno, é correto afirmar que a razão $\frac{T(t)}{T(e)}$ é, aproximadamente, igual a

a) 11,2
b) 8,4
c) 5,0
d) 0,8
e) 0,2

50. (Olimpíada Brasileira de Física) Considere que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular e que esse movimento possua período **T**. Sendo **t** o tempo médio que a luz do Sol leva para chegar à Terra e **c** o módulo da velocidade da luz no vácuo, o valor estimado da massa do Sol é:

a) $\frac{G}{4\pi^2}\frac{(c\,t)^3}{T^2}$

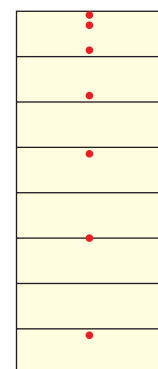
b) $\frac{4\pi^2}{G}\frac{(c\,t)^3}{T^2}$

c) $\frac{G}{4\,\pi^2} = \frac{(c\,T)^3}{t^2}$

d) $\frac{4\pi^2}{G}\frac{(cT)^3}{t^2}$

e) $\frac{G}{4\pi^2}\frac{(ct)^2}{T^3}$

51. (Fuvest-SP) Se fosse possível colocar um satélite em órbita rasante em torno da Terra, o seu período seria **T**. Sendo **G** a Constante de Gravitação universal, expresse a massa específica média (densidade média) da Terra em função de **T** e **G**.

52. (Faap-SP) Em um planeta, um astronauta faz o seguinte experimento: abandona uma bola na frente de uma tela vertical, que possui marcadas linhas horizontais, separadas por 50 cm; simultaneamente, é acionada uma máquina fotográfica de *flash*-múltiplo, sendo o intervalo entre os *flashes* de 0,10 s. A partir da fotografia da queda da bola, indicada na figura, o astronauta calcula a razão entre a massa do planeta e a da Terra, pois ele sabe que o raio do planeta é o triplo do terrestre. Qual é o valor encontrado?

Dado: aceleração da gravidade na Terra = 10 m/s^2

53. (UFF-RJ) Antoine de Saint-Exupéry gostaria de ter começado a história do Pequeno Príncipe dizendo: "Era uma vez um pequeno príncipe que habitava um planeta pouco maior que ele, e que tinha necessidade de um amigo..."

Editora Agir

Considerando-se que o raio médio da Terra é um milhão de vezes o raio médio do planeta do Pequeno Príncipe, assinale a opção que indica a razão entre a densidade do planeta do Pequeno

Príncipe, ρ_P, e a densidade da Terra, ρ_T, de modo que as acelerações da gravidade nas superfícies dos dois planetas sejam iguais.

a) $\frac{\rho_P}{\rho_T} = 10^{18}$

b) $\frac{\rho_P}{\rho_T} = 10^{12}$

c) $\frac{\rho_P}{\rho_T} = 10^{6}$

d) $\frac{\rho_P}{\rho_T} = 10^{3}$

e) $\frac{\rho_P}{\rho_T} = 10^{2}$

54. (Unicamp-SP) A Lua tem sido responsabilizada por vários fenômenos na Terra, tais como apressar o parto dos seres humanos e dos demais animais e aumentar o crescimento de cabelos e plantas. Sabe-se que a aceleração gravitacional da Lua em sua própria superfície é praticamente $\frac{1}{6}$ daquela da Terra ($g_T = 10\ m/s^2$) e que a distância entre a superfície da Terra e o centro da Lua é da ordem de 200 raios lunares. Para estimar os efeitos gravitacionais da Lua na superfície da Terra, calcule:

a) a intensidade da aceleração gravitacional provocada pela Lua em um corpo na superfície da Terra.
b) a variação no peso de um bebê de 3,0 kg devido à ação da Lua.

55. (IME-RJ) Um objeto foi achado por uma sonda espacial durante a exploração de um planeta distante. Essa sonda possui um braço ligado a uma mola ideal presa a garras especiais. Ainda naquele planeta, observou-se no equilíbrio uma deformação $x_P = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$ m na mola, com o objeto totalmente suspenso. Retornando à Terra, repetiu-se o experimento, observando-se uma deformação $x_T = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ m. Ambas as deformações estavam na faixa linear da mola. Determine a razão entre o raio do planeta distante e o raio da Terra.

Dados:
1) a massa do planeta é 10% da massa da Terra;
2) módulo da aceleração da gravidade terrestre: 10,0 m/s².

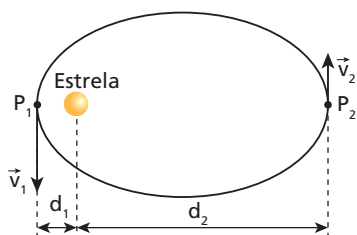
56. (Fuvest-SP) Um satélite artificial em órbita circular em torno da Terra mantém um período que depende de sua altura em relação à superfície terrestre.

> **Note e adote:**
> Raio da Terra: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m
> Intensidade da aceleração da gravidade nas proximidades da Terra: $g = 10\ m/s^2$

Desprezando-se os efeitos da atmosfera e adotando-se $\pi \cong 3$, determine:

a) o período T_0 do satélite, em minutos, quando sua órbita está muito próxima da superfície, ou seja, quando está a uma distância do centro da Terra praticamente igual ao raio do planeta;
b) o período T_1 do satélite, também em minutos, quando sua órbita está a uma distância do centro da Terra aproximadamente igual a quatro raios terrestres.

Para raciocinar um pouco mais

57. Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno de uma estrela, conforme representa o esquema. Os pontos P_1 e P_2 indicados correspondem ao periélio e ao afélio, respectivamente, e, nesses pontos, o planeta apresenta velocidades vetoriais de intensidades v_1 e v_2.

Supondo conhecidas as distâncias de P_1 e P_2 ao Sol (d_1 e d_2), mostre que $d_1 v_1 = d_2 v_2$.

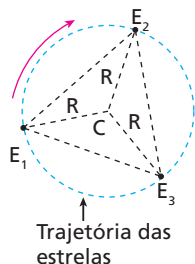
58. Considere o planeta Marte com raio **R** e densidade absoluta média igual a $\boldsymbol{\mu}$. Supondo que o satélite Fobos descreva em torno de Marte uma órbita circular de raio **r** e representando por **G** a Constante da Gravitação, calcule o período de revolução de Fobos.

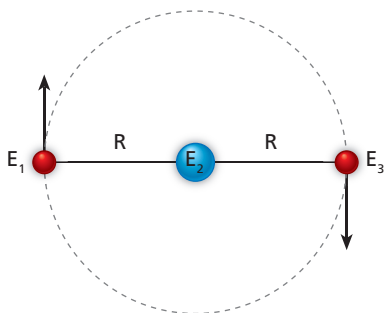
59. Admita que a Terra tenha raio **R** e densidade absoluta média $\boldsymbol{\mu}$ e descreva em torno do Sol uma órbita circular de raio **r**, com período de revolução igual a **T**. Calcule, em função desses dados, a intensidade da força de atração gravitacional que o Sol exerce sobre a Terra.

60. Seja **G** a Constante da Gravitação e **T** o período de rotação de um planeta imaginário denominado Planton. Sabendo que no equador de Planton um dinamômetro de alta sensibilidade dá indicação nula para o peso de qualquer corpo dependurado na sua extremidade, calcule a densidade média desse planeta.

61. (Olimpíada Brasileira Física) Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro da distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre diminuiria para (**g** é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade):

a) $\frac{3}{8}$ g.
b) $\frac{1}{2}$ g.
c) $\frac{5}{8}$ g.
d) $\frac{3}{4}$ g.
e) $\frac{7}{8}$ g.

62. (Olimpíada Ibero-americana de Física) Uma estrela tripla é formada por três estrelas de mesma massa **M** que gravitam em torno do centro de massa **C** do sistema.
As estrelas estão localizadas nos vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência que corresponde à trajetória por elas descrita, conforme ilustra a figura.

Considerando-se como dados a massa **M** de cada estrela, o raio **R** da circunferência que elas descrevem e a constante de gravitação universal **G**, determine o período **T** no movimento orbital de cada estrela.

63. Historicamente, teria sido Ptolomeu (século II d.C.) o primeiro a observar estrelas duplas ou binárias, um tanto comuns no Universo, às quais denominou *Eta Sagittarii*. Já estrelas triplas são mais raras, devido à sua grande instabilidade. Considere uma estrela tripla, constituída das estrelas E_1, E_2 e E_3, de massas respectivamente iguais a **M**, **2M** e **M**. A estrela E_2 é o centro do sistema e E_1 e E_3 gravitam em torno de E_2 com velocidades lineares de mesma intensidade, conforme ilustra o esquema:

Considerando que os centros de E_1 e E_3 mantêm-se sempre alinhados com o centro de E_2, à distância **R** do centro desta estrela, e sendo **G** a constante da Gravitação, determine o período dos movimentos de E_1 e E_3.

64. "Estrelas como o Sol, classificadas de anãs amarelas, são comumente encontradas na observação astronômica. Na outra ponta da escala estelar estão as azuis gigantes, muito raras no Universo. Na semana passada, um grupo de astrônomos europeus anunciou a descoberta de nada menos que sete astros desse tipo, entre eles a estrela com a maior massa já encontrada. Batizada de R136a1, ela é colossal mesmo para os padrões das azuis gigantes. Sua descoberta deve levar os cientistas a rever seus cálculos sobre os limites da massa das estrelas. Até agora, achava-se impossível que existissem astros com massa superior a 150 vezes a do Sol. A R136a1 tem quase o dobro, brilha com intensidade 10 milhões de vezes maior e é sete vezes mais quente."

(SALVADOR, Alexandre. Um raro achado no cosmo. *Veja*, São Paulo, ano 43, n. 30, p. 94, 28 jul. 2010.)

Considerando que a massa da estrela R136a1 é 265 vezes a massa do Sol, pode-se afirmar que se ela fosse a estrela do sistema solar em vez do Sol e se, mesmo assim, a Terra descrevesse sua órbita com o mesmo raio médio, o ano terrestre teria a duração mais próxima de

a) 3 horas.
b) 3 dias.
c) 3 semanas.
d) 3 meses.
e) 3 anos.

65. (Olimpíada de Portugal)

Uma recordação do Sistema Solar

O Extraterrestre de nome impronunciável não conseguia esconder a felicidade:
— Pai, gostei tanto desta viagem à Terra! Queria mesmo levar uma recordação...
— E por que é que não usas o teu redutor e levas o próprio Sol e a Terra? — devolveu o pai.
— Excelente ideia, pai! Vou reduzi-los de modo que a distância média Terra-Sol seja de 1 m, e os restantes tamanhos serão reduzidos proporcionalmente. Assim cabe no meu quarto...
— Mas no processo de redução mantém a densidade dos astros constante e não a sua massa, senão ficas com dois buracos negros...
Assumindo que a órbita da Terra em torno do Sol é circular e que o Sol é um corpo esférico com densidade uniforme, determine qual é o período orbital do sistema Sol-Terra depois da redução. A distância Terra-Sol vale $1,5 \cdot 10^{11}$ m.

66. Considere a situação hipotética conjecturada a seguir. Imagine que a Terra, de massa inicial **M**, e a Lua, de massa inicial **m**, se mantenham em repouso no espaço, com seus centros de massa separados por uma distância constante **d**. Suponha que porções sucessivas de massa da Terra sejam, de alguma maneira, transportadas para a Lua, de modo que os dois astros mantenham sempre sua forma esférica. Sendo **x** a massa levada da Terra para a Lua num determinado instante, pede-se:

a) Esboçar o gráfico da intensidade da força de atração gravitacional entre a Terra e a Lua, **F**, em função de **x**;
b) Estabelecer a relação entre as massas da Terra e da Lua para que o valor de **F** seja máximo.

TF1-230_259_5P_P2T4.indd 259 16/08/12 17:30

Tópico 5

Movimentos em campo gravitacional uniforme

Bloco 1

1. Introdução

Neste Tópico, estudaremos movimentos de corpos que, após serem abandonados ou lançados, submetem-se exclusivamente à força peso. Falaremos de corpos em queda vertical, de corpos lançados verticalmente, de corpos lançados obliquamente em relação à horizontal e também de corpos lançados horizontalmente.

Mesmo sendo estudado em condições ideais, isto é, **considerando desprezível a influência do ar**, esse assunto tem muita importância para a prática de atividades comuns em nosso cotidiano: nessas condições ideais, uma bola de futebol percorreria, por exemplo, a máxima distância horizontal possível se fosse lançada a 45° em relação ao gramado.

O estudo deste Tópico também é importante porque facilitará, no Volume 3 desta coleção, a análise do movimento de partículas eletrizadas sujeitas a um campo elétrico uniforme, por ser um movimento análogo aos estudados aqui.

Leitura

Uma breve história da balística

“Ao longo da História, em muitas situações, interesses econômicos nortearam o pensamento científico. Quando a pólvora, que já era usada na China há muito tempo, ficou conhecida na Europa, teve início um rápido desenvolvimento das armas de fogo: no século XIII, os árabes usavam artilharia pesada em suas investidas e, em meados do século XIV, as armas de fogo já faziam parte do arsenal bélico de todos os países da Europa oriental, meridional e central.

Gulf Images RM/Getty Images

No século XV, canhões foram aperfeiçoados e projéteis de pedra substituídos pelos de ferro, de modo que atingissem maiores velocidades de lançamento. No século XVI, foram desenvolvidas tabelas que forneciam o alcance horizontal dos projéteis para diversos ângulos de lançamento.

Entretanto, em meados do século XVII, esses conhecimentos empíricos de tiro mostraram-se insuficientes, pois não se apoiavam em princípios balísticos bem fundamentados. Disso decorreu a intervenção dos grandes físicos da época na história do desenvolvimento bélico, havendo evidências da relação de seus trabalhos com os interesses da artilharia. Galileu, por exemplo, investigou a queda vertical dos corpos e, com isso, reconheceu a forma parabólica da trajetória dos projéteis sem considerar a influência do ar em seus movimentos. Já Torricelli, Newton, Bernoulli e Euler investigaram a forma real da trajetória dos projéteis, isto é, sua forma modificada em virtude da influência do ar. Para tanto, tiveram de estudar, dentre outros assuntos, a relação entre a intensidade da resistência do ar e a velocidade do projétil.

Podemos dizer, então, que o estudo do lançamento de corpos não se deu simplesmente pelo desejo de se conhecer algo mais sobre a natureza, mas pela necessidade de sua aplicação em benefício do aprimoramento bélico e do cumprimento de interesses econômicos."

(HESSEN, Borís. *Las raíces socioeconómicas de la Mecánica de Newton.* Havana: Editorial Academia, 1985.)

2. Aceleração de um corpo em movimento livre

Considere corpos lançados ou abandonados nas proximidades da Terra e despreze qualquer influência que o ar possa ter em seus movimentos. Isso equivale a supor ausente a atmosfera terrestre (vácuo).

CJT/Zapt

$\vec{v}_0$

$t_0 = 0$: instante em que a pedra perde contato com a mão

$\vec{v}_0$

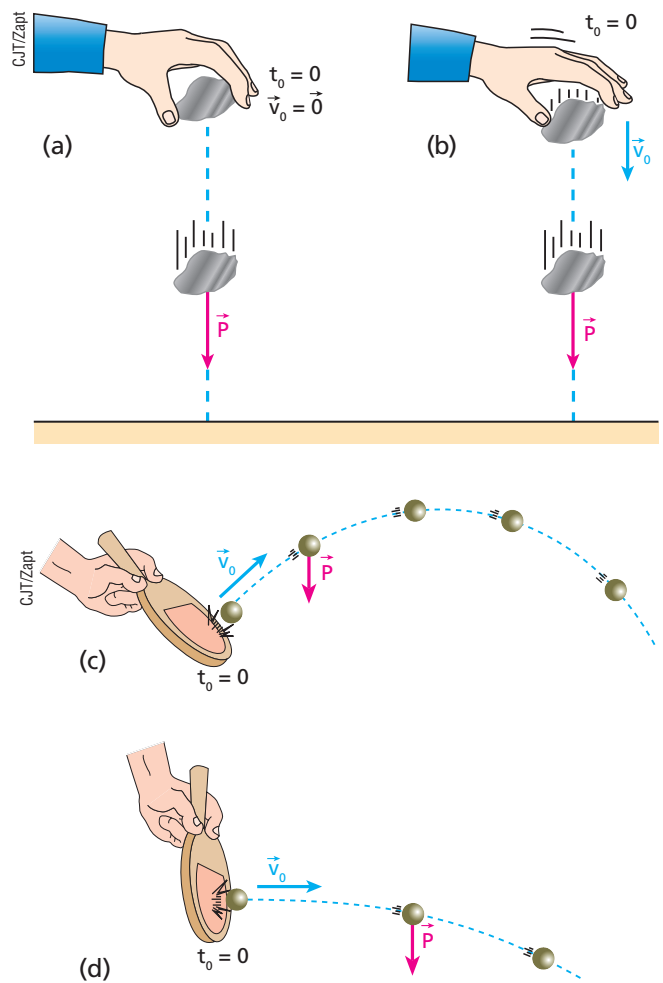
$t_0 = 0$: instante em que a bola perde contato com a raquete

Estudaremos esses movimentos a partir do instante em que os corpos deixam de interagir com o agente que os lançou ou abandonou. Por exemplo, ao se lançar com a mão uma pedra para cima, o movimento dessa pedra será estudado a partir do instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos) em que ela perder contato com a mão.

Do mesmo modo, no caso de se lançar uma bola com uma raquete, o movimento da bola será estudado a partir do instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos) em que ela perder contato com a raquete.

Nos dois casos citados, a força que impulsiona o corpo imprime-lhe uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. Essa força deixa de atuar após $t_0 = 0$, porque é desfeito o contato entre o corpo lançado e o agente que o lançou.

Isso significa que, após o instante em que uma partícula se livra do agente que a lançou ou abandonou, a única força que nela atua é seu peso $\vec{P}$. Dizemos, então, que o movimento da partícula é um movimento **livre**.

Nos casos representados nas figuras a seguir, a única força atuante no corpo após $t_0 = 0$ é o seu peso $\vec{P}$, sendo este a força resultante no corpo.

Em (**a**), uma pedra é abandonada (velocidade inicial nula).
Em (**b**), uma pedra é lançada verticalmente para baixo.
Em (**c**), uma bola de pingue-pongue é lançada obliquamente.
Em (**d**), uma bola de pingue-pongue é lançada horizontalmente.

Aplicando o Princípio Fundamental da Dinâmica a qualquer um desses corpos, após $t_0 = 0$, temos:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$\vec{F}$, porém, é o peso do corpo, que é igual a $m\,\vec{g}$. Assim:

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Concluímos, então, que:

A aceleração vetorial de uma partícula sob a ação exclusiva de seu peso é igual ao vetor campo gravitacional $\vec{g}$:

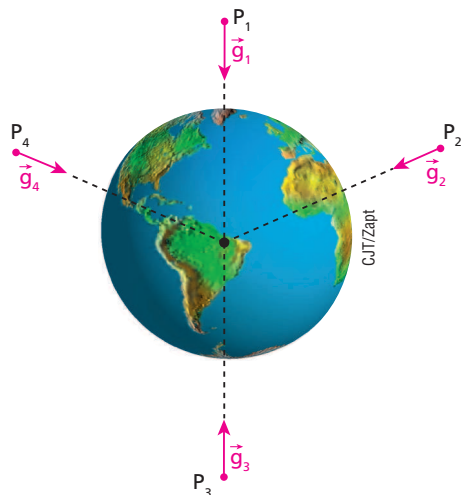
$$\vec{a} = \vec{g}$$

Nota:

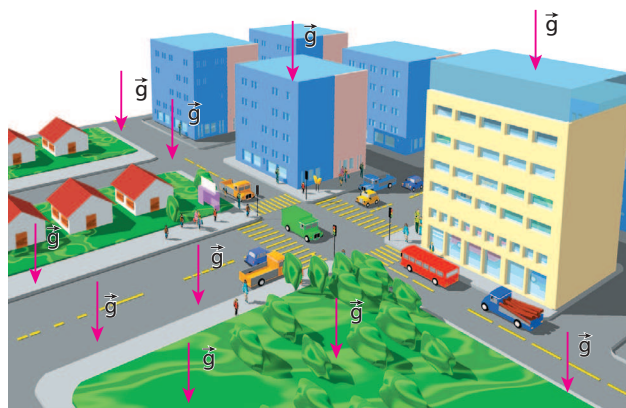
- A aceleração vetorial da partícula não depende de sua massa, e isso será analisado no item 5 deste Tópico.

3. Campo gravitacional uniforme

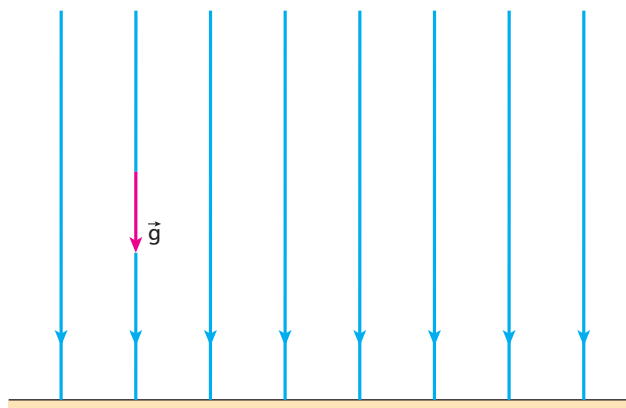
Como sabemos, a Terra é fonte de um campo gravitacional. Esse campo é descrito pelo vetor campo gravitacional $\vec{g}$, que varia de ponto para ponto do campo. Essa variação pode ocorrer com relação à intensidade, à direção e ao sentido de $\vec{g}$. A figura a seguir mostra o vetor campo gravitacional nos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4.

Entretanto, se tomarmos uma região de dimensões desprezíveis em comparação com o raio da Terra, podemos considerar que, em todos os seus pontos, o vetor $\vec{g}$ será o mesmo, ou seja, ele terá a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido. Nesse caso, o campo gravitacional será **uniforme**. É o que ocorre, por exemplo, em todos os pontos de uma sala de aula, de um edifício ou mesmo da cidade onde moramos.

Campo gravitacional uniforme é uma região em que $\vec{g}$ tem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido em todos os pontos.

As linhas de força do campo, isto é, as linhas que são tangenciadas por $\vec{g}$ em cada um de seus pontos, são retas paralelas igualmente orientadas. Embora essas linhas possam ser desenhadas em qualquer ponto do campo, desenhamos apenas algumas delas, igualmente espaçadas para indicar que o módulo de $\vec{g}$ é igual em toda região.

É válido, portanto, considerar uniforme o campo gravitacional nos movimentos de corpos que, lançados da superfície da Terra, apresentem, em relação à posição inicial, afastamentos desprezíveis em comparação com o raio desse planeta.

Campo gravitacional praticamente uniforme numa pequena região vizinha à superfície da Terra.

Nesse caso, temos que:

A aceleração vetorial do corpo sob a ação exclusiva de seu peso é constante e igual a $\vec{g}$.

Representação de algumas linhas de força de um campo gravitacional uniforme.

4. Movimento vertical em campo gravitacional uniforme

Considere um corpo abandonado ou lançado verticalmente para cima ou para baixo. Em qualquer um desses casos, como vimos, a aceleração vetorial ($\vec{a}$) é constante e igual a $\vec{g}$. Representemos por **g** o **módulo** dessa aceleração.

Como, nesses casos, os movimentos são retilíneos, a aceleração vetorial ($\vec{a}$) e a aceleração escalar (**α**) têm módulos iguais:

$$|\alpha| = g \quad (\text{constante} \neq 0)$$

Assim, concluímos que:

Em campo gravitacional uniforme, o movimento vertical de um corpo sob a ação exclusiva de seu peso é **uniformemente variado**, pois sua aceleração escalar é constante e diferente de zero. O módulo dessa aceleração é dado por:

$$|\alpha| = g$$

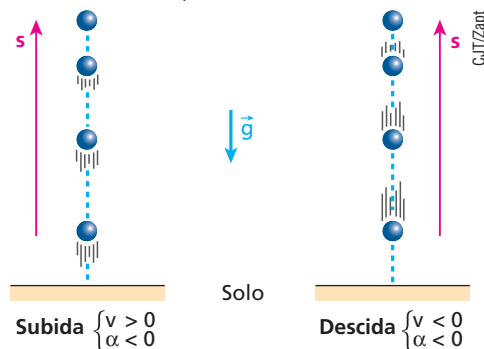
Portanto, as equações que descrevem esses movimentos são as mesmas que vimos ao estudarmos o movimento uniformemente variado, na Parte I deste livro:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$v = v_0 + \alpha t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha \, \Delta s$$

em que: **s** é o espaço;
v é a velocidade escalar;
α é a aceleração escalar.

Já sabemos que o módulo da aceleração escalar é igual a **g**, isto é, $|\alpha| = g$. Lembre-se, entretanto, de que a aceleração escalar (**α**) está sempre acompanhada de um sinal algébrico nas equações acima. Esse sinal (positivo ou negativo) depende **apenas** da orientação adotada para a trajetória. Como essa trajetória é vertical, ela poderá ser orientada para cima ou para baixo. Para cada um desses casos, vamos analisar o sinal de **α**.

Considere, por exemplo, uma partícula lançada verticalmente para cima. Como você já sabe, ela sobe em movimento retardado até parar, descendo, em seguida, em movimento acelerado. Suponha que a trajetória esteja orientada para cima.

Durante a subida, o movimento é retardado e, por esse motivo, a velocidade e a aceleração escalares devem ter sinais contrários em qualquer instante do movimento. Como o movimento de subida tem o mesmo sentido da trajetória, a velocidade escalar é positiva. Assim, para que tenha sinal contrário ao da velocidade escalar, a aceleração escalar deve ser negativa.

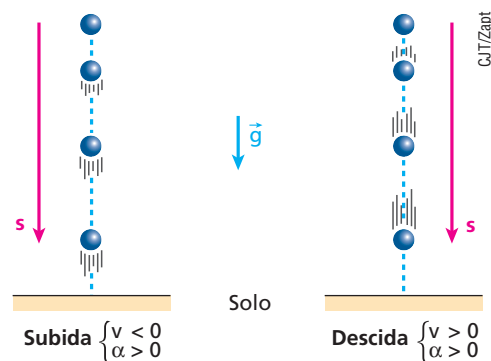
O movimento de descida, por sua vez, é acelerado. Consequentemente, a velocidade e a aceleração escalares devem ter sinais iguais. Como esse movimento tem sentido oposto ao da trajetória (que continua orientada para cima), a velocidade escalar é negativa. Para que a aceleração escalar tenha o mesmo sinal da velocidade escalar, ela também deve ser negativa.

Concluímos, então, que:

Se a trajetória estiver orientada para cima, a aceleração escalar será negativa, não importando se o movimento é ascendente ou descendente. Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, temos:

$$\alpha = -g$$

No ponto mais alto atingido pela partícula, sua velocidade é nula, mas o mesmo não acontece com sua aceleração, que também tem módulo igual a **g** nesse ponto.

Vamos analisar agora o caso em que a trajetória está orientada para baixo.

Na subida, a velocidade escalar é negativa. Assim, como o movimento é retardado, a aceleração escalar é positiva.

Na descida, a velocidade escalar é positiva, e, como o movimento é acelerado, também é positiva a aceleração escalar.

Concluímos, então, que:

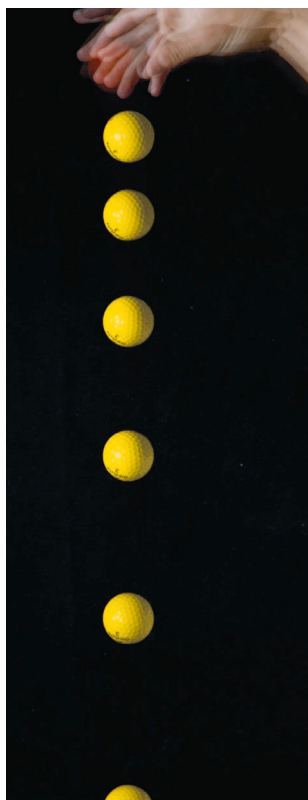
Se a trajetória estiver orientada para baixo, a aceleração escalar será positiva, não importando se o movimento é ascendente ou descendente. Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, temos:

$$\alpha = +g$$

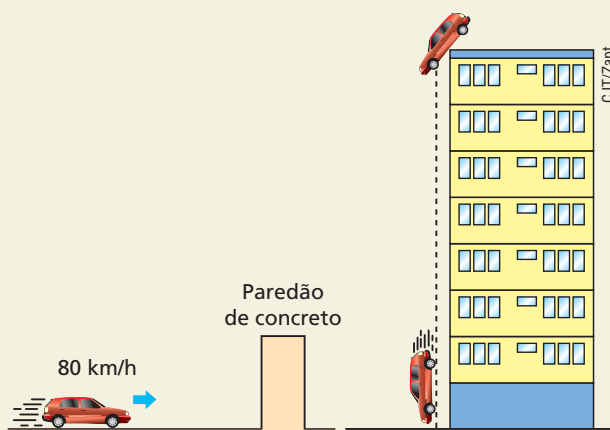
Para simplificar, podemos usar o valor algébrico de $\vec{g}$ em relação à orientação da trajetória. Assim, quando o sentido de $\vec{g}$ é o mesmo da orientação da trajetória, usamos $\alpha = +g$ nas equações do movimento. Caso contrário, usamos $\alpha = -g$.

Quanto ao valor de **g** nas vizinhanças da superfície da Terra, ele é próximo de 10 m/s^2. Isso significa que, durante a subida, o módulo da velocidade escalar diminui cerca de 10 m/s em cada segundo e que, durante a descida, esse módulo aumenta cerca de 10 m/s em cada segundo.

Nota:

- Considerando apenas uma casa decimal, o módulo de **g** nas vizinhanças da superfície da Terra é de 9,8 m/s^2. Para simplificar cálculos, entretanto, esse módulo é arredondado para 10 m/s^2.

Fotografia estroboscópica do movimento acelerado de uma bola em queda livre, a partir do repouso.

Os danos causados em um automóvel a 80 km/h, ao colidir frontalmente com um paredão, são aproximadamente equivalentes aos danos causados no mesmo automóvel após cair do topo de um prédio de oito andares (incluindo o térreo). De fato, considerando cada andar com cerca de 3 m de altura, g = 9,8 m/s^2 e nula a velocidade do automóvel ao iniciar a queda, sua velocidade ao atingir o solo, desprezando a influência do ar, é dada por:

$$v^2 = 2\,g\,\Delta s = 2 \cdot 9{,}8 \cdot (8 \cdot 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v \cong 22 \text{ m/s} \cong 80 \text{ km/h}$$

5. Propriedades do movimento vertical

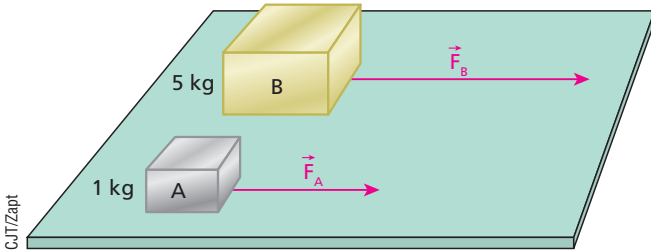
O movimento vertical que estamos estudando conta com algumas propriedades importantes. Antes de conhecê-las, lembre-se de que esse movimento está sendo analisado supondo sempre o campo gravitacional uniforme e considerando o móvel sob a ação exclusiva de seu peso, ou seja, em movimento livre.

1ª Propriedade

Corpos abandonados num mesmo local e na mesma altura em relação ao solo demoram o mesmo intervalo de tempo para chegar ao solo, não importando as suas massas.

Isso decorre do fato de suas acelerações serem iguais, quaisquer que sejam suas massas. Assim, se não fosse a presença do ar, uma pena e um martelo cairiam com a mesma aceleração. Isso normalmente causa estranheza, pelo fato de estarmos habituados a presenciar quedas de corpos com influência do ar. Essa influência é mais significativa para a pena que para o martelo, por isso ela demora mais para cair.

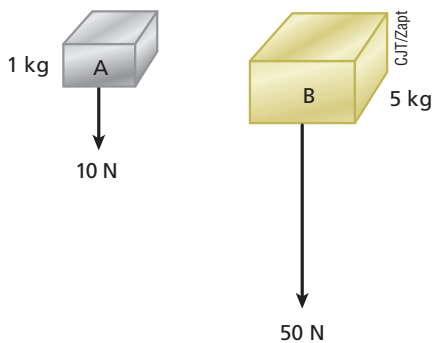
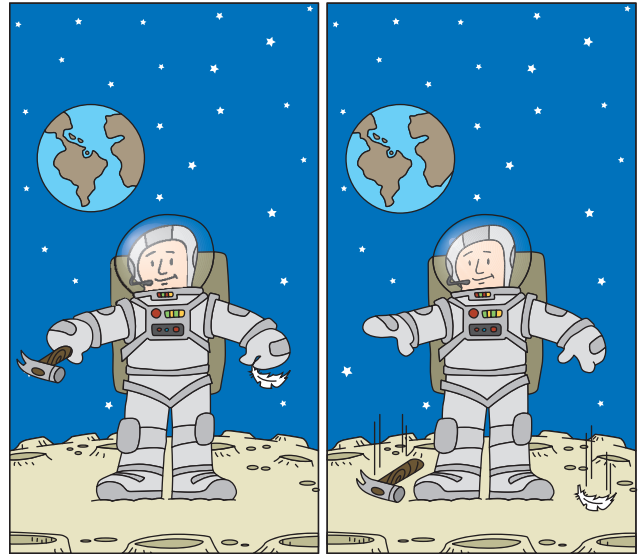
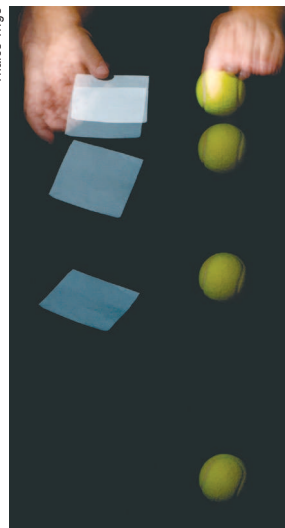
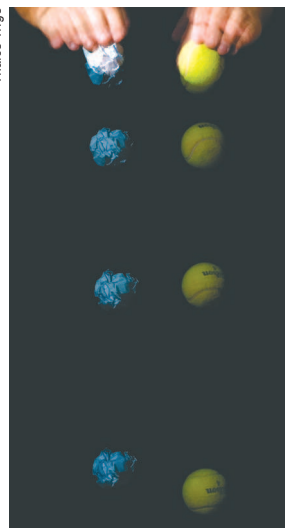
TF1-260_289_5P_P2T5.indd 264 16/08/12 17:31

Para perceber que a propriedade citada é, ou deveria ser, evidente, imagine o seguinte experimento. Dois blocos, **A** e **B**, de ferro, por exemplo, estão apoiados em repouso em um plano horizontal liso. Suponha que nossa missão seja movimentar os dois blocos com a mesma aceleração escalar de 10 m/s^2, em trajetórias retilíneas, puxando-os com forças horizontais.

Será que devemos puxar os dois blocos com forças de mesma intensidade? É claro que não! O corpo **B**, por ter massa maior (inércia maior), requer uma força mais intensa para ter aceleração igual à de **A**:

$$F_A = m_A \alpha = 1 \cdot 10 \Rightarrow F_A = 10 \text{ N}$$
$$F_B = m_B \alpha = 5 \cdot 10 \Rightarrow F_B = 50 \text{ N}$$

Então, se puxarmos o bloco **A** com 10 N e o bloco **B** com 50 N, ambos terão a mesma aceleração, de 10 m/s^2.

Suponhamos, agora, que os blocos **A** e **B** sejam abandonados nas proximidades da Terra e que suas quedas sejam livres.

Admitindo g = 10 m/s^2, os pesos de **A** e de **B** valem, respectivamente, 10 N e 50 N (P = m g), sendo esses pesos as forças resultantes durante a queda.

Assim, é evidente que, apesar de os pesos serem diferentes, **A** e **B** têm a mesma aceleração de 10 m/s^2. Observe que o corpo de maior massa (maior inércia) é atraído com força proporcionalmente mais intensa (peso maior). Por isso, tem aceleração igual à do outro corpo.

Na Lua, as quedas são realmente livres, pois lá não existe atmosfera. Assim, um martelo e uma pena, abandonados simultaneamente de uma mesma altura, caem com a mesma aceleração, chegando ao solo no mesmo instante e com a mesma velocidade final, como sugere a ilustração.

Na Terra, as quedas não são livres. Por isso, quando uma bola de borracha e uma folha de papel são abandonadas de uma mesma altura, a bola chega ao chão bem antes que a folha de papel: a resistência do ar afeta muito mais o movimento do papel que o da bola.

Repetindo o experimento com a folha de papel bem amassada, a bola e o papel chegam ao chão quase no mesmo instante, pois a resistência do ar no papel amassado ficou consideravelmente reduzida.

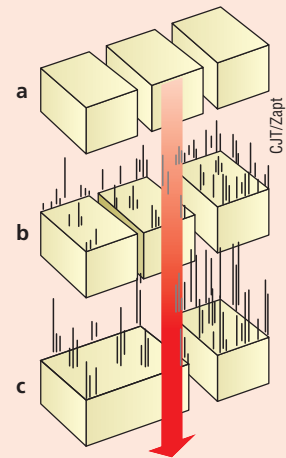
Leitura

Uma experiência imaginária de Galileu

Galileu Galilei, o grande físico italiano do século XVII, não tinha como provar por teoria ou mostrar experimentalmente que a aceleração de corpos de massas diferentes, em queda livre, é rigorosamente a mesma. Por isso, concebeu mentalmente o experimento descrito a seguir.

Galileu imaginou três corpos **idênticos**, cada um com massa **m**, abandonados da mesma altura (**a**). Não há, nesse caso, nenhum motivo para que suas acelerações sejam diferentes. Caem, portanto, lado a lado.

Em seguida, ele imaginou que dois desses corpos, durante a queda, se ligassem um ao outro, como se fossem duas pessoas que, caindo emparelhadas, se dessem as mãos (**b**). Como esses corpos ja caíam lado a lado, o fato de se interligarem não deve alterar as caracterísiticas de suas quedas.

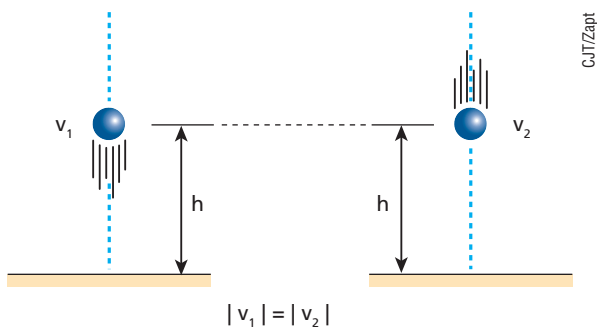
Finalmente, ele pensou que os dois corpos ligados se comportariam exatamente como um único corpo de massa 2 m (**c**). Assim, concluiu que um corpo de massa 2 m e um de massa **m** devem cair com a mesma aceleração.

2ª Propriedade

Quando um corpo é lançado verticalmente para cima, a velocidade com que ele passa por um ponto qualquer da trajetória, na subida, tem o mesmo módulo da velocidade com que ele passa pelo mesmo ponto, na descida.

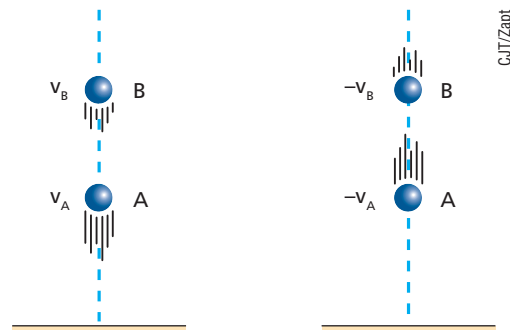
Essa propriedade pode ser demonstrada a partir da equação de Torricelli, considerando v_1 a velocidade inicial e v_2 a final:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\alpha\,\Delta s$$

Como $\Delta s = 0$, vem:

$$v_2^2 = v_1^2 \Rightarrow |v_2| = |v_1|$$

Assim, se um objeto fosse lançado verticalmente para cima a partir do solo, ele chegaria de volta à posição inicial com velocidade de módulo igual ao da velocidade de lançamento (desprezada a influência do ar).

3ª Propriedade

O intervalo de tempo decorrido entre as passagens por dois pontos **A** e **B** da trajetória é o mesmo na subida e na descida.

Na subida de **A** até **B**, podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow \alpha = \frac{v_B - v_A}{\Delta t_{AB}}$$

$$\Delta t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{\alpha} \qquad \text{(I)}$$

Na descida de **B** até **A**, temos:

$$\alpha = \frac{\Delta v_{BA}}{\Delta t_{BA}} \Rightarrow \alpha = \frac{-v_A - (-v_B)}{\Delta t_{BA}}$$

$$\Delta t_{BA} = \frac{v_B - v_A}{\alpha} \qquad \text{(II)}$$

Comparando as expressões (I) e (II), concluímos que o intervalo de tempo para a partícula subir de **A** até **B** é igual ao intervalo de tempo para ela descer de **B** até **A**, ou seja:

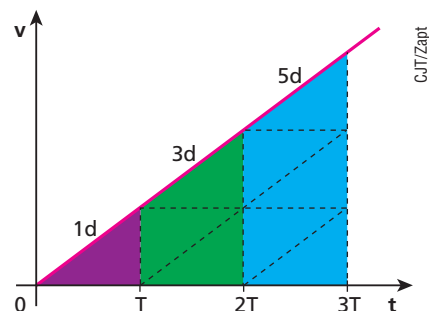
$$\Delta t_{AB} = \Delta t_{BA}$$

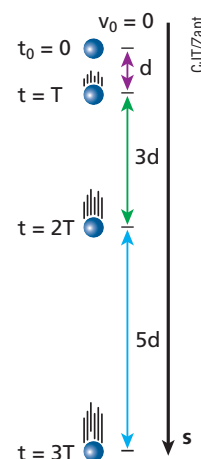
Dessa propriedade, concluímos também que, quando um corpo é atirado para cima, o intervalo de tempo decorrido até ele atingir a altura máxima é o mesmo que decorre, em seguida, para voltar ao ponto de lançamento.

Nota:

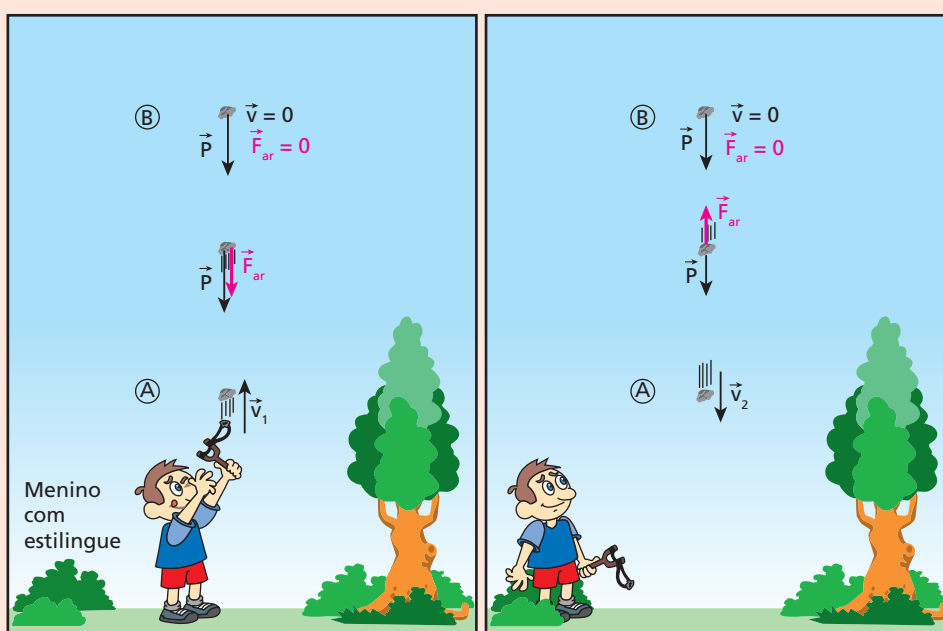
- A 2ª e a 3ª propriedades não são exclusividades do movimento vertical livre, mas de qualquer movimento uniformemente variado que tenha as duas etapas: a ida e a volta (ver exercício 42 do Tópico 3 de **Cinemática**).

Propriedade especial para corpos que caem a partir do repouso

Um corpo caindo livremente a partir do **repouso** percorre, em iguais intervalos de tempo, distâncias proporcionais aos números ímpares, isto é, 1d, 3d, 5d e assim por diante. Isso pode ser facilmente provado lembrando que a distância percorrida pode ser obtida pela "área" no gráfico da velocidade escalar em função do tempo.

Você também pode provar essa propriedade usando o seguinte fato: durante um determinado intervalo de tempo **t**, o corpo cai:

$$\Delta s = \frac{g}{2}\, t^2.$$

Leitura

Movimento vertical real

Nos movimentos verticais que acontecem nas proximidades da superfície da Terra, a influência do ar altera as conclusões a que chegamos no estudo das propriedades do movimento vertical.

Quando um projétil é disparado verticalmente para cima, ele sobe em movimento retardado, com aceleração variável e de módulo maior que **g**. Isso é verdade porque, na subida, atuam no projétil duas forças de **mesmo sentido**: seu peso $\vec{P}$ e a força de resistência do ar, $\vec{F}_{ar}$. Assim, a força resultante é mais intensa que na ascensão livre:

$$F = m\,a \Rightarrow P + F_{ar} = m\,a \Rightarrow a = \frac{P + F_{ar}}{m} \quad \text{(maior que } \mathbf{g}\text{)}$$

Como F_{ar} é variável, **a** também o é. Na descida, entretanto, o movimento é acelerado pelo menos durante certo tempo, com aceleração variável e de módulo menor que **g**. De fato, nesse caso, as forças $\vec{P}$ e $\vec{F}_{ar}$ atuantes no projétil têm **sentidos opostos**. Assim, a força resultante é menos intensa que na queda livre:

$$F = m\,a \Rightarrow P - F_{ar} = m\,a \Rightarrow a = \frac{P - F_{ar}}{m} \quad \text{(menor que } \mathbf{g}\text{)}$$

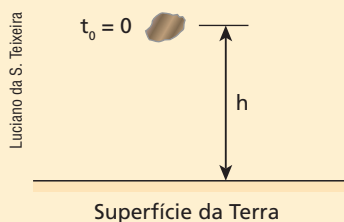
Temos, então, as seguintes consequências da presença do ar:

- A aceleração não é constante, tem módulo diferente de **g** e, além disso, depende da massa do projétil.
- Na subida, o projétil é freado mais intensamente do que é acelerado na descida. Por isso, $\Delta t_{AB} < \Delta t_{BA}$.
- O módulo da velocidade com que o projétil retorna à posição inicial é menor que o da velocidade de lançamento: $|\vec{v}_2| < |\vec{v}_1|$. Entretanto, o perigo oferecido pelo projétil no retorno não pode ser descartado.

Exercícios

nível 1

1. E.R. No instante $t_0 = 0$, uma pedra é abandonada (velocidade inicial nula) de um ponto situado nas proximidades da superfície da Terra a uma altura **h**.

Superfície da Terra

Desprezando a influência do ar e sendo **g** o módulo do vetor campo gravitacional, determine:

a) o intervalo de tempo decorrido desde o abandono da pedra até seu impacto com o solo, ou seja, o tempo de queda (t_q);

b) o módulo da velocidade com que a pedra atinge o solo, isto é, sua velocidade de impacto (v_i).

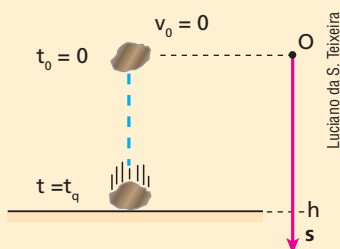
Resolução:

Adotando a origem dos espaços na posição de abandono da pedra e orientando a trajetória para baixo, temos $\alpha = g$.

Em $t_0 = 0$: $s_0 = 0$

e $v = v_0 = 0$

Em $t = t_q$: $s = h$

e $v = v_i$

a) A função horária do espaço é adequada para resolver este item, pois ela relaciona espaço com tempo:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \Rightarrow h = 0 + 0t_q + \frac{g}{2} t_q^2 \Rightarrow \boxed{t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Observe que o tempo de queda não depende da massa do corpo abandonado, o que está de acordo com a 1ª propriedade do estudo do movimento vertical.

b) De acordo com a **equação de Torricelli**, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\,(s - s_0)$$

$$v_i^2 = 0^2 + 2g\,(h - 0)$$

$$\boxed{v_i = \sqrt{2gh}}$$

Observe que a velocidade v_i com que a pedra chega ao chão também não depende de sua massa.

2. Um corpo cai de uma altura igual a 245 m em relação ao solo. Considerando $g = 10\ m/s^2$ e supondo ausente a atmosfera, determine:

a) o tempo de duração da queda;

b) o módulo da velocidade do corpo imediatamente antes de se chocar com o solo.

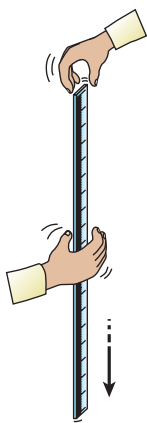
3. Uma pedra abandonada na Lua, de um ponto situado a 80 m de altura, demora 10 s para atingir a superfície desse satélite. Determine:

a) o módulo do vetor campo gravitacional nas proximidades da superfície lunar;

b) o intervalo de tempo que uma pedra, com o dobro da massa da primeira, demoraria para cair da mesma altura.

4. Um objeto cai verticalmente, passando por um nível horizontal a 1,0 m/s e depois por outro nível horizontal a 9,0 m/s. Qual a distância entre os dois níveis citados? Adote $g = 10\ m/s^2$.

5. (UFPE) Uma bola cai em queda livre a partir do repouso. Quando a distância percorrida for **h**, a velocidade será $\mathbf{v_1}$. Quando a distância percorrida for 16 h a velocidade será $\mathbf{v_2}$. Calcule a razão $\frac{v_2}{v_1}$. Considere desprezível a resistência do ar.

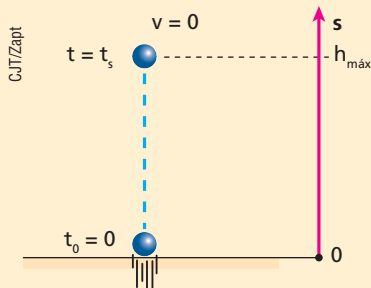
6. (Vunesp-SP) Um experimento simples, realizado com a participação de duas pessoas, permite medir o tempo de reação de um indivíduo. Para isso, uma delas segura uma régua de madeira, de 1 m de comprimento, por uma de suas extremidades, mantendo-a pendente na direção vertical. Em seguida, pede que o colega coloque os dedos em torno da régua, sem tocá-la, próximos da marca correspondente a 50 cm, e o instrui para agarrá-la tão logo perceba que foi solta. Determine, a partir da aceleração da gravidade (**g**) e da distância (**d**) percorrida pela régua na queda, o tempo de reação dessa pessoa.

7. Considere um tubo disposto verticalmente, no qual se realizou o vácuo. Um dispositivo faz uma bolinha metálica ser abandonada dentro do tubo, em sua extremidade superior. Sabendo que esse experimento é realizado na superfície da Terra, podemos afirmar que a bolinha:

a) não cai, porque não existe gravidade no vácuo;
b) cai em movimento retilíneo e uniforme;
c) cai com uma aceleração tanto maior quanto mais intenso for o seu peso;
d) cai com a mesma aceleração com que cairia nas vizinhanças da Lua;
e) cai com aceleração de módulo aproximadamente igual a 9,8 m/s², independentemente da intensidade de seu peso.

8. Em uma de suas aventuras, o grande cavaleiro Serjão Miq estava em uma planície, sentado no galho de uma árvore, a 4,7 m do chão. Precisando partir, assobiou para seu cavalo Jaque, que pastava ali por perto.
Jaque, com velocidade constante de 10 m/s, galopou em linha reta até Serjão, que, depois de ter abandonado o galho, caiu sobre a sela do cavalo, elevada de 1,5 m do chão.
Determine a distância, **medida na horizontal**, entre o cavaleiro e a sela no momento em que ele se soltou do galho. Use **g** igual a 10 m/s².

9. E.R. Um corpo é arremessado verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, com velocidade v_0 em $t_0 = 0$. Desprezando a influência do ar e sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, determine:
a) o intervalo de tempo decorrido desde $t_0 = 0$ até a pedra atingir sua altura máxima, isto é, o tempo de subida (t_s);
b) o intervalo de tempo durante o qual a pedra volta do ponto de altura máxima até a superfície da Terra, ou seja, o tempo de queda (t_q);
c) a altura máxima ($h_{máx}$) atingida pela pedra em relação ao ponto de lançamento.

Resolução:

Nesse caso, adotando a origem dos espaços no ponto de lançamento e orientando a trajetória para cima, temos $\alpha = -g$.

Em $t_0 = 0$: $s_0 = 0$ e $v = v_0$
Em $t = t_s$: $s = h_{máx}$ e $v = 0$

a) Usando a função horária da velocidade escalar, temos:

$$v = v_0 + \alpha\, t \;\Rightarrow\; 0 = v_0 - g\, t_s$$

$$\boxed{t_s = \frac{V_0}{g}}$$

b) O tempo de queda (t_q) é igual ao tempo de subida. Assim:

$$\boxed{t_q = \frac{V_0}{g}}$$

c) Usando a equação de Torricelli, temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\,(s - s_0)$$

$$0^2 = v_0^2 + 2(-g)\,(h_{máx} - 0)$$

$$\boxed{h_{máx} = \frac{V_0^2}{2g}}$$

Observe que o tempo de subida, o tempo de queda e a altura máxima são independentes da massa do corpo.

10. Um parafuso é jogado verticalmente para cima com velocidade de módulo 20 m/s. Desprezando a influência do ar e sendo $g = 10$ m/s², determine:
a) o intervalo de tempo decorrido até o parafuso retornar ao ponto de lançamento;
b) a altura máxima atingida pelo parafuso em relação ao ponto de lançamento.

11. Um astronauta em solo lunar lança uma pedra verticalmente para cima no instante $t_0 = 0$, com velocidade inicial de módulo 32 m/s ($g = 1{,}6$ m/s²).
a) Em que instante a pedra atinge o ponto de altura máxima?
b) Qual a altura máxima atingida?

12. Uma esfera de chumbo é lançada verticalmente para cima e retorna ao ponto de partida 8,0 s após o lançamento. Considerando desprezíveis as influências do ar e usando **g** igual a 10 m/s², calcule:
a) o módulo da velocidade de lançamento;
b) a altura máxima atingida pela esfera em relação ao ponto de partida.

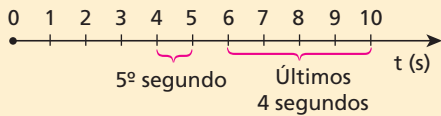
13. (UFPE) A partir da altura de 7,0 m, atira-se uma pequena bola de chumbo verticalmente para baixo, com velocidade de módulo 2,0 m/s. Despreze a resistência do ar e calcule o valor, em m/s, da velocidade da bola ao atingir o solo ($g = 10$ m/s²).

14. Um senhor, levando uma maleta numa das mãos, entra num elevador no último andar de um edifício. Durante a descida, ele solta a maleta e verifica que ela não cai em relação ao seu corpo. Nessa situação, o que se pode concluir sobre o movimento do elevador em relação ao solo?

15. Uma partícula é abandonada a partir do repouso, de um ponto situado a 270 m acima do solo. Divida essa altura em três partes tais que sejam percorridas em intervalos de tempo iguais.

Exercícios — nível 2

16. E.R. Um corpo com velocidade inicial nula cai no vácuo durante 10 s. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine a distância percorrida pelo corpo:
a) durante os últimos 4 segundos de queda;
b) durante o 5º segundo de queda.

Resolução:

a) Os últimos 4 segundos iniciam-se em $t_1 = 6$ s e terminam em $t_2 = 10$ s. Calculemos as velocidades escalares em $t_1 = 6$ s e em $t_2 = 10$ s, considerando a trajetória do corpo orientada para baixo ($\alpha = g$):

$$v = v_0 + \alpha t$$
$$v = 10t$$

Em $t_1 = 6$ s, temos: $v_1 = 10 \cdot 6 \Rightarrow v_1 = 60 \text{ m/s}$
Em $t_2 = 10$ s, temos: $v_2 = 10 \cdot 10 \Rightarrow v_2 = 100 \text{ m/s}$

Aplicando a **equação de Torricelli** entre t_1 e t_2, vem:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\alpha\,\Delta s$$
$$100^2 = 60^2 + 2 \cdot 10 \cdot \Delta s$$
$$\boxed{\Delta s = 320 \text{ m}}$$

b) O 5º segundo inicia-se em $t'_1 = 4$ s e termina em $t'_2 = 5$ s.

Em $t'_1 = 4$ s, temos: $v'_1 = 10t'_1 = 10 \cdot 4 \Rightarrow v'_1 = 40 \text{ m/s}$

Em $t'_2 = 5$ s, temos: $v'_2 = 10t'_2 = 10 \cdot 5 \Rightarrow v'_2 = 50 \text{ m/s}$

Aplicando a **equação de Torricelli**, vem:

$$v'^2_2 = v'^2_1 + 2\alpha\,\Delta s'$$
$$50^2 = 40^2 + 2 \cdot 10 \cdot \Delta s'$$
$$\boxed{\Delta s' = 45 \text{ m}}$$

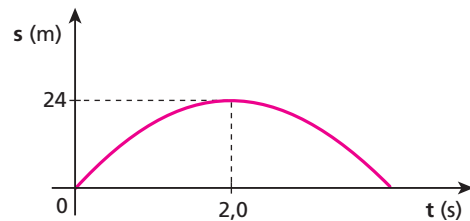
17. Suponha que um corpo caia livremente de um ponto a 490 m acima do solo. Determine seu deslocamento durante o último segundo de sua queda, considerando $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

18. Num dia chuvoso, surgiu uma goteira no teto de uma fábrica. Gotas de água começaram a cair periodicamente, com velocidade inicial nula. Sendo **H** a altura do teto e sabendo que a primeira gota formada toca o solo no instante em que a terceira está se desprendendo, desenhe as gotas nesse instante, indicando as distâncias entre elas.

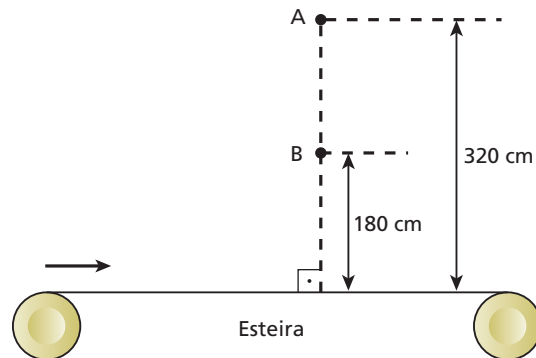
19. (UFSCar-SP) Uma pedra cai de uma altura **h** e os últimos 196 m são percorridos em 4,0 s. Desprezando a resistência do ar e fazendo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule **h**.

20. Um corpo é arremessado verticalmente para cima com velocidade inicial de módulo 100 m/s. Desprezando a influência do ar e supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:
a) a altura máxima atingida pelo corpo em relação ao ponto de lançamento;
b) a velocidade escalar do corpo ao passar pelo ponto situado a 255 m acima do ponto de lançamento.

21. Uma bolinha de chumbo é lançada verticalmente para cima, realizando uma ascensão praticamente livre, de duração maior que 2 s. Considerando $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$:
a) Qual é a distância percorrida pela bolinha durante o último segundo da subida?
b) A resposta do item **a** depende do módulo da velocidade de lançamento?
c) A distância percorrida no último segundo de queda, no retorno ao ponto de partida, depende do módulo da velocidade de lançamento?

22. Da superfície de um astro, uma pedra foi lançada verticalmente para cima. Sua posição em relação à superfície variou com o tempo, de acordo com o gráfico seguinte, que é praticamente um arco de parábola:

Calcule:
a) o módulo v_0 da velocidade de lançamento da pedra;
b) a intensidade **g** do campo gravitacional na superfície desse astro.

23. Um objeto é atirado verticalmente para baixo com velocidade igual a 20 m/s, de um ponto situado a 300 m do solo. Desprezando qualquer influência do ar e supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine, ao final do 5º segundo de movimento:
a) a velocidade escalar do objeto;
b) a sua altura relativa ao solo.

24. (Mack-SP) Os pontos **A** e **B**, da mesma vertical, estão respectivamente a 320 cm e 180 cm de altura de uma esteira rolante. No mesmo instante, de cada um desses pontos, abandona-se do repouso uma pedra. Essas pedras atingem pontos da esteira que distam 16 cm entre si. A velocidade escalar da esteira é constante igual a:
a) 90 cm/s. b) 85 cm/s. c) 80 cm/s. d) 60 cm/s. e) 40 cm/s.

Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e despreze o efeito do ar.

25. (Olimpíada Brasileira de Física) Uma pessoa está na sacada de um prédio e joga uma pedra verticalmente para cima com velocidade inicial de módulo v_0. Depois, ela joga uma segunda pedra, só que agora verticalmente para baixo, com o mesmo módulo de velocidade v_0. Desprezando-se a resistência do ar, podemos afirmar que, em relação à situação em que elas estão chegando ao chão, a pedra jogada para cima terá:

a) a mesma aceleração que a jogada para baixo, mas velocidade maior em módulo.
b) a mesma aceleração que a jogada para baixo, mas velocidade menor em módulo.
c) a mesma aceleração e velocidade que a jogada para baixo.
d) a mesma velocidade que a jogada para baixo, mas uma aceleração maior em módulo.
e) a mesma velocidade que a jogada para baixo, mas aceleração menor em módulo.

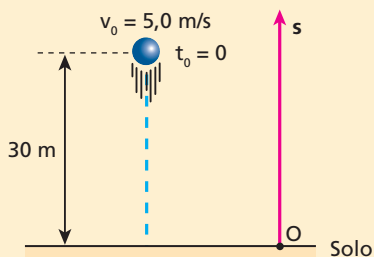
26. De uma janela de um edifício, a 60,0 m de altura, uma pedra **A** é lançada verticalmente para cima com velocidade escalar de 19,6 m/s, no instante $t_0 = 0$ em que se inicia a contagem do tempo. Decorridos 3,0 s, uma outra pedra **B** é abandonada do mesmo local. Desprezando a influência do ar e considerando $g = 9,8\ m/s^2$, determine:

a) o instante em que a pedra **A** passa pela pedra **B**;
b) a que altura, relativa ao solo, **A** passa por **B**.

27. E.R. Um balão sobe verticalmente com velocidade escalar constante de módulo 5,0 m/s. Quando sua altura em relação ao solo é de 30 m, um garoto abandona do balão um pequeno pacote, que fica sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre, cuja intensidade é de 10 m/s². Determine:

a) a altura máxima que o pacote alcança em relação ao solo;
b) o intervalo de tempo gasto pelo pacote para chegar ao solo, a contar do instante em que foi abandonado;
c) o módulo da velocidade escalar de impacto do pacote contra o solo.

Resolução:

a) Quando o garoto abandona o pacote, este está subindo verticalmente a 5,0 m/s em relação ao solo. Por isso, em relação ao solo, o pacote ainda sobe um pouco, antes de descer.

Adotando a origem dos espaços no solo e orientando a trajetória para cima, temos, para o pacote:

$$s_0 = 30\ m,\ v_0 = 5,0\ m/s \text{ e } \alpha = -g = -10\ m/s^2$$

Usando a **equação de Torricelli**:

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\,(s - s_0)$$

$$v^2 = 25 - 20(s - 30) \qquad \text{(I)}$$

Quando o pacote atinge a altura máxima, temos:

$$v = 0 \quad \text{e} \quad s = h_{máx}$$

Substituindo em (I), vem:

$$0 = 25 - 20(h_{máx} - 30)$$

$$\boxed{h_{máx} = 31,25\ m}$$

b) Usando a função horária do espaço, temos:

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{\alpha}{2}\,t^2$$

$$s = 30 + 5t - 5t^2 \qquad \text{(II)}$$

Ao chegar ao solo:

$$s = 0 \quad \text{e} \quad t = t_c$$

Substituindo em (II), vem:

$$0 = 30 + 5t_c - 5t_c^2$$

$$\boxed{t_c = 3,0\ s}$$

c) Usando a função horária da velocidade, temos:

$$v = v_0 + \alpha\,t$$

$$v = 5 - 10t \qquad \text{(III)}$$

Ao chegar ao solo:

$$v = v_c \quad \text{e} \quad t = t_c = 3,0\ s$$

Substituindo em (III), vem:

$$v_c = 5 - 10 \cdot 3 \Rightarrow v_c = -25\ m/s$$

$$\boxed{|v_c| = 25\ m/s}$$

28. De um helicóptero descendo verticalmente a 6 m/s é abandonada uma esfera de aço, que demora 2 s para chegar ao solo. Considerando livre a queda da esfera, calcule a altura de onde ela foi abandonada ($g = 10\ m/s^2$).

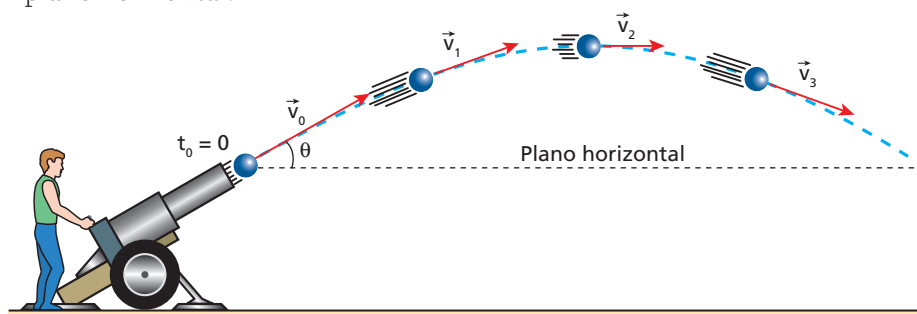
29. Do teto de um elevador de 2,45 m de altura interna, subindo em movimento uniforme, desprende-se um parafuso. Considerando $g = 10\ m/s^2$, calcule:

a) o intervalo de tempo decorrido desde o instante em que o parafuso se desprendeu até o instante em que atinge o piso do elevador;
b) o deslocamento do elevador durante o intervalo de tempo a que se refere o item anterior, supondo que sua velocidade escalar seja igual a 2 m/s.

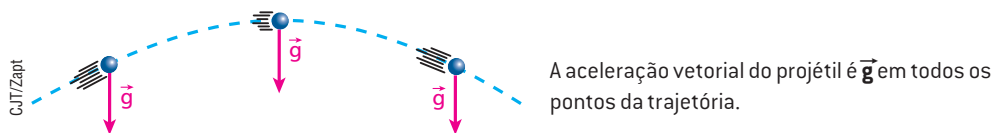
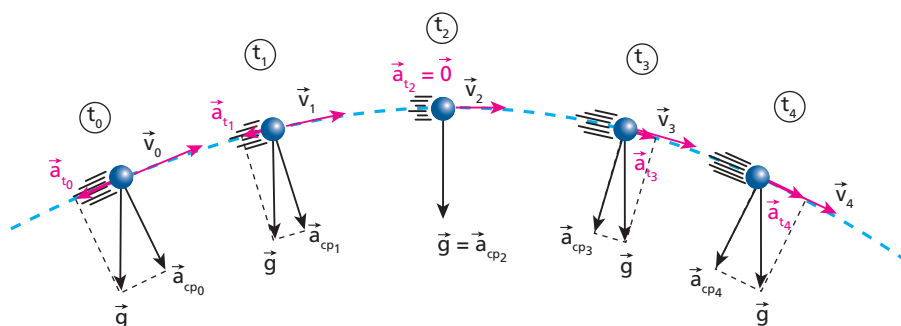
Bloco 2

6. Movimento parabólico em campo gravitacional uniforme

Introdução

Considere um projétil lançado obliquamente com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$, inclinada de um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ em relação a um plano horizontal:

Como será demonstrado mais adiante, a trajetória do projétil é um arco de parábola (desprezada a influência do ar). Como ocorre em todo movimento, a velocidade vetorial é tangente à trajetória a todo instante, tendo o mesmo sentido do movimento, como está representado na figura anterior. Note que a velocidade no ponto mais alto atingido pelo projétil é horizontal e, portanto, **não nula**.

De acordo com as análises feitas no início deste Tópico, a aceleração vetorial do projétil, após livrar-se do agente que o lançou, é constante e igual a $\vec{g}$.

A aceleração vetorial do projétil é $\vec{g}$ em todos os pontos da trajetória.

Enquanto o projétil sobe, seu movimento é retardado, tornando-se acelerado durante a descida. Observe que a componente tangencial de $\vec{g}$ ($\vec{a}_t$) tem sentido oposto ao da velocidade durante a subida, mas passa a ter o mesmo sentido da velocidade durante a descida:

O movimento de subida é retardado, ao passo que o movimento de descida é acelerado. A velocidade no ponto mais alto tem módulo mínimo, mas não é nula.

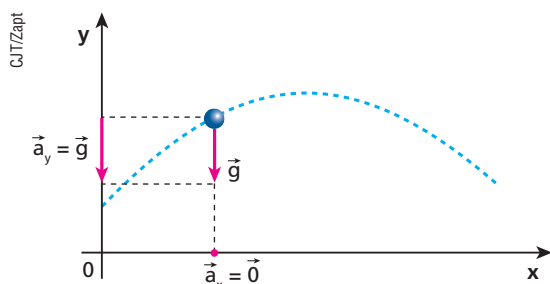
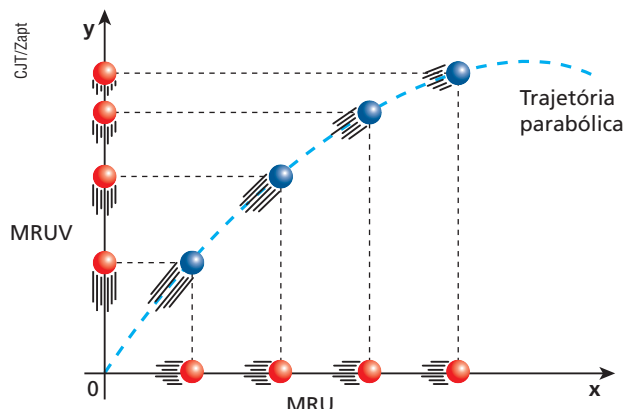
De acordo com a figura anterior, temos que o módulo da aceleração tangencial varia durante o movimento. Lembrando que o módulo da aceleração tangencial é igual ao módulo da aceleração escalar, concluímos que a aceleração escalar também varia durante o movimento. Por causa dessa variação, **o movimento não é uniformemente variado**, fato que nos impede de equacioná-lo diretamente. Podemos estudar esse movimento, entretanto, fazendo sua decomposição, como veremos a seguir.

Decomposição do movimento parabólico em direções horizontal e vertical

Partículas incandescentes lançadas obliquamente durante uma erupção vulcânica descrevem trajetórias aproximadamente parabólicas.

Considere um sistema de eixos ortogonais Oxy, no mesmo plano de um movimento parabólico de aceleração vetorial constante e igual a $\vec{g}$. Projetemos essa aceleração sobre os eixos.

Dessa projeção, concluímos que a aceleração vetorial segundo Oy (eixo vertical) é constante e igual a $\vec{g}$, ao passo que a aceleração vetorial segundo Ox (eixo horizontal) é constantemente nula. Assim, temos:

$$\vec{a}_y = \vec{g} \text{ (constante)}$$
$$\vec{a}_x = \vec{0} \text{ (constante)}$$

Se projetarmos sobre os eixos Ox e Oy as posições da partícula em movimento parabólico, obteremos, evidentemente, dois movimentos retilíneos.

Assim, no movimento projetado em Oy, a aceleração $\vec{a}_y$ é tangencial e constante. Pelo fato de essa aceleração ser constante e não nula, concluímos que a aceleração escalar segundo Oy também é constante e diferente de zero.

$$|\alpha_y| = |\vec{a}_y| = g$$

Então:

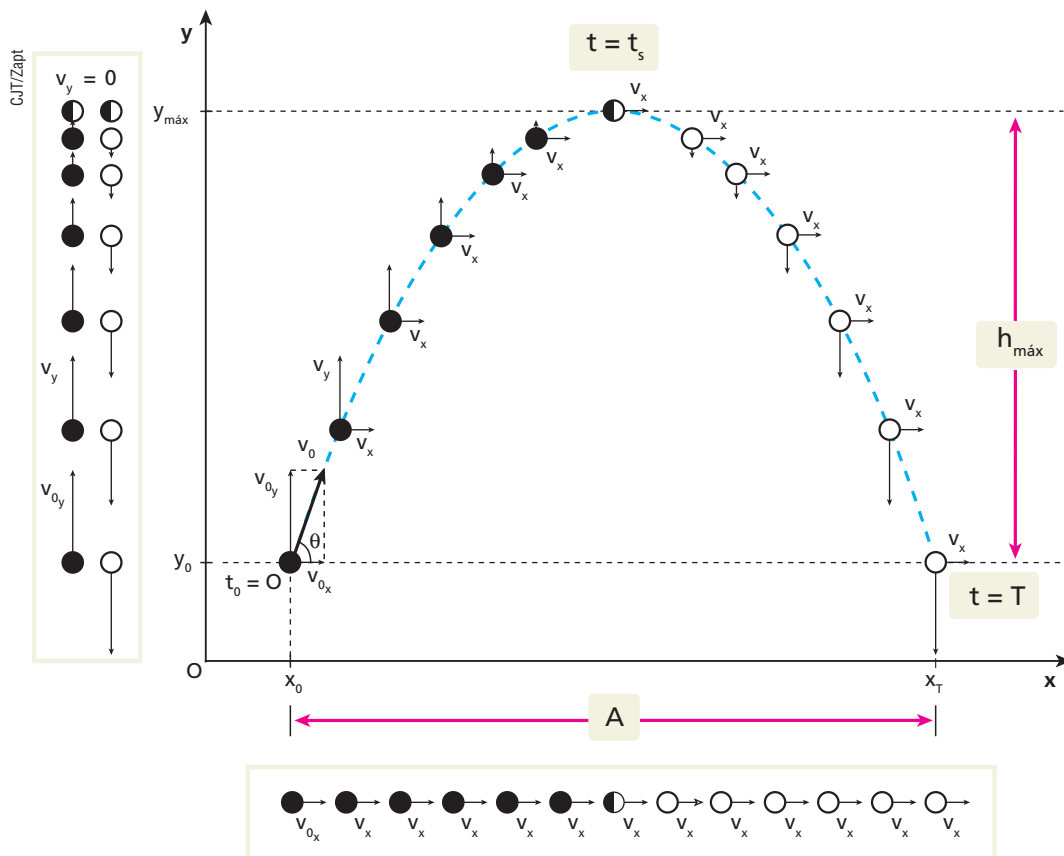
> O movimento do projétil segundo o eixo vertical Oy é **retilíneo e uniformemente variado**, com aceleração escalar de módulo igual ao módulo da aceleração da gravidade:
>
> $$|\alpha_y| = g$$

Já, a aceleração escalar segundo Ox é constante e igual a zero:

$$\alpha_x = 0 \text{ (constante)}$$

Então:

> O movimento do projétil segundo o eixo horizontal Ox é **retilíneo e uniforme**.

As características dos movimentos segundo os eixos estão evidenciadas na figura a seguir, em que o intervalo de tempo entre posições consecutivas é sempre o mesmo.

É importante notar, nessa figura, que o movimento segundo Oy equivale a um lançamento vertical para cima com velocidade inicial v_{0_y} e aceleração escalar $\alpha_y = -g$, uma vez que o eixo Oy está orientado para cima.

Observe, ainda, que:

$$v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\theta \quad \text{e} \quad v_{0_y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta$$

Analisando a figura anterior, vamos equacionar os movimentos segundo os eixos Ox e Oy.

Lembrando que o movimento é uniforme segundo Ox, podemos escrever:

$$s = s_0 + v\,t$$

em que: $s = x$; $s_0 = x_0$; $v = v_x$.

Assim, obtemos:

$$x = x_0 + v_x\,t$$

(Função horária do espaço segundo Ox.)

em que: $v_x = v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\theta$.

No eixo Oy, por sua vez, o movimento é uniformemente variado, o que nos permite escrever:

$$s = s_0 + v_0\,t + \frac{\alpha}{2}\,t^2$$

$$v = v_0 + \alpha\,t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha\,\Delta s$$

em que: $s = y$; $s_0 = y_0$; $v_0 = v_{0_y}$; $v = v_y$; $\alpha = \alpha_y = -g$.

Assim, obtemos:

$$y = y_0 + v_{0_y}\,t - \frac{g}{2}\,t^2$$

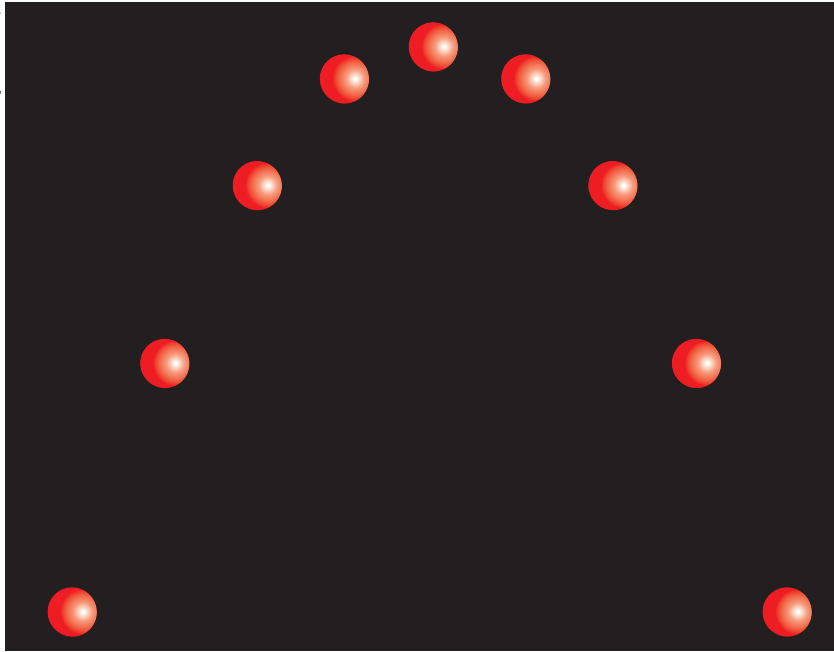
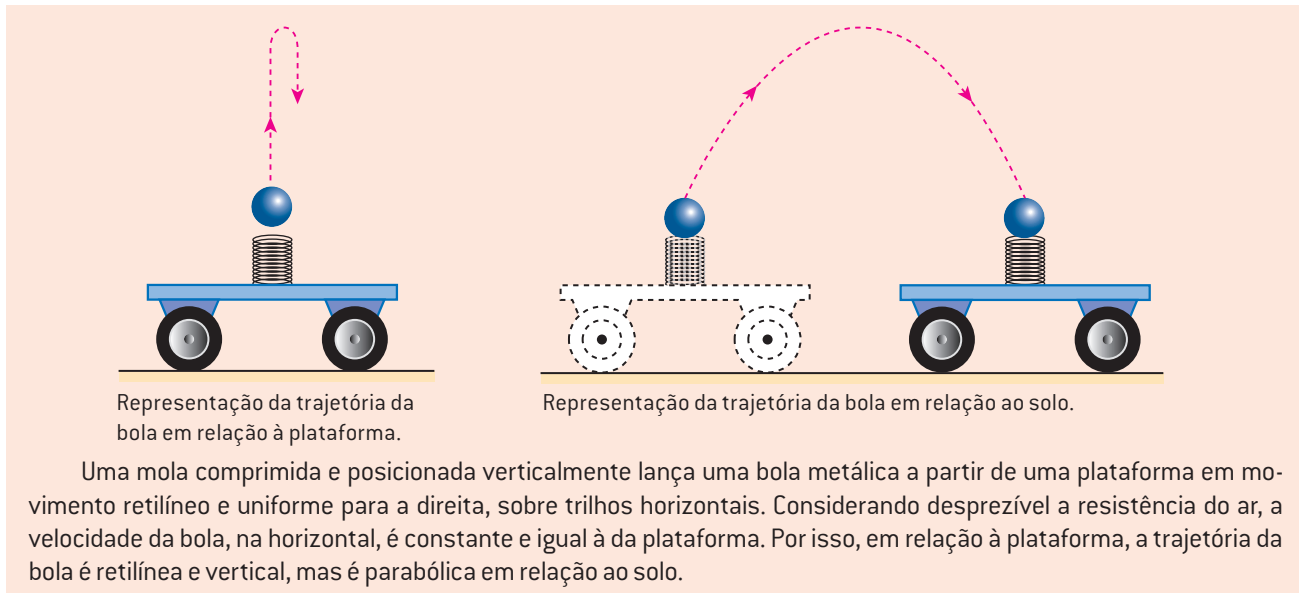
(Função horária do espaço segundo Oy.)

$$v_y = v_{0_y} - g\,t$$

(Função horária da velocidade escalar segundo Oy.)

$$v_y^2 = v_{0_y}^2 - 2g\,\Delta y$$

(Equação de Torricelli segundo Oy.)

em que: $v_{0_y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta$.

Movimento de uma bolinha lançada obliquamente. O tempo decorrido entre posições consecutivas é sempre o mesmo. Você pode verificar que o movimento, na horizontal, é uniforme. Na vertical, porém, o movimento é uniformemente variado: retardado na subida e acelerado na descida.

Representação da trajetória da bola em relação à plataforma.

Representação da trajetória da bola em relação ao solo.

Uma mola comprimida e posicionada verticalmente lança uma bola metálica a partir de uma plataforma em movimento retilíneo e uniforme para a direita, sobre trilhos horizontais. Considerando desprezível a resistência do ar, a velocidade da bola, na horizontal, é constante e igual à da plataforma. Por isso, em relação à plataforma, a trajetória da bola é retilínea e vertical, mas é parabólica em relação ao solo.

Cálculo dos tempos de subida (t_s), de descida (t_d) e total (T)

Retomando a figura da página anterior, vamos calcular agora o intervalo de tempo decorrido desde o instante de lançamento até o instante em que o projétil atinge a altura máxima (tempo de subida: t_s).

Para isso, lembre-se de que no ponto mais alto v_y vale zero. Assim, usando a função horária da velocidade escalar segundo Oy, temos:

$$v_y = v_{0_y} - g\,t$$

Quando $t = t_s$, temos que $v_y = 0$:

$$0 = v_{0_y} - g\,t_s$$

$$t_s = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\ \theta}{g}$$

O intervalo de tempo decorrido desde o instante em que o projétil atinge o ponto de altura máxima até o instante em que retorna ao mesmo nível horizontal do lançamento (tempo de descida: t_d) é igual ao tempo de subida:

$$t_d = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\ \theta}{g}$$

Chamamos de **tempo total** (**T**) o intervalo de tempo decorrido entre o instante de lançamento e o instante de retorno ao nível horizontal de lançamento:

$$T = t_s + t_d \Rightarrow T = \frac{2v_0 \cdot \text{sen } \theta}{g}$$

Nota:

- Podemos considerar o lançamento vertical como um caso particular de lançamento oblíquo, com $\theta = 90°$ (sen $90° = 1$). Com isso, obtemos os seguintes resultados, já verificados no exercício 9 da página 271.

$$t_s = \frac{v_0}{g} \qquad t_d = \frac{v_0}{g} \qquad T = \frac{2v_0}{g}$$

Cálculo da altura máxima ($h_{máx}$)

Ainda com relação à figura da página 274, temos que a **altura máxima** (**$h_{máx}$**) em relação ao plano horizontal de lançamento pode ser determinada lembrando que $h_{máx}$ é o valor de Δy, quando v_y se anula.

Usando a equação de Torricelli segundo Oy, obtemos:

$$v_y^2 = v_{0_y}^2 - 2g\,\Delta y$$

$$0^2 = v_{0_y}^2 - 2g\,h_{máx}$$

$$h_{máx} = \frac{v_{0_y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g}$$

Nota:

- No lançamento vertical, temos $\theta = 90°$ e sen $90° = 1$. Assim, obtemos a seguinte expressão, já verificada no exercício 9:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Cálculo do alcance horizontal (A)

Chamamos de **alcance horizontal** ou simplesmente **alcance** a grandeza **A** (ver figura na página 274) correspondente ao deslocamento horizontal do projétil, desde o instante da partida até o instante em que retorna ao nível horizontal do lançamento.

É fácil perceber que **A** é o valor de Δx no instante correspondente ao tempo total (**T**).

Por meio da função horária do espaço segundo Ox, obtemos:

$$x = x_0 + v_x t \text{ ou } \Delta x = v_x t$$

Fazendo $t = T = \frac{2v_0 \cdot \text{sen } \theta}{g}$, temos $\Delta x = A$:

$$A = v_x \frac{2v_0 \cdot \text{sen } \theta}{g} = v_0 \cdot \cos\theta \frac{2v_0 \cdot \text{sen } \theta}{g}$$

$$A = \frac{v_0^2}{g}\, 2\text{sen } \theta \cdot \cos\theta$$

Da trigonometria, sabe-se que $2\text{sen } \theta \cdot \cos\theta = \text{sen } 2\theta$. Então, a expressão anterior pode ser escrita da seguinte maneira:

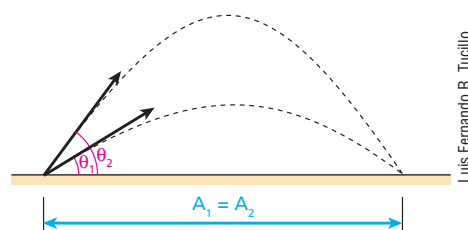
$$A = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen } 2\theta$$

Condição de mesmo alcance horizontal

Considere dois lançamentos com velocidades iniciais iguais em módulo (mesmo v_0), realizados num mesmo local (mesmo **g**). Sejam θ_1 e θ_2 os ângulos de lançamento correspondentes.

Determinemos a relação entre θ_1 e θ_2, para que os alcances horizontais A_1 e A_2 sejam iguais:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\text{sen } \theta_1 \cdot \cos\theta_1 = \frac{v_0^2}{g} \cdot$$

$$\cdot\, 2\,\text{sen } \theta_2 \cdot \cos\theta_2 \Rightarrow \text{sen } \theta_1 \cdot \cos\theta_1 = \text{sen } \theta_2 \cdot \cos\theta_2$$

Como θ_1 e θ_2 são ângulos agudos, essa última igualdade só é válida quando $\theta_1 + \theta_2 = 90°$, pois aí sen $\theta_2 = \cos\theta_1$ e $\cos\theta_2 = \text{sen } \theta_1$.

Então, podemos escrever que:

> Para valores fixados de v_0 e de **g**, objetos lançados com ângulos de lançamento **complementares** têm alcances horizontais iguais.

Condição de máximo alcance horizontal

Suponhamos que um projétil deva ser lançado de modo a se obter o maior alcance horizontal (**A**) possível, com v_0 e **g** fixados. Qual deve ser o ângulo de lançamento?

Temos que:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen } 2\theta$$

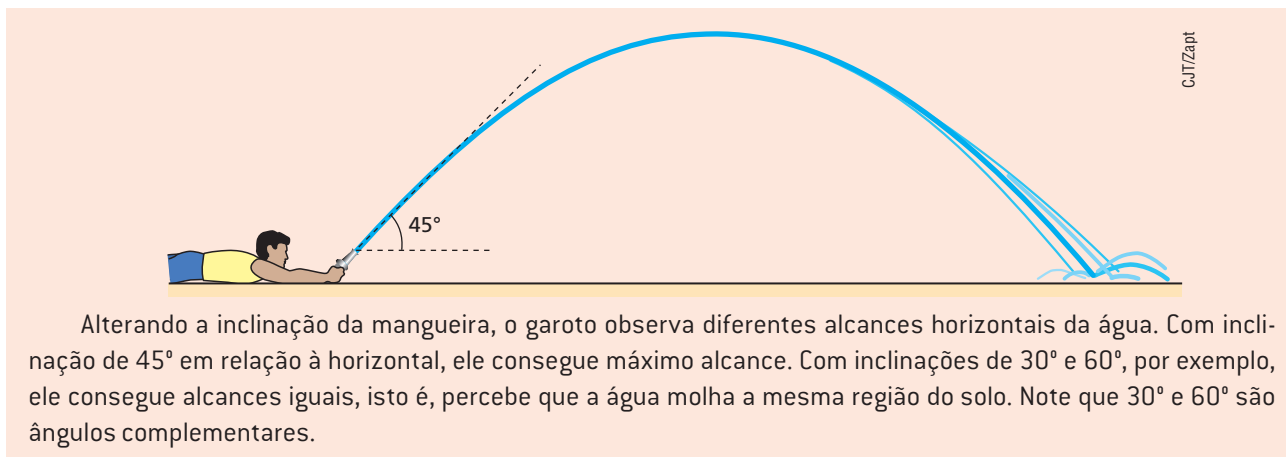
Para o alcance **A** ser máximo, é necessário que sen 2θ seja máximo, isto é, igual a 1. Assim:

$$\text{sen } 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$$

Então, podemos escrever que:

Para valores determinados da velocidade inicial e da aceleração da gravidade, o máximo alcance horizontal é obtido com ângulo de lançamento igual a 45°.

Alterando a inclinação da mangueira, o garoto observa diferentes alcances horizontais da água. Com inclinação de 45° em relação à horizontal, ele consegue máximo alcance. Com inclinações de 30° e 60°, por exemplo, ele consegue alcances iguais, isto é, percebe que a água molha a mesma região do solo. Note que 30° e 60° são ângulos complementares.

Thinkstock/ Getty Images

Na fotografia, vemos um canhão de um antigo forte, posicionado bem acima do nível do mar e destinado a abater embarcações de invasores, lançando balas de ferro contra elas. Numa situação como essa, em que o nível horizontal de lançamento **não é** o mesmo nível horizontal em que se encontra o alvo, convém definir o alcance horizontal de modo diferente do que fizemos na teoria. O que importa agora é a distância que a bala pode percorrer, medida na horizontal, desde o ponto de lançamento até chegar ao mar. O ângulo de lançamento para que essa distância seja máxima **não é** mais igual a 45°, mesmo desprezando influências do ar. (Caso queira saber como se determina esse ângulo, veja o exercício 93 deste Tópico.)

Equação da trajetória

Agora, vamos demonstrar que a trajetória descrita pelo projétil lançado obliquamente em campo gravitacional uniforme, sem influência do ar, é realmente parabólica.

Sabemos que:

$$x = x_0 + v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t - \frac{g}{2}\,t^2$$

Para simplificar, suponha que o lançamento se dê da origem do sistema Oxy, ou seja, considere $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

Assim, temos:

$$x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \qquad \text{(I)}$$

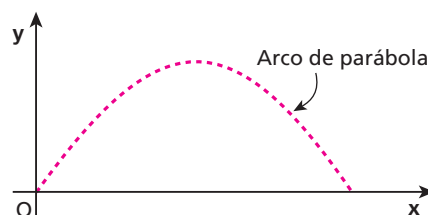
$$y = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot t - \frac{g}{2}\,t^2 \qquad \text{(II)}$$

De (I), vem: $t = \dfrac{x}{v_0 \cdot \cos\theta}$ (III)

Substituindo (III) em (II), obtemos:

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\theta}$$

$$y = \text{tg}\,\theta \cdot x - \frac{g}{2\,v_0^2 \cdot \cos^2\theta}\,x^2$$

Essa expressão é a equação da trajetória do projétil. Observe que ela é do 2º grau em **x** e que o coeficiente do seu termo de 2º grau é negativo. Isso significa que a trajetória sempre é um **arco de parábola**, com sua concavidade voltada para baixo.

Uma propriedade da cicloide

Diversas curvas estudadas na Matemática são, visualmente, muito parecidas. Um arco de parábola, um arco de hipérbole, um arco de catenária e um arco de ciclóide, por exemplo, podem nos dar a sensação visual de que são a mesma coisa. Entretanto, isso não é verdade.

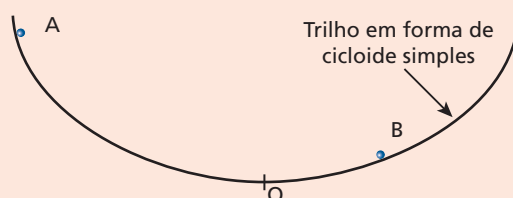
Cada curva é descrita por uma equação diferente e possui propriedades diferentes.

A **cicloide** já apareceu no Tópico 1 da Parte I deste livro, num dos exemplos para ilustrar que a trajetória de um ponto depende do referencial escolhido para analisar o movimento.

Vamos ver agora uma interessantíssima propriedade dessa curva.

Se um trilho for construído em forma de cicloide, como na figura ao lado, e nele abandonarmos bolas — de aço, por exemplo — de duas posições **quaisquer**, elas demorarão o mesmo tempo para chegar ao ponto mais baixo (**O**):

Se, num mesmo instante, duas bolas forem soltas das posições **A** e **B**, elas chegarão juntas ao ponto **O**. Por isso, dizemos que a cicloide é **tautócrona** (do grego *tautó*: o mesmo, e *khrónos*: tempo).

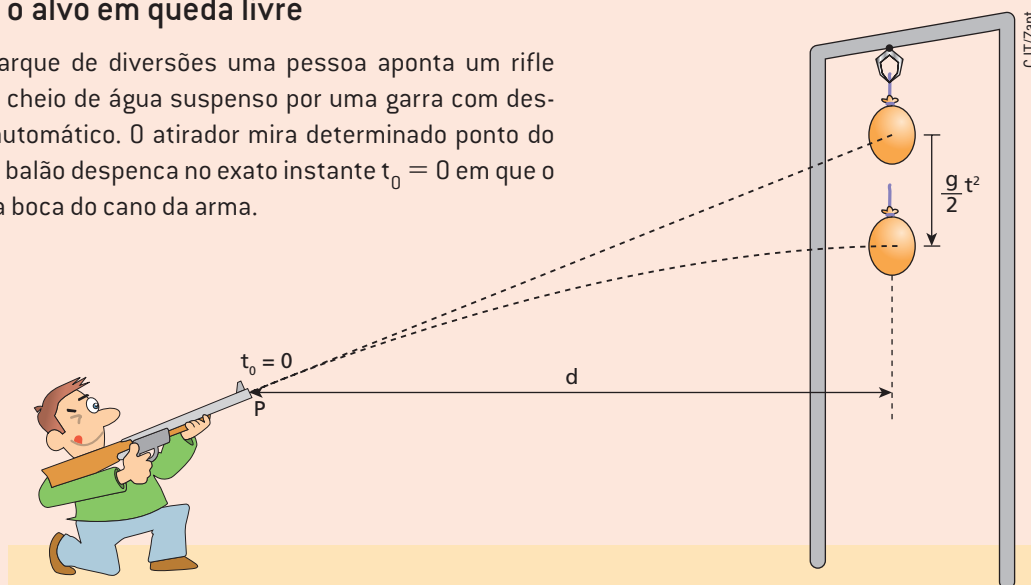
As fotografias a seguir mostram uma rampa em forma de cicloide montada no Instituto de Matemática e Estatística da USP. Nela, a propriedade citada pode ser comprovada experimentalmente.

Fotografias: Nelson Toledo

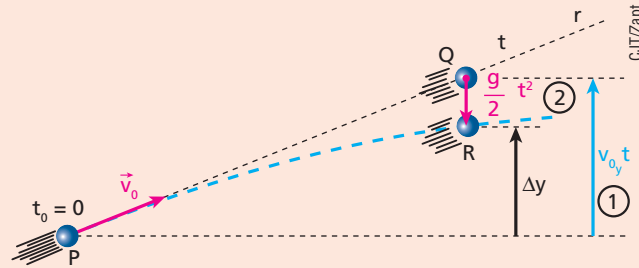
Acervo Matemateca do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

Leitura

O atirador e o alvo em queda livre

Em um parque de diversões uma pessoa aponta um rifle para um balão cheio de água suspenso por uma garra com desprendimento automático. O atirador mira determinado ponto do balão e atira. O balão despenca no exato instante $t_0 = 0$ em que o projétil sai pela boca do cano da arma.

CJT/Zapt

Desde que a resistência do ar seja desprezível e que o alcance horizontal do projétil seja maior que a distância **d** indicada na figura, o balão **sempre** será atingido no ponto mirado, pois tanto ele quanto o projétil cairão $\frac{g}{2}t^2$, de $t_0 = 0$ até o instante **t**, em que **t** é o instante do impacto do projétil no balão.

Agora analisaremos por que isso aconteceu.

O projétil foi lançado obliquamente do ponto **P**, indicado na figura, no instante $t_0 = 0$. Seu deslocamento, na vertical, em relação a um eixo Oy orientado para cima, é dado por:

$$\Delta y = \underbrace{v_{0_y} t}_{1} - \underbrace{\frac{g}{2} t^2}_{2}$$

A parcela (1) significa quanto o projétil subiria, desde o instante $t_0 = 0$ até o instante **t**, se não houvesse gravidade. Dentro dessa hipótese, ele seguiria a reta **r** e, no instante **t**, estaria no ponto **Q**.

A parcela (2), por sua vez, significa quanto o projétil deixou de subir em virtude da existência da gravidade.

Então, tudo se passa como se, do instante $t_0 = 0$ até o instante **t**, o projétil seguisse a reta **r** até o ponto **Q** e, em seguida, caísse instantaneamente $\frac{g}{2}t^2$, chegando ao ponto **R**.

Lançamento horizontal e queda livre

Para um corpo lançado horizontalmente com velocidade $\vec{v}_0$, desprezadas as influências do ar, temos, em módulo:

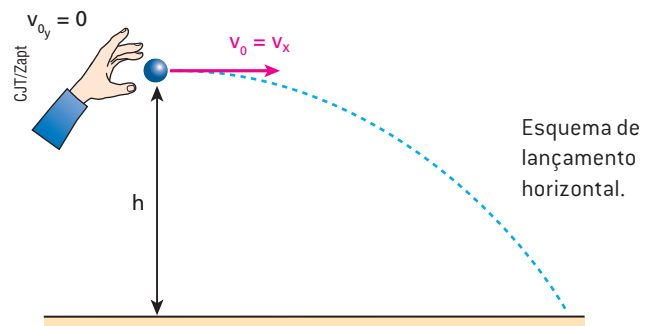
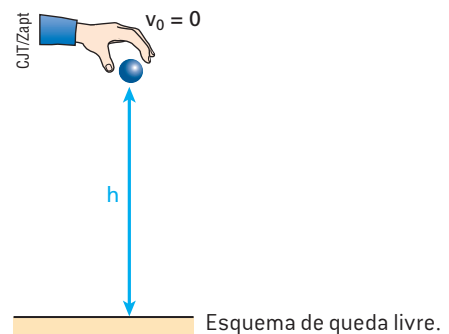
$$v_x = v_0$$
$$v_{0_y} = 0 \quad \text{e}$$
$$\alpha_y = g$$

Para um corpo em queda livre a partir do repouso, temos, em módulo:

$$v_0 = 0 \quad \text{e}$$
$$\alpha = g$$

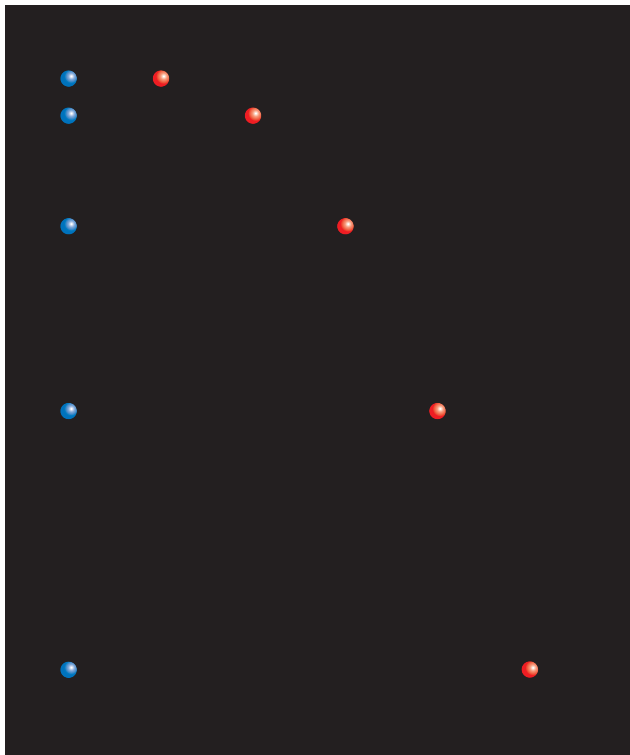
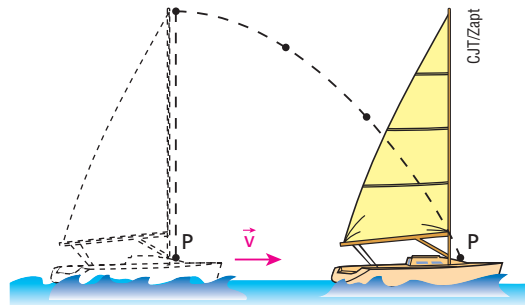
Portanto, **na vertical**, os dois movimentos citados têm as mesmas características. Por isso, os tempos de queda de um corpo lançado horizontalmente e de um corpo abandonado em queda livre, da mesma altura **h**, são iguais, **independentemente da velocidade inicial horizontal** do primeiro.

Esquema de queda livre.

Esquema de lançamento horizontal.

Tanto para o lançamento horizontal como para a queda livre, temos, em relação a um eixo vertical Oy orientado para baixo:

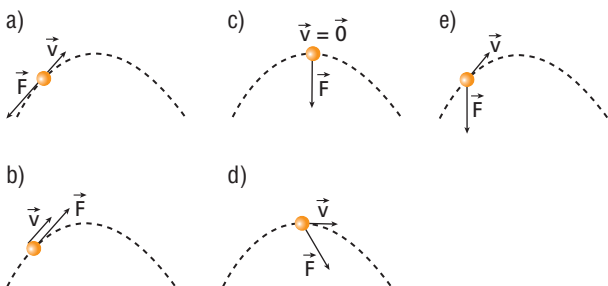
$$\Delta y = \frac{g}{2}\,t^2$$

O tempo de queda t_q corresponde ao instante em que Δy é igual a **h**:

$$h = \frac{g}{2}\,t_q^2 \Rightarrow \boxed{t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

Duas bolas, uma abandonada em queda livre e a outra lançada horizontalmente. Em ambas as situações, o tempo decorrido entre posições consecutivas é sempre o mesmo. Note que na vertical os movimentos são idênticos.

Uma bola de chumbo se desprende do topo do mastro de um barco em movimento retilíneo e uniforme, com velocidade $\vec{v}$. Sendo desprezível a resistência do ar, a velocidade da bola na horizontal é constante e igual a $\vec{v}$. Por isso, ela cai no barco, atingindo-o no ponto **P**. Em relação ao solo, a trajetória da bola é um arco de parábola, mas, em relação ao barco, é um segmento de reta vertical.

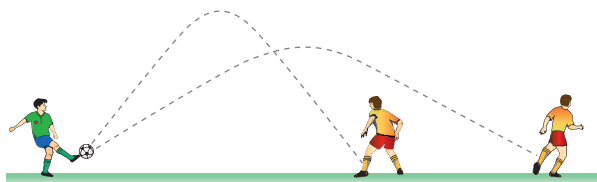
Não fosse a influência do ar em seus movimentos, sucessivas bombas abandonadas de um avião voando horizontalmente em movimento retilíneo e uniforme encontrar-se-iam em uma mesma vertical, abaixo do avião, porque suas velocidades na horizontal seriam iguais à do avião. Considerando-as pontos materiais, suas trajetórias em relação ao avião seriam segmentos de reta verticais e, em relação ao solo, seriam arcos de parábola.

Exercícios — nível 1

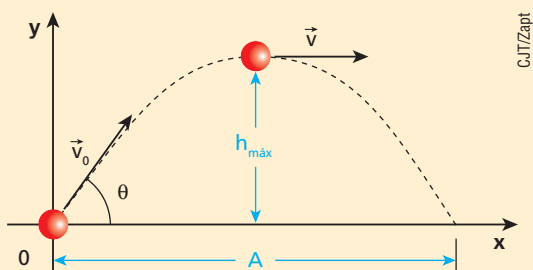
30. Uma laranja foi lançada obliquamente nas proximidades do solo, movendo-se da esquerda para a direita. Desprezando influências do ar, indique a alternativa em que estão corretamente representadas a velocidade da laranja ($\vec{v}$) e a força resultante ($\vec{F}$) que nela atua na posição assinalada, após o lançamento:

a)
c)
e)
b)
d)
31. Uma esfera de chumbo é lançada obliquamente com velocidade $\vec{v}_0$, inclinada de **θ** em relação à horizontal. Desprezando a influência do ar e considerando o movimento da esfera, após o lançamento e antes de colidir com o solo, analise as seguintes afirmações:

(01) A única força atuante na esfera é o seu peso.
(02) Na horizontal, o movimento é uniforme, com velocidade de módulo $v_0 \cdot \cos\theta$.
(04) Na vertical, o movimento é uniformemente variado, com velocidade inicial e aceleração de módulos respectivamente iguais a $v_0 \cdot \text{sen}\,\theta$ e **g** (aceleração da gravidade).
(08) No ponto de altura máxima, a velocidade da esfera é nula.
(16) A trajetória da esfera é um arco de circunferência.
(32) No ponto de altura máxima, a velocidade da esfera tem módulo mínimo, igual a $v_0 \cdot \cos\theta$.
(64) No ponto de altura máxima, a aceleração da esfera é nula.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

32. Após um ataque frustrado do time adversário, o goleiro se prepara para lançar a bola e armar um contra-ataque. Para dificultar a recuperação da defesa adversária, a bola deve chegar aos pés de um atacante no menor tempo possível. O goleiro vai chutar a bola, imprimindo sempre a mesma velocidade, e deve controlar apenas o ângulo de lançamento. A figura mostra as duas trajetórias possíveis da bola em certo momento da partida.

Assinale a alternativa que expressa se é possível ou não determinar qual desses dois jogadores receberia a bola no menor tempo. Despreze o efeito da resistência do ar.

(a) Sim, é possível, e o jogador mais próximo receberia a bola no menor tempo.
(b) Sim, é possível, e o jogador mais distante receberia a bola no menor tempo.
(c) Os dois jogadores receberiam a bola em tempos iguais.
(d) Não, pois é necessário conhecer os valores da velocidade inicial e dos ângulos de lançamento.
(e) Não, pois é necessário conhecer o valor da velocidade inicial.

33. E.R. Um corpo é lançado obliquamente com velocidade $\vec{v}_0$ de módulo 50 m/s, sob um ângulo de lançamento **θ** (sen θ = 0,6; cos θ = 0,8), conforme indica a figura:

Calcule, considerando g = 10 m/s^2 e desprezando a influência do ar:

a) a intensidade da velocidade $\vec{v}$ do corpo ao passar pelo vértice do arco de parábola;
b) o tempo de subida;
c) a altura máxima ($h_{máx}$);
d) o alcance horizontal (**A**).

Resolução:

a) A velocidade no ponto mais alto da trajetória é igual à componente horizontal da velocidade inicial:

$$v = v_{0_x}$$

$$v = v_0 \cdot \cos\theta = 50 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \boxed{v = 40 \text{ m/s}}$$

b) O tempo de subida é dado por:

$$t_s = \frac{v_0 \cdot \text{sen}\,\theta}{g} = \frac{50 \cdot 0{,}6}{10} \Rightarrow \boxed{t_s = 3 \text{ s}}$$

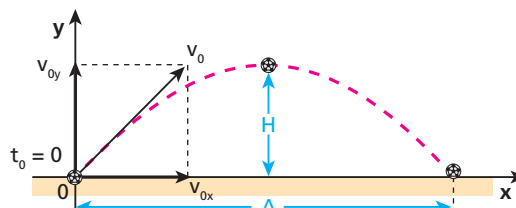
c) A altura máxima é dada por:

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g} = \frac{50^2 \cdot 0{,}6^2}{20} \Rightarrow \boxed{h_{máx} = 45 \text{ m}}$$

d) O alcance horizontal é calculado pela expressão:

$$A = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta$$

$$A = \frac{50^2}{10} \cdot 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \boxed{A = 240 \text{ m}}$$

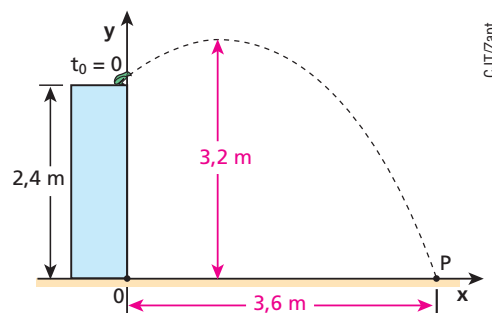
34. Num campo de futebol, uma bola foi chutada no instante t_0 = 0, adquirindo uma velocidade inicial v_0. As componentes dessa velocidade na horizontal e na vertical valem v_{0_x} = 24 m/s e v_{0_y} = 18 m/s respectivamente.

Desprezando a resistência do ar e considerando g = 10 m/s^2, calcule:

a) a velocidade da bola no ponto mais alto de sua trajetória;
b) o instante t_s em que a bola passa pelo ponto mais alto de sua trajetória;
c) a altura máxima **H**;
d) o alcance horizontal **A**.

35. Um canhão dispara projéteis com velocidade de módulo 300 m/s, estando situado em amplo terreno plano e horizontal. Sendo g = 10 m/s^2 e desprezando influências do ar no movimento dos projéteis, determine a região desse terreno onde, certamente, eles não cairão.

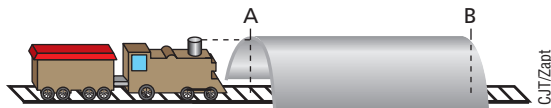
36. Da superfície da Terra, dá-se um tiro de canhão com ângulo de tiro θ_0 (ascendente) e velocidade v_0 (na boca do canhão). Despreze os efeitos do ar. É **incorreto** afirmar que:

a) a velocidade do projétil varia de ponto a ponto da trajetória, mas tem componente horizontal invariável.
b) na Lua, com o mesmo θ_0 e a mesma v_0, o alcance horizontal seria maior.
c) aumentando-se θ_0 (de 0 a 90°), a flecha da trajetória (altura máxima) aumenta.
d) entre a boca do canhão e o vértice da trajetória, qualquer plano horizontal é atravessado duas vezes com velocidades de módulos iguais.
e) o alcance horizontal depende da massa do projétil.

37. Um sapo, colocado em cima de um muro, salta no instante t_0 = 0 e chega ao ponto **P** do solo, como representa a figura.

Desprezando a influência do ar e considerando **g** igual a 10 m/s^2, calcule:

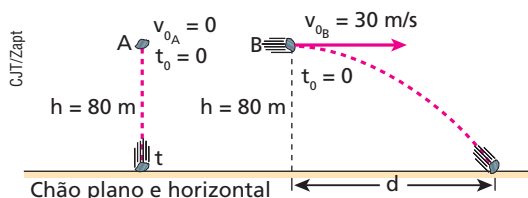
a) o módulo da componente vertical da velocidade inicial do sapo;
b) o instante **t** em que ele atinge o solo;
c) o módulo da componente horizontal da velocidade do sapo.

38. (Puccamp-SP) Um projétil é lançado segundo um ângulo de 30° com a horizontal, com uma velocidade de 200 m/s. Supondo a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e desprezando a resistência do ar, calcule o intervalo de tempo entre as passagens do projétil pelos pontos de altura 480 m acima do ponto de lançamento. (**Dados:** sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,87.)

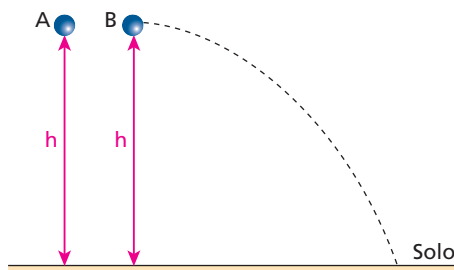
39. Um trem de brinquedo, movendo-se com velocidade constante sobre trilhos retilíneos e horizontais, vai passar pelo túnel **AB**.

Uma mola comprimida e disposta verticalmente lança para cima uma bola de aço, que sai pela chaminé do trem quando esta está prestes a entrar no túnel. Sabendo que a influência do ar nesse experimento é desprezível e que o alcance horizontal da bola é ligeiramente maior que o comprimento $\overline{AB}$ do túnel (a bola não colide com o túnel), analise as seguintes afirmações:

01. A trajetória da bola em relação aos trilhos é parabólica.
02. A trajetória da bola em relação ao trem é retilínea e vertical.
04. A velocidade vetorial inicial da bola, em relação aos trilhos, é vertical.
08. No ponto de altura máxima, a velocidade da bola é nula em relação aos trilhos.
16. No ponto de altura máxima, a velocidade da bola é nula em relação ao trem, mas, em relação aos trilhos, é igual à do trem.
32. Quando o trem está saindo do túnel, a bola cai em sua chaminé.
64. O valor aproximado do comprimento $\overline{AB}$ do túnel pode ser calculado multiplicando-se a velocidade **v** do trem pelo tempo **T** durante o qual a bola esteve em movimento livre.

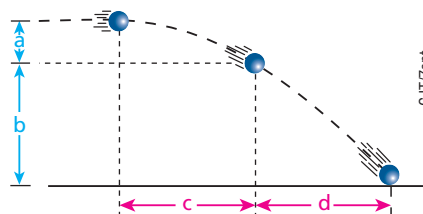
Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

40. No instante $t_0 = 0$, uma pedra **A**, de massa **M**, foi abandonada a partir do repouso, de uma altura h = 80 m. Nesse mesmo instante, uma pedra **B**, de massa **2M**, foi lançada horizontalmente com velocidade $v_{0_B} = 30$ m/s, a partir da mesma altura h = 80 m.

Desprezando influências do ar e considerando g = 10 m/s^2:

a) calcule o instante **t** em que a pedra **A** chega ao chão;
b) calcule a distância **d** percorrida pela pedra **B**, na horizontal, até chegar ao chão;
c) calcule o módulo da velocidade da pedra **A** imediatamente antes de tocar o chão;
d) determine os módulos das componentes horizontal (v_x) e vertical (v_y) da velocidade da pedra **B** imediatamente antes de ela tocar o chão.

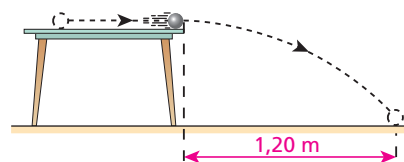
41. De uma mesma altura **h** e no mesmo instante $t_0 = 0$, uma bola **A** é abandonada a partir do repouso e outra bola, **B**, é lançada horizontalmente.

As bolas **A** e **B** atingem o solo nos instantes t_A e t_B, com velocidades de módulos v_A e v_B respectivamente. Desprezando influências do ar, é correto afirmar que:

a) $t_A = t_B$ e $v_A = v_B$.
b) $t_B > t_A$ e $v_B > v_A$.
c) $t_B > t_A$ e $v_B = v_A$.
d) $t_A = t_B$ e $v_B > v_A$.
e) $t_A = t_B$ e $v_B < v_A$.

42. A figura representa a fotografia estroboscópica de uma bola lançada horizontalmente nas proximidades da Terra:

Sendo a = 1 m e c = 4 m, calcule **b** e **d**.

43. Um avião que voa em linha reta, paralelamente ao solo, suposto plano e horizontal, tem velocidade constante de módulo 80 m/s. Em determinado instante, uma escotilha é aberta e larga-se uma bomba, que desce ao solo. Despreze a resistência do ar. Considerando g = 10 m/s^2 e assumindo para a altura do avião o valor $2{,}0 \cdot 10^3$ m, determine:

a) a distância percorrida pela bomba, na horizontal, desde o instante em que foi solta até o instante em que chegou ao solo;
b) a distância entre o avião e a bomba no instante em que esta toca o solo;
c) as formas das trajetórias da bomba em relação ao avião e em relação ao solo.

44. Uma pequena esfera de chumbo rola sobre uma mesa de 80 cm de altura, caindo dela como indica a figura. Admita que o módulo da aceleração da gravidade no local seja de 10 m/s^2 e despreze a resistência do ar.

Calcule a velocidade da esfera:

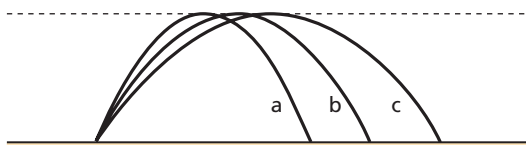
a) ao abandonar a mesa;
b) ao se chocar com o chão.

Exercícios

nível 2

45. Um projétil é lançado obliquamente na condição de máximo alcance horizontal. Compare esse alcance com a máxima altura atingida em relação ao nível do ponto de lançamento. Despreze a influência do ar.

46. (UFPE) Dois bocais de mangueiras de jardim, **A** e **B**, estão fixos ao solo. O bocal **A** é perpendicular ao solo e o outro está inclinado de 60° em relação à direção de **A**. Correntes de água jorram dos dois bocais com velocidades de módulos idênticos. Qual a razão entre as alturas máximas de elevação da água?

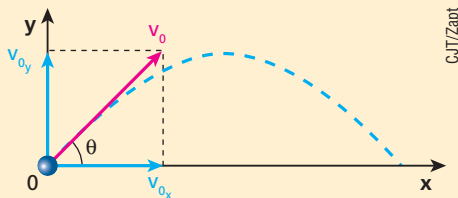
47. (UFV-MG) A figura abaixo mostra três trajetórias de uma bola de futebol que é chutada de um mesmo ponto.

Sejam "t" o tempo de permanência da bola no ar, "V_v" a componente vertical da velocidade inicial da bola e "V_h" a componente horizontal da velocidade inicial. Em relação a essas três grandezas físicas e considerando as três trajetórias **a**, **b** e **c** anteriores, livres da resistência do ar, pode-se concluir que:

a) $t_a < t_b < t_c$, $V_{va} = V_{vb} = V_{vc}$, $V_{ha} = V_{hb} = V_{hc}$.
b) $t_a = t_b = t_c$, $V_{va} < V_{vb} < V_{vc}$, $V_{ha} < V_{hb} = V_{hc}$.
c) $t_a = t_b = t_c$, $V_{va} = V_{vb} = V_{vc}$, $V_{ha} < V_{hb} < V_{hc}$.
d) $t_a = t_b = t_c$, $V_{va} = V_{vb} = V_{vc}$, $V_{ha} > V_{hb} > V_{hc}$.
e) $t_a < t_b < t_c$, $V_{va} < V_{vb} < V_{vc}$, $V_{ha} = V_{hb} > V_{hc}$.

48. E.R. No instante $t_0 = 0$, um projétil é atirado para cima com ângulo de 45° em relação à horizontal, com velocidade de módulo $80\sqrt{2}$ m/s. Desprezando a influência do ar e considerando $g = 10$ m/s², determine:

a) o(s) instante(s) em que o projétil encontra-se a 140 metros acima do plano horizontal de lançamento;
b) o módulo da velocidade do projétil no instante t = 2 s.

Resolução:

Adotemos o sistema de eixos representado na figura a seguir:

Temos:

$v_0 = 80\sqrt{2}$ m/s
$x_0 = 0$, $y_0 = 0$
$\theta = 45°$
$g = 10$ m/s²

$$v_{0_x} = v_0 \cdot \cos\theta = 80\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_{0_x} = 80 \text{ m/s}$$

$$v_{0_y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\theta = 80\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_{0_y} = 80 \text{ m/s}$$

a) No eixo **y**, podemos escrever:

$$y = y_0 + v_{0_y} t - \frac{g}{2} t^2$$
$$y = 80t - 5t^2$$

Queremos saber quando **y** vale 140 m:

$$140 = 80t - 5t^2 \Rightarrow t^2 - 16t + 28 = 0$$

Assim, obtemos:

$$\boxed{t_1 = 2 \text{ s}} \text{ (durante a subida)}$$
e
$$\boxed{t_2 = 14 \text{ s}} \text{ (durante a descida)}$$

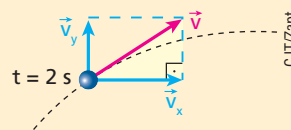
b) Em qualquer instante do movimento, a velocidade segundo o eixo **x** é igual a v_{0_x}:

$$v_x = v_{0_x} = 80 \text{ m/s}$$

Segundo o eixo **y**, a velocidade varia com o tempo, de acordo com a função:

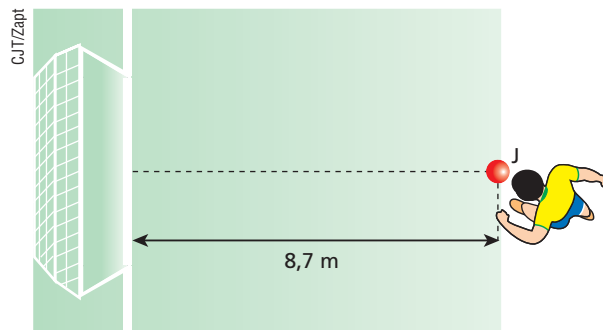
$$v_y = v_{0_y} - g\,t$$
$$v_y = 80 - 10t$$

Para t = 2 s:

$$v_y = 80 - 10 \cdot 2 \Rightarrow v_y = 60 \text{ m/s}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 80^2 + 60^2 = 10\,000$$

$$\boxed{v = 100 \text{ m/s}}$$

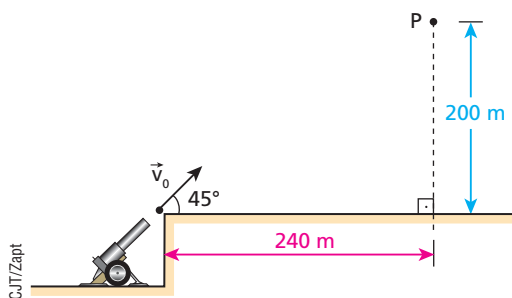
49. (Um jogador de futebol, após driblar o goleiro, encontra-se no ponto **J** indicado na figura e chuta em direção ao meio do gol, como sugere a linha tracejada, com a meta completamente desguarnecida. Use $g = 10$ m/s²; sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,87.

Sabendo que a bola, ao ser chutada, sai com velocidade de 20 m/s, formando 30° com o gramado, e que a altura da trave é de 2,44 m, diga, justificando com cálculos, se o gol aconteceu ou não. Despreze a influência do ar.

50. (Unifesp-SP) No campeonato paulista de futebol, um famoso jogador nos presenteou com um lindo gol, no qual, ao correr para receber um lançamento de um dos atacantes, o goleador fenomenal parou a bola no peito do pé e a chutou certeira ao gol. Analisando a jogada pela TV, verifica-se que a bola é chutada pelo armador da jogada a partir do chão com uma velocidade inicial de 20,0 m/s, fazendo um ângulo com a horizontal de 45° para cima.

Dados: $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e $\sqrt{2} = 1,4$

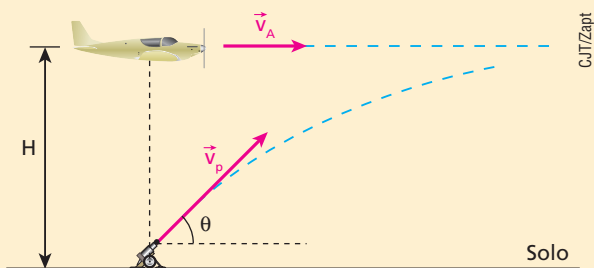
a) Determine a distância horizontal percorrida pela bola entre o seu lançamento até a posição de recebimento pelo artilheiro (goleador fenomenal).

b) No instante do lançamento da bola, o artilheiro estava a 16,0 m de distância da posição em que ele estimou que a bola cairia e, ao perceber o início da jogada, corre para receber a bola. A direção do movimento do artilheiro é perpendicular à trajetória da bola, como mostra a figura. Qual é a velocidade média, em km/h, do artilheiro, para que ele alcance a bola imediatamente antes dela tocar o gramado?

51. O canhão da figura dispara um projétil com velocidade inicial de módulo igual a v_0, atingindo um alvo estacionário situado em **P**:

Desprezando a influência do ar e supondo $g = 10 \text{ m/s}^2$:

a) calcule v_0;

b) diga se, ao atingir o alvo, o projétil está em movimento ascendente ou descendente.

52. E.R. Um avião em movimento retilíneo e uniforme, com velocidade de módulo v_A, mantém-se a uma altura **H** em relação ao solo, plano e horizontal:

No solo, existe um canhão que dispara com a finalidade de atingir o avião exatamente quando ambos se situam na mesma vertical. A velocidade de lançamento do projétil tem módulo v_P e o ângulo de lançamento é **θ**. Desprezando influências do ar e as dimensões do canhão e do avião, estabeleça as condições para que o projétil atinja o alvo. Considere **g** o módulo da aceleração da gravidade no local.

Resolução:

A primeira condição que devemos impor é a igualdade entre os módulos da velocidade do avião e da componente horizontal da velocidade do projétil:

$$v_A = v_p \cdot \cos\theta$$

Isso significa que, para o projétil atingir o avião nas condições do problema, é necessário que ambos se movam com a mesma rapidez segundo a horizontal. Isso, entretanto, não basta, pois é possível que o projétil fique sempre abaixo do avião. Por isso, devemos impor também que a altura máxima do projétil (H_P) seja maior que a altura do voo (**H**) ou igual a ela:

$$H_P \geqslant H \Rightarrow \frac{v_P^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta}{2g} \geqslant H$$

Como $0 < \theta < 90°$:

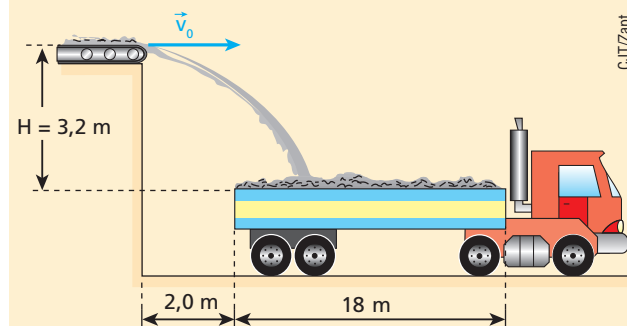
$$v_p \geqslant \frac{\sqrt{2gH}}{\text{sen}\,\theta}$$

53. (FEI-SP) Um objeto voa numa trajetória retilínea, com velocidade v = 200 m/s, numa altura H = 1 500 m em relação ao solo. Quando o objeto passa exatamente na vertical de uma peça de artilharia, essa dispara um projétil, num ângulo de 60° com a horizontal. O projétil atinge o objeto decorrido o intervalo de tempo Δt. Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$ e calcule:

a) a velocidade de lançamento do projétil;

b) o menor intervalo de tempo Δt em que o projétil atinge o objeto.

54. (Unicamp-SP) Um carro, a uma velocidade constante de 18 km/h, está percorrendo um trecho de rua retilíneo. Devido a um problema mecânico, pinga óleo do motor à razão de 6 gotas por minuto. Qual a distância entre os pingos de óleo que o carro deixa na rua?

55. E.R. Uma esteira transportadora lança minério horizontalmente com velocidade $\vec{v}_0$. Considere desprezível a influência do ar e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a) Determine o intervalo das intensidades de $\vec{v}_0$ para que o minério caia dentro da carroceria do caminhão.
b) Se o desnível **H** fosse maior, o intervalo citado no item anterior aumentaria, diminuiria ou permaneceria o mesmo?

Resolução:

a) O tempo de queda do minério é dado por:

$$t_q = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{10}} \Rightarrow t_q = 0,8 \text{ s}$$

A distância **d** percorrida pelo minério, na horizontal, durante a queda, é igual a $v_0\, t_q$:

$$d = v_0\, t_q = v_0 \cdot 0,8$$

Devemos ter:

$$2,0 \text{ m} < d < 20 \text{ m} \Rightarrow 2,0 < v_0 \cdot 0,8 < 20$$

Dividindo por 0,8 todos os termos da última expressão, obtemos:

$$\boxed{2,5 \text{ m/s} < v_0 < 25 \text{ m/s}}$$

b) Temos que:

$$2,0 < d < 20$$

em que $d = v_0\, t_q = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Então:

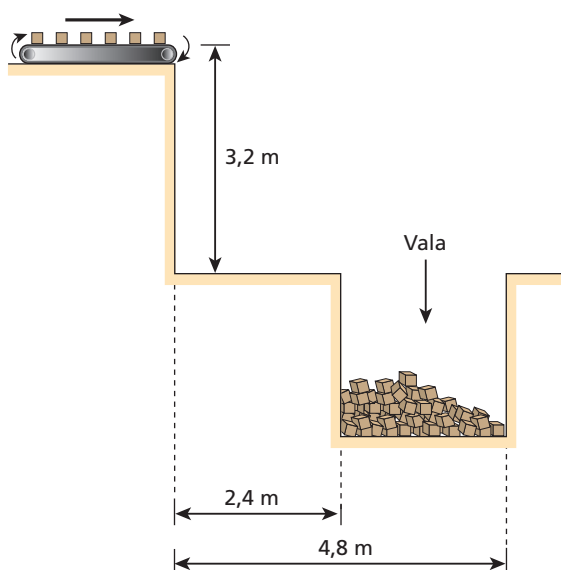
$$2,0 < v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} < 20$$

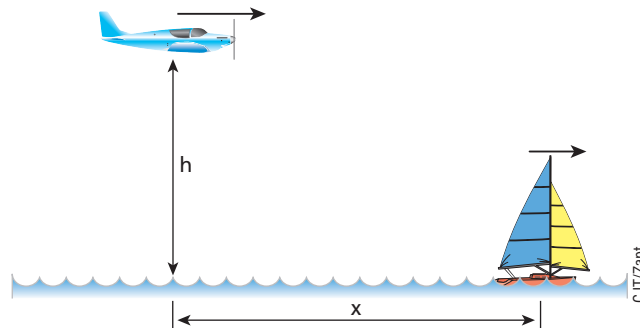
Multiplicando todos os termos por $\sqrt{\frac{g}{2H}}$, vem:

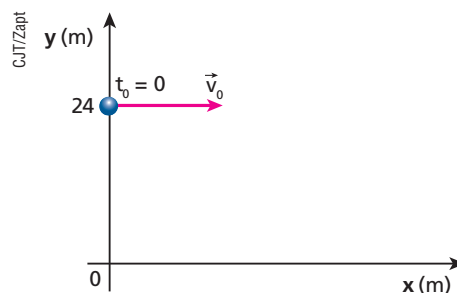
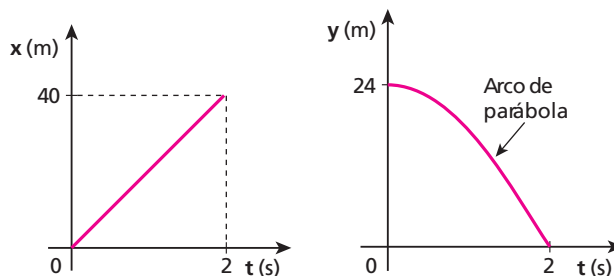
$$2,0 \sqrt{\frac{g}{2H}} < v_0 < 20 \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

Então, a "largura" do intervalo é igual a $18 \sqrt{\frac{g}{2H}}$.

Portanto, se **H** fosse maior, o intervalo **diminuiria**.

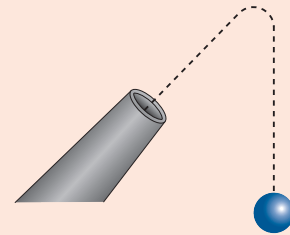
56. Na situação esquematizada, a esteira lança horizontalmente as caixas, que devem ir **diretamente** para a vala.

Considerando $g = 10$ m/s^2 e desprezando influências do ar, determine o intervalo dos valores **v** das velocidades com que as caixas devem ser lançadas.

57. (UFV-MG) Um avião de carga voa a uma altitude **h** igual a 320 m, à velocidade de 100 m/s. Ele deixa cair um pacote que deve atingir um barco se deslocando a 20 m/s na mesma direção e sentido do avião. A que distância horizontal **x**, atrás do barco, o avião deverá abandonar o pacote? Considere $g = 10$ m/s^2 e despreze influências do ar no movimento do pacote.

58. (Olimpíada Brasileira de Física) Dois rapazes brincam de tênis na praia. Um deles dá uma raquetada na bola a 2,45 m de altura e esta sai horizontalmente com velocidade de 72 km/h. Qual deve ser a velocidade mínima do outro rapaz, situado inicialmente 20,3 m à frente do primeiro, para que consiga aparar a bola antes que ela bata na areia? (Adote $g = 10$ m/s^2.)

59. De uma nave estacionária, a 24 m de altura em relação ao solo plano e horizontal de um planeta **K**, uma esfera metálica é lançada horizontalmente com velocidade $\vec{v}_0$. Sabe-se que a atmosfera do planeta praticamente não influi no movimento da esfera. As coordenadas **x** e **y** da esfera são lidas no sistema de referência representado na figura:

e variam com o tempo **t** conforme os gráficos:

a) Calcule os módulos da velocidade inicial da esfera e da aceleração da gravidade na superfície do planeta **K**.

b) Represente a trajetória da esfera no sistema de referência dado.

Descubra mais

1. Antes do século XVI, com base na filosofia aristotélica, acreditava-se que a trajetória de uma bala de canhão, lançada obliquamente, tinha o formato indicado na figura ao lado. Que argumentos eram usados para "justificar" esse formato?

Exercícios

nível 3

60. (ITA-SP) Dentro de um elevador em queda livre num campo gravitacional **g**, uma bola é jogada para baixo com velocidade **v** de uma altura **h**. Assinale o tempo previsto para a bola atingir o piso do elevador.

a) $t = \frac{v}{g}$

b) $t = \frac{h}{v}$

c) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

d) $t = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh} - v}{g}$

e) $t = \frac{\sqrt{v^2 - 2gh} - v}{g}$

61. Um bloco de chumbo cai do topo de uma torre. Considerando desprezível a influência do ar e sendo **g** a intensidade do campo gravitacional, calcule a distância percorrida pelo bloco durante o enésimo segundo de queda livre.

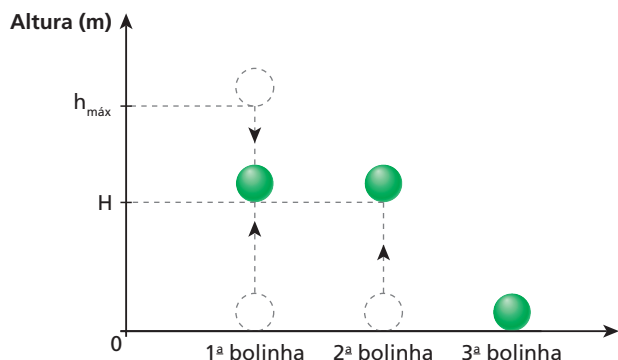
62. De um telhado caem gotas de chuva separadas por intervalos de tempo iguais entre si. No instante em que a quinta gota se desprende, a primeira toca o solo. Qual a distância que separa as duas últimas gotas consecutivas, nesse instante, se a altura do telhado é de 16 m? Não considere a resistência do ar e adote $g = 10\ m/s^2$.

63. (UFC-CE) Um chuveiro, situado a uma altura de 1,8 m do solo, indevidamente fechado, deixa cair pingos de água a uma razão constante de 4 pingos/segundo. No instante em que um dado pingo toca o solo, o número de pingos, atrás dele, que já estão a caminho é (valor da aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$):

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

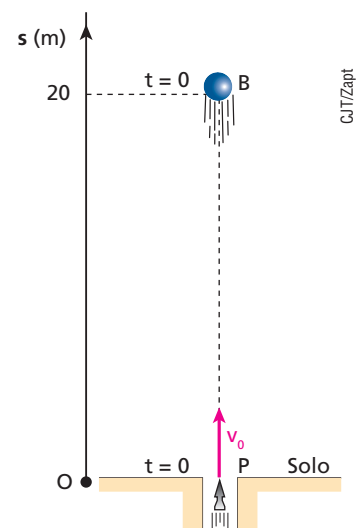
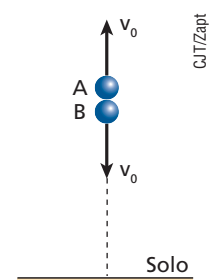
64. (FGV-SP) Uma pedra cai em um poço e o observador ouve o som da pedra no fundo após 9 s. Admitindo uma aceleração de gravidade igual a $10\ m/s^2$ e a velocidade do som de 320 m/s, qual a profundidade do poço? Despreze a resistência do ar.

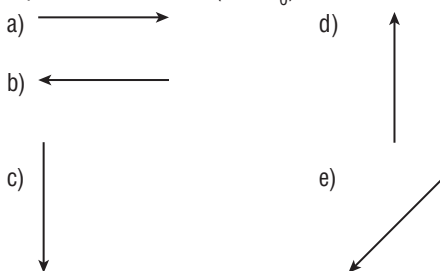
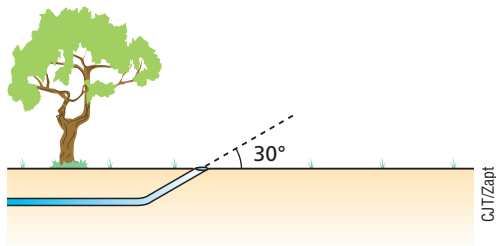
65. No instante $t_0 = 0$, uma esfera de aço (**A**) é abandonada do topo de uma torre muito alta. Após um intervalo de tempo **T**, uma outra esfera de aço (**B**) é abandonada do mesmo ponto. Sendo **g** a intensidade do campo gravitacional e supondo desprezível a influência do ar, represente graficamente a distância **d** entre as esferas em função do tempo enquanto estiverem em queda livre.

66. (Unifesp-SP) Três bolinhas idênticas são lançadas na vertical, lado a lado e em sequência, a partir do solo horizontal, com a mesma velocidade inicial, de módulo igual a 15 m/s para cima. Um segundo após o lançamento da primeira, a segunda bolinha é lançada. A terceira bolinha é lançada no instante em que a primeira, ao retornar, toca o solo.

Considerando $g = 10\ m/s^2$ e que os efeitos da resistência do ar ao movimento podem ser desprezados, determine:

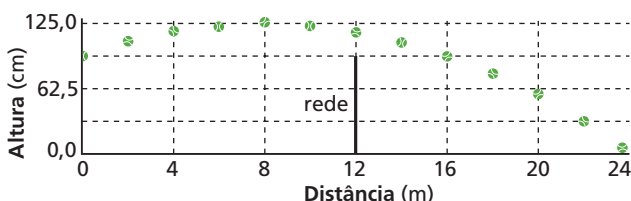
a) a altura máxima ($h_{máx}$) atingida pela primeira bolinha e o instante de lançamento da terceira bolinha.

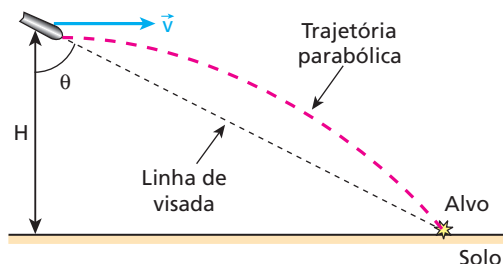
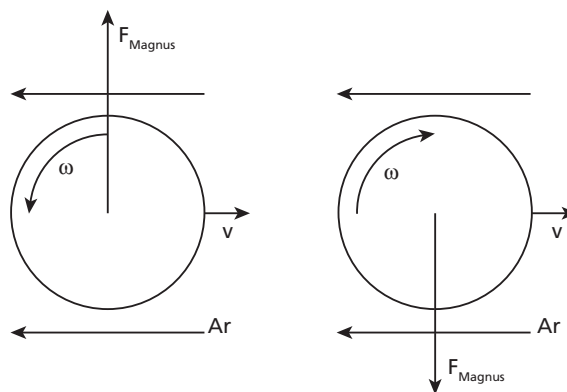
b) o instante e a altura H, indicada na figura, em que a primeira e a segunda bolinha se cruzam.

67. Um balão **B** sobe verticalmente em movimento uniforme a 2 m/s. No instante ($t = 0$) em que ele se encontra a 20 m do solo, um projétil **P** é lançado também verticalmente para cima, partindo do solo com velocidade v_0, como mostra a figura. Desprezando influências do ar no movimento do projétil, determine v_0 para que ele alcance o balão. Considere $g = 10\ m/s^2$.

68. No instante $t_0 = 0$, duas bolinhas de chumbo, **A** e **B**, são lançadas verticalmente de um mesmo local situado a certa altura do solo, com velocidades iniciais de mesmo módulo v_0: **A** é lançada para cima e **B**, para baixo. Desprezando a influência do ar e sendo **g** a intensidade do campo gravitacional, determine a distância **d** entre as bolinhas em função do tempo **t**, antes que alguma delas toque o solo.

69. (Uerj-RJ) Um avião, em trajetória retilínea paralela à superfície horizontal do solo, sobrevoa uma região com velocidade constante igual a 360 km/h.
Três pequenas caixas são largadas, com velocidade inicial nula, de um compartimento na base do avião, uma a uma, a intervalos regulares iguais a 1 segundo.
Desprezando-se os efeitos do ar no movimento de queda das caixas, determine as distâncias entre os respectivos pontos de impacto das caixas no solo.

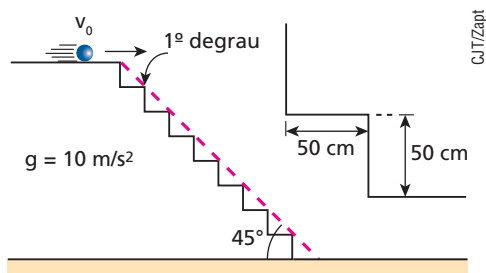
70. Um projétil é lançado obliquamente com velocidade $\vec{v}_0$ e passa pelo ponto de altura máxima com velocidade $\vec{v}$. Desprezando a influência do ar, indique a alternativa em que está mais bem representado o vetor $(\vec{v} - \vec{v}_0)$:

71. (UFMG) Um cano de irrigação, enterrado no solo, ejeta água a uma taxa de 15 litros por minuto com uma velocidade de 10 m/s. A saída do cano é apontada para cima fazendo um ângulo de 30° com o solo, como mostra a figura. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$, sen 30° = 0,50 e cos 30° = 0,87.

Calcule quantos litros de água estarão no ar na situação em que o jato d'água é contínuo do cano ao solo.

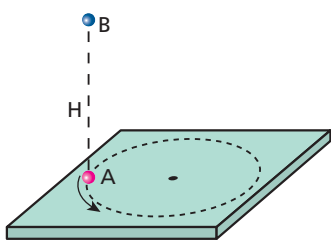
72. No instante t_1, uma pessoa parada na plataforma de uma estação ferroviária joga uma maçã verticalmente para cima, com velocidade inicial de módulo igual a 10 m/s, agarrando-a em seguida, no instante t_2, na mesma altura da qual foi lançada. Enquanto a maçã realizou esse movimento de sobe e desce, um trem passou pela estação em movimento retilíneo e uniforme, a 30 m/s. Considerando **g** igual a $10\ m/s^2$ e desprezando influências do ar, determine, em relação a um passageiro sentado no trem, o módulo do deslocamento vetorial da maçã entre os instantes t_1 e t_2.

73. (Unicamp-SP) Uma bola de tênis rebatida numa das extremidades da quadra descreve a trajetória representada na figura abaixo, atingindo o chão na outra extremidade da quadra. O comprimento da quadra é de 24 m. (Adote $g = 10\ m/s^2$.)

a) Calcule o tempo de voo da bola, antes de atingir o chão. Desconsidere a resistência do ar nesse caso.
b) Qual é a velocidade horizontal da bola no caso acima?
c) Quando a bola é rebatida com efeito, aparece uma força F_E, vertical, de cima para baixo e igual a 3 vezes o peso da bola. Qual será a velocidade horizontal da bola, rebatida com efeito, para uma trajetória idêntica à da figura?

74. Um avião de bombardeio voa horizontalmente em linha reta, à altura **H**, com velocidade $\vec{v}$. Para atingir o alvo indicado na figura, uma bomba é solta a partir do repouso em relação ao avião. Desprezando a influência do ar no movimento da bomba, determine o ângulo **θ**, sendo **g** a intensidade do campo gravitacional.

75. (Unifesp-SP) É comum vermos, durante uma partida de voleibol, a bola tomar repentinamente trajetórias inesperadas logo depois que o jogador efetua um saque. A bola pode cair antes do esperado, assim como pode ter sua trajetória prolongada, um efeito inesperado para a baixa velocidade com que a bola se locomove. Quando uma bola se desloca no ar com uma velocidade **v**, girando com velocidade angular **ω** em torno de um eixo que passa pelo seu centro, ela fica sujeita a uma força $F_{Magnus} = k \cdot v \cdot \omega$. Essa força é perpendicular à trajetória e ao eixo de rotação da bola, e o seu sentido depende do sentido da rotação da bola, como ilustrado na figura. O parâmetro **k** é uma constante que depende das características da bola e da densidade do ar.

Esse fenômeno é conhecido como efeito Magnus. Represente a aceleração da gravidade por **g** e despreze a força de resistência do ar ao movimento de translação da bola.

a) Considere o caso em que o saque é efetuado na direção horizontal e de uma altura maior que a altura do jogador. A bola de massa **M** segue por uma trajetória retilínea e horizontal com uma velocidade constante **v**, atravessando toda a extensão da quadra. Quais devem ser o sentido e a velocidade angular de rotação **ω** a serem impressos na bola no momento do saque?
b) Considere o caso em que o saque é efetuado na direção horizontal, de uma altura **h**, com a mesma velocidade inicial **v**, mas sem imprimir rotação na bola. Calcule o alcance horizontal **D** da bola.

76. Uma bola rola do alto de uma escada com velocidade horizontal de módulo $v_0 = 4$ m/s. Cada degrau tem 50 cm de largura e 50 cm de altura. Desprezando a influência do ar, determine que degrau a bola tocará primeiro.

Para raciocinar um pouco mais

77. Uma bolinha **A** encontra-se em movimento circular e uniforme de frequência igual a 30 rpm, num plano horizontal. Uma outra bolinha **B** é abandonada a partir do repouso, de uma altura **H**, num instante em que **A** e **B** estão na mesma vertical.

Desprezando a influência do ar e considerando $g = 10$ m/s², determine os valores de **H** para que a bolinha **B** acerte a bolinha **A**.

78. O estudante Thales é um bom malabarista. Nos intervalos entre aulas, no corredor da escola, cujo teto fica a 4,4 m do piso, ele brinca com três laranjas. Com as mãos a 1,2 m do piso, ele lança as laranjas verticalmente para cima, uma de cada vez, com intervalos de tempo iguais entre os lançamentos. Cada sobe e desce das laranjas pode ser considerado um movimento livre.
Para manter sempre as três laranjas nessa exibição, determine, considerando **g** igual a 10 m/s²:

a) o máximo módulo **V** da velocidade de lançamento de cada laranja;
b) o intervalo de tempo entre lançamentos consecutivos de laranjas com velocidade **V**.

79. (Olimpíada Brasileira de Física) Uma bolinha de aço, abandonada a 1,0 m de altura de um piso muito duro, realiza um movimento periódico de subida e descida, por tempo indeterminado se desconsiderarmos as perdas de energia mecânica na resistência do ar e nas colisões com o solo. De que altura deve-se abandonar, simultaneamente com a primeira, uma segunda bolinha para que a sua terceira colisão com o solo coincida com a quinta colisão da primeira bolinha? (Adote $g = 10$ m/s².)

80. (ITA – SP) Um corpo de massa **M**, inicialmente em repouso, é erguido por uma corda de massa desprezível até uma altura **H**, onde fica novamente em repouso. Considere que a maior tração que a corda pode suportar tenha módulo igual a nMg, em que $n > 1$. Qual deve ser o menor tempo possível para ser feito o erguimento desse corpo?

a) $\sqrt{\dfrac{2H}{(n-1)g}}$

b) $\sqrt{\dfrac{2nH}{(n-1)g}}$

c) $\sqrt{\dfrac{nH}{2(n-1)^2 g}}$

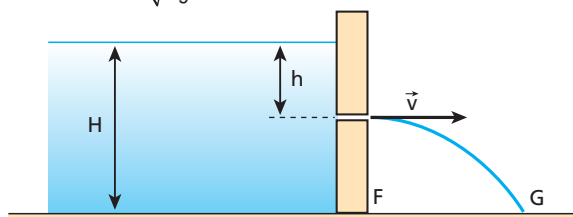
d) $\sqrt{\dfrac{4nH}{(n-2)g}}$

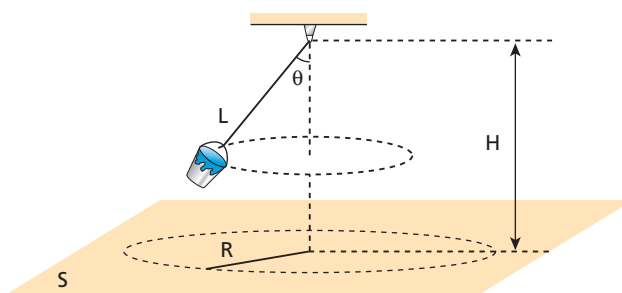
e) $\sqrt{\dfrac{4nH}{(n-1)g}}$

81. O que se pode afirmar a respeito da trajetória de um ponto material, sabendo-se que a resultante das forças que atuam nele é constante?

82. Um projétil é lançado obliquamente de um terreno plano e horizontal, com velocidade inicial de módulo igual a 30 m/s, atingindo uma altura máxima de 25 m. Despreze influências do ar e considere $g = 10$ m/s².

a) Calcule o módulo da mínima velocidade atingida pelo projétil durante seu movimento livre.
b) Uma circunferência tem o mesmo raio de curvatura em qualquer um de seus pontos. Uma parábola, entretanto, tem raio de curvatura variável. Calcule o raio de curvatura da trajetória do projétil, no ponto de altura máxima.

83. (FCC) Se um pequeno furo for feito na parede vertical de um reservatório que contenha um líquido ideal (sem viscosidade), um filete de líquido escoará pelo furo e sua velocidade inicial terá intensidade $v = \sqrt{2gh}$.

Considere o movimento do fluido como o de um projétil lançado no vácuo, desde o furo, com velocidade $\vec{v}$. Se desejarmos que o filete incida em um ponto **G** o mais afastado possível de **F**, a que profundidade **h** o furo deverá ser feito?

84. (Aman-RJ) Um pequeno balde contendo água é preso a um leve e inextensível fio de comprimento **L**, tal que $L = 0{,}50$ m, sendo afixado a uma altura (**H**) de 1,0 m do solo (**S**), como mostra a figura. À medida que o balde gira numa circunferência horizontal com velocidade constante, gotas de água que dele vazam atingem o solo formando um círculo de raio **R**. Considerando 10 m/s² o módulo da aceleração devida à gravidade e $\theta = 60°$, o valor de **R** será, em metros:

a) $\dfrac{\sqrt{17}}{5}$ b) $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{21}}{4}$ e) $\dfrac{4}{5}$

85. (ITA-SP) Duas partículas idênticas, de mesma massa **m**, são projetadas de uma origem **O** comum, num plano vertical, com velocidades iniciais de mesmo módulo e ângulos de lançamento respectivamente α e β em relação à horizontal. Considere T_1 e T_2 os respectivos tempos de alcance do ponto mais alto de cada trajetória e t_1 e t_2 os respectivos tempos para as partículas alcançarem um ponto comum de ambas as trajetórias. Assinale a opção com o valor da expressão $t_1T_1 + t_2T_2$.

a) $\frac{2v_0^2\,(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta)}{g^2}$

b) $\frac{2v_0^2}{g^2}$

c) $\frac{4v_0^2 \text{ sen } \alpha}{g^2}$

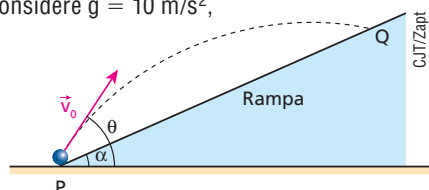
d) $\frac{4v_0^2 \text{ sen } \beta}{g^2}$

e) $\frac{2v_0^2\,(\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta)}{g^2}$

86. (ITA-SP) Considere hipoteticamente duas bolas lançadas de um mesmo lugar ao mesmo tempo: a bola 1, com velocidade para cima de 30 m/s, e a bola 2, com velocidade de 50 m/s formando um ângulo de 30° com a horizontal. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, assinale a distância entre as bolas no instante em que a primeira alcança sua máxima altura.

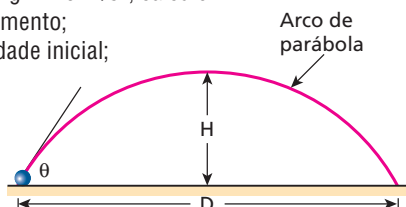
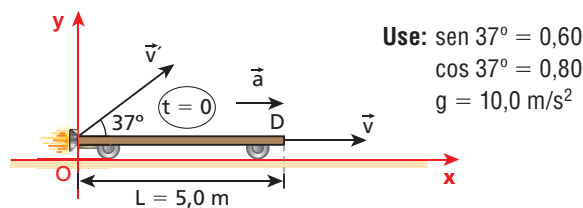
a) $d = \sqrt{6\,250}\,\text{m}$
b) $d = \sqrt{7\,217}\,\text{m}$
c) $d = \sqrt{17\,100}\,\text{m}$
d) $d = \sqrt{19\,375}\,\text{m}$
e) $d = \sqrt{26\,875}\,\text{m}$

87. Uma bolinha de aço é lançada de um ponto **P** de uma rampa inclinada de $\boldsymbol{\alpha}$ em relação à horizontal, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, que forma um ângulo $\boldsymbol{\theta}$ com a horizontal. Calcule a distância do ponto **P** ao ponto **Q**, onde a bolinha colide com a rampa. Despreze influências do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$,

$v_0 = 12 \text{ m/s}$,
$\alpha = 30°$
$\theta = 60°$

88. Um corpo de massa **m** é lançado obliquamente de uma superfície plana e horizontal, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, inclinada de $\boldsymbol{\theta}$ em relação à horizontal. Suponha que, além do peso, atue no corpo uma (única) outra força $\vec{F}$, horizontal e constante, no sentido da componente horizontal de $\vec{v}_0$. Sendo $\vec{g}$ o campo gravitacional, mostre que o alcance horizontal (**A**) desse corpo é dado por

$$\frac{v_0^2}{g} \cdot \text{sen } 2\theta \left(1 + \frac{F \text{ tg } \theta}{m\,g}\right)$$

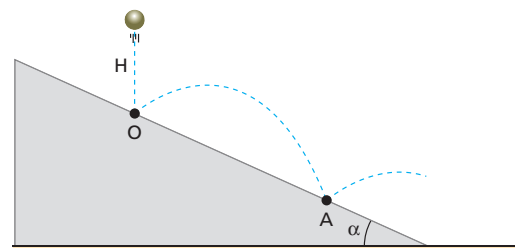
89. O alcance horizontal **D** de um projétil é o dobro da altura máxima **H** atingida por ele, num movimento livre de duração total igual a 4,0 s. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

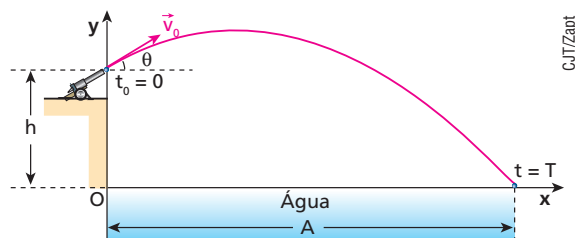
a) o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ de lançamento;
b) o módulo da velocidade inicial;
c) a altura máxima **H**.

90. A figura representa, no instante $t = 0$, uma plataforma horizontal de 5,0 m de comprimento, movendo-se para a direita com velocidade $\vec{v}$ de módulo igual a 20,0 m/s, e dotada de um sistema de propulsão que lhe proporciona uma aceleração constante $\vec{a}$ de módulo igual a 5,0 m/s² ao longo de uma estrada reta e horizontal.

Use: sen 37° = 0,60
cos 37° = 0,80
$g = 10{,}0 \text{ m/s}^2$

O referencial Oxy é solidário à estrada.
Em $t = 0$, um projétil é lançado da traseira da plataforma, com velocidade $\vec{v}'$ **em relação a ela**, de módulo igual a 50,0 m/s e inclinada de 37° em relação à horizontal.
Determine, desprezando influências do ar:

a) o ângulo $\boldsymbol{\theta}$ de lançamento do projétil em relação à estrada;
b) a distância d_{PD} entre a dianteira **D** da plataforma e o ponto de impacto **P** do projétil. Negligencie a altura da plataforma.

91. Uma pequena peça metálica, presa a um barbante de comprimento **L**, é posta a girar em torno do ponto **O**, realizando um movimento circular vertical.
Para isso, a mímina velocidade que a peça precisa ter no ponto mais alto da trajetória é dada por $v = \sqrt{Lg}$, em que **g** é a intensidade do campo gravitacional.
Supondo que, ao atingir o ponto mais alto, com essa velocidade ($\sqrt{Lg}$), o barbante se rompa, demonstre que a trajetória subsequente da peça é **externa** à circunferência. Despreze influências do ar.

92. uma bolinha de pingue-pongue é solta de uma altura **H** acima do ponto **O** de uma rampa plana, inclinada de $\boldsymbol{\alpha}$ em relação à horizontal.

Imediatamente antes e imediatamente após a colisão em **O**, as velocidades da bolinha têm a mesma intensidade **V** e formam ângulos iguais com rampa (colisão considerada elasticamente perfeita).
Desprezando influências do ar, determine, em função de **H** e $\boldsymbol{\alpha}$, a distância do ponto **O** ao ponto **A** indicado na figura.
Sugestão: use um sistema cartesiano ortogonal Oxy, com um dos eixos passando por **A**.

93. Do alto de um forte, um canhão lança uma bala com velocidade inicial $\vec{v}_0$, inclinada de $\boldsymbol{\theta}$ em relação à horizontal.

Desprezando influências do ar e sendo **g** a intensidade do campo gravitacional:

a) determine, em função de v_0, **g** e **h**, o ângulo θ_M para que o alcance horizontal **A** seja máximo;
b) calcule o ângulo θ_M considerando $v_0 = 100 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $h = 200 \text{ m}$.

Tópico 6

Trabalho e potência

Bloco 1

1. Energia e trabalho

... E a luz de mais um dia estimula a fotossíntese, provocando uma verdadeira revolução bioquímica nos vegetais, o que lhes permite cumprir seu ciclo virtuoso de crescimento, viço e morte. Os animais, incluindo o homem, nutrem-se de acordo com sua posição na cadeia alimentar, o que lhes faculta crescer, andar, correr, reproduzir e lutar pela própria subsistência.

Mas que elixir é esse que movimenta a fantástica máquina da vida, tornando nossa Terra um planeta tão singular? Trata-se do mesmo substrato primordial, responsável por fazer operar todas as máquinas, dos automóveis aos caminhões, dos tratores aos guindastes, dos aviões às naves espaciais. Essa substância imponderável que possibilita o funcionamento de todos os organismos – vivos ou não – recebe o nome de **energia**.

As usinas hidrelétricas são acionadas pela energia da água represada em grandes reservatórios; as instalações termelétricas queimam derivados de petróleo, carvão ou outros materiais; as usinas nucleares baseiam-se na fissão de núcleos de urânio, do qual são extraídas quantidades fantásticas de energia. Todo esse intercâmbio energético visa iluminar cidades, acionar fábricas e fazer funcionar geladeiras, fornos de micro-ondas, computadores, bem como todos os dispositivos que tornam a vida humana mais segura e confortável.

A energia comporta-se como um camaleão fugaz que surge e ressurge sob os mais variados matizes e mantos. Verifica-se em todas as estruturas – das micro às macro – uma verdadeira simbiose em que uma determinada quantidade de energia se pulveriza em doses menores sempre, porém de totalização idêntica à porção original. A energia térmica obtida na combustão da gasolina no motor de um carro, por exemplo, transforma-se parcialmente em energia de movimento do veículo, mais energia térmica e acústica, geradas de várias formas, inclusive pelo atrito entre as peças.

Isaac **Newton** (1642-1727) não conjeturou em suas teorias o conceito de energia. Para ele, toda a Mecânica era estruturada na noção de força. Foi o matemático, cientista e filósofo alemão Gottfried Wilhelm von **Leibniz** (1646-1716) quem esboçou as primeiras ideias sobre energia, afirmando que o ímpeto de movimento manifestado por alguns corpos se devia a uma espécie de "força viva" intrínseca ao corpo, ao que ele chamou de *vis viva*, expressão extraída do latim. Leibniz também teria sido o descobridor do cálculo diferencial e integral, que abriu imensas possibilidades à ciência formal a partir do século XVII. Há, no entanto, controvérsias quanto à paternidade do cálculo, já que Newton apresentou na mesma época trabalhos importantes sobre o assunto. O físico e médico suíço Daniel **Bernoulli** (1700-1782) aprimorou a noção de energia ao publicar seus estudos sobre escoamento de fluidos. Ele notou que, em situações de pressão constante, um aumento na velocidade de certos líquidos ocorria sempre à custa da diminuição na altura da tubulação em relação a um nível de referência determinado. Mas quem estabeleceu os contornos definitivos do conceito foi o cientista inglês James Prescott **Joule** (1818-1889) ao analisar manifestações e conservação de energia em sistemas termodinâmicos.

Palê Zuppani/Pulsar Imagens

Pôr do sol no Rio Paraguai na Estação Ecológica de Taiamã, MT. A energia solar, constituída essencialmente de luz e calor, é o item preponderante na matriz energética terrestre.

Definir amplamente energia de modo axiomático ou verbal é tarefa muito difícil. Por isso pretendemos introduzir essa noção de forma gradual, contando com o bom senso, a intuição e a vivência do leitor em cada contexto.

A palavra energia tem origem grega – *ergos* – e significa **trabalho**. O conceito de trabalho que desenvolveremos neste capítulo difere da noção de ocupação, ofício ou profissão. Realizar trabalho em Física implica a transferência de energia de um sistema para outro e, para que isso ocorra, são necessários uma **força** e um **deslocamento** adequados.

A força que um halterofilista exerce sobre um haltere, por exemplo, no ato de seu levantamento, realiza trabalho. Nessa operação, o atleta transfere a energia de seu corpo para o haltere, utilizando a força como veículo dessa transferência.

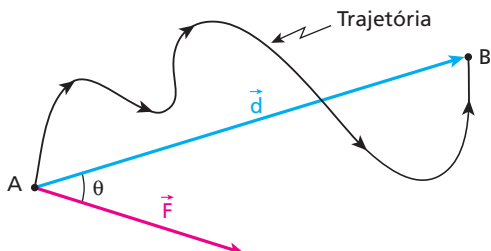
O mesmo não ocorre, porém, se ele apenas mantiver o haltere suspenso sobre sua cabeça, sem apresentar movimento algum. Nesse caso, o atleta exerce uma força para manter o "peso" em equilíbrio, porém o fato de não haver deslocamento determina a não transferência de energia mecânica e, consequentemente, a não realização de trabalho.

Fotografias: Image Source/Glow Images

As forças exercidas pelo halterofilista realizam trabalho no ato de erguer o "peso".

O trabalho das forças do halterofilista para manter o "peso" suspenso, em repouso, é nulo.

2. Trabalho de uma força constante

Consideremos a figura abaixo, em que uma partícula é deslocada de **A** até **B**, ao longo da trajetória indicada. Várias forças, não representadas, estão atuando na partícula, incluindo $\vec{F}$ que é constante, isto é, tem intensidade, direção e sentido invariáveis.

Seja $\vec{d}$ o deslocamento vetorial da partícula de **A** até **B** e θ o ângulo formado por $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

O trabalho (τ) da força $\vec{F}$ no deslocamento de **A** a **B** é a grandeza escalar dada por:

$$\tau = |\vec{F}||\vec{d}| \cos\theta$$

ou, em notação mais simples:

$$\tau = F\, d \cos\theta$$

Notas:

- O produto $|\vec{d}| \cos\theta$ é a projeção de $\vec{d}$ na direção de $\vec{F}$. Assim, podemos dizer que o trabalho de uma força constante é calculado pelo produto da intensidade da força pela projeção do deslocamento na direção da força.
- O produto $|\vec{F}| \cos\theta$, por sua vez, é a projeção de $\vec{F}$ na direção de $\vec{d}$. Assim, podemos dizer que o trabalho de uma força constante é calculado pelo produto do módulo do deslocamento pela projeção da força na direção do deslocamento.
- Se $\vec{F}$ ou $\vec{d}$ forem nulos, teremos $\tau = 0$.
- O deslocamento vetorial $\vec{d}$ tem origem no ponto de partida e extremidade no ponto de chegada da partícula.

Mario Yoshida

Fonte: ÍSOLA, Leda; CALDINI, Vera. *Atlas geográfico Saraiva*. São Paulo: Saraiva, 2004.

Independentemente da trajetória seguida, o deslocamento vetorial de um carro que viaja de São Paulo a Presidente Prudente é o vetor $\vec{d}$, de origem em São Paulo e extremidade em Presidente Prudente.

No Sistema Internacional (**SI**), o trabalho é medido em **joule** (**J**), em homenagem a James Prescott **Joule**.

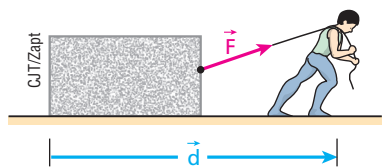
3. Sinais do trabalho

O trabalho é uma grandeza algébrica, isto é, admite valores positivos e negativos.

O que impõe o sinal do trabalho é o $\cos\theta$, já que $|\vec{F}|$ e $|\vec{d}|$ são quantidades sem sinal.

Trabalho motor

Para $0 \leq \theta < 90°$, temos $\cos \theta > 0$ e, por isso, $\tau > 0$. Nesse caso, o trabalho é denominado **motor**.

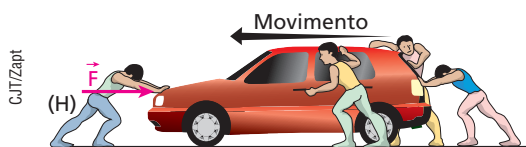
O trabalho de uma força é motor quando esta é "favorável" ao deslocamento.

No exemplo acima, a força, $\vec{F}$, que o homem exerce na caixa por meio da corda realiza trabalho motor (positivo). Isso ocorre pelo fato de $\vec{F}$ ser "favorável" ao deslocamento $\vec{d}$.

Irish Image Collection /Diomedia

Nesta fotografia, um guindaste ergue um contêiner verticalmente. O trabalho das forças exercidas pelos cabos de aço no contêiner é motor (positivo), enquanto o trabalho do peso do contêiner é resistente (negativo).

Trabalho resistente

Para $90° < \theta \leq 180°$, temos $\cos \theta < 0$ e, por isso, $\tau < 0$. Nesse caso, o trabalho é denominado **resistente**.

O trabalho de uma força é resistente quando esta é "desfavorável" ao deslocamento.

No exemplo acima, o trabalho da força exercida pelo homem **H** sobre o carro é resistente (negativo). Isso ocorre pelo fato de a referida força ser "desfavorável" ao deslocamento do carro (para a esquerda).

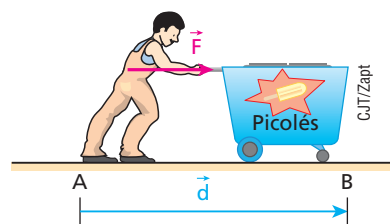
4. Casos particulares importantes

$\vec{F}$ e $\vec{d}$ têm mesma direção e mesmo sentido

Neste caso, $\theta = 0°$ e $\cos \theta = 1$. Assim, o trabalho é calculado por:

$$\tau = F\,d \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \tau = F\,d\,(1)$$

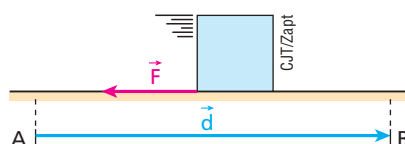
ou $\tau = F\,d$

Este é o caso em que a força realiza seu trabalho **máximo**.

No exemplo acima, a força $\vec{F}$ (constante) que o vendedor de sorvetes exerce em seu carrinho tem a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento vetorial $\vec{d}$ de **A** até **B**. O trabalho de $\vec{F}$ pode ser calculado por $\tau = F\,d$.

$\vec{F}$ e $\vec{d}$ têm mesma direção e sentidos opostos

Neste caso, $\theta = 180°$ e $\cos \theta = -1$. Assim, o trabalho é calculado por:

$$\tau = F\,d \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \tau = F\,d\,(-1)$$

ou $\tau = -F\,d$

No exemplo acima, o bloco desloca-se de **A** para **B** ao longo de um plano horizontal áspero. Nesse deslocamento ($\vec{d}$), o bloco sofre a ação da força de atrito $\vec{F}$ (admitida constante), cujo trabalho pode ser calculado por $\tau = -F\,d$.

$\vec{F}$ e $\vec{d}$ são perpendiculares entre si

Neste caso, $\theta = 90°$ e $\cos \theta = 0$. Assim, o trabalho é calculado por:

$$\tau = F\,d \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \tau = F\,d\,(0)$$

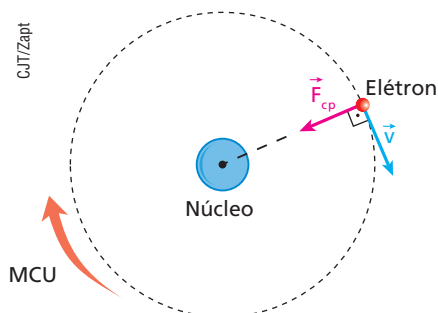
ou $\tau = 0$

Sempre que a força e o deslocamento forem perpendiculares entre si, a força não realizará trabalho.

Ficção científica?

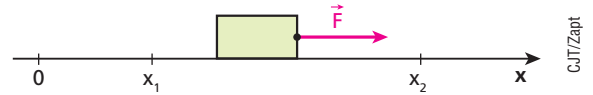
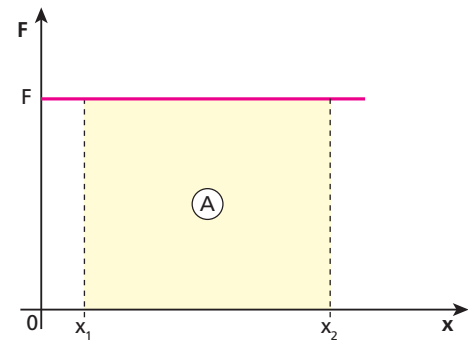
O trem em via férrea elevada é uma alternativa de transporte urbano que já opera em muitas cidades do mundo, sobretudo nas mais populosas e congestionadas. Para deslocamentos horizontais, tem-se que a força da gravidade (peso) e a força vertical de sustentação recebida pelo trem não realizam trabalho. Isso ocorre porque essas forças são perpendiculares ao deslocamento.

Outro caso interessante é o da força centrípeta. Conforme vimos no Tópico 3 (Resultantes tangencial e centrípeta), a força centrípeta é, a cada instante, perpendicular à velocidade vetorial. Por isso, para intervalos de tempo elementares (extremamente pequenos), a força centrípeta é perpendicular aos respectivos deslocamentos elementares sofridos pela partícula, o que nos permite afirmar que:

A força centrípeta nunca realiza trabalho; seu trabalho é sempre nulo.

$$\tau_{(\vec{F}_{cp})} = 0$$

Nesta figura, tem-se a representação clássica do átomo de hidrogênio, em que apenas um elétron realiza movimento circular e uniforme em torno do núcleo. A resultante centrípeta que mantém o elétron em sua órbita é a força de atração eletrostática recebida do núcleo. Essa resultante não realiza trabalho, pois, a cada intervalo elementar de tempo, ela é perpendicular à direção do respectivo deslocamento.

5. Cálculo gráfico do trabalho

No esquema a seguir temos um bloco percorrendo o eixo 0x. Ele se desloca sob a ação exclusiva da força $\vec{F}$, paralela ao eixo.

Façamos o gráfico do valor algébrico de $\vec{F}$ em função de **x**. O **valor algébrico de $\vec{F}$** é o valor dessa força com relação ao eixo 0x. Esse valor é **positivo** quando $\vec{F}$ atua no sentido do eixo e **negativo** quando $\vec{F}$ atua em sentido oposto ao do eixo. Considerando que $\vec{F}$ é constante, obtemos:

Tomemos a área **A**, destacada no diagrama. Teria essa área algum significado especial? Sim: ela fornece uma medida do valor algébrico do trabalho da força $\vec{F}$ ao longo do deslocamento do bloco, do ponto de abscissa x_1 ao ponto de abscissa x_2.

De fato, isso pode ser verificado fazendo-se:

$$A = F\,(x_2 - x_1),$$

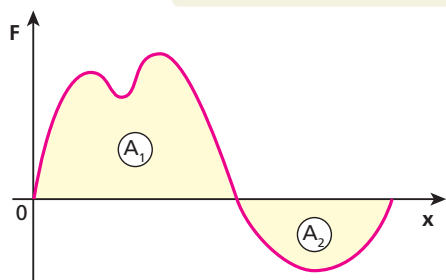
mas $x_2 - x_1 = d$, em que **d** é o módulo do deslocamento vetorial do bloco. Logo:

$$A = F\,d$$

Recordando que o produto F d corresponde ao trabalho de $\vec{F}$ obtemos:

$$A = \tau$$

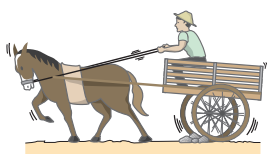
Embora a última propriedade tenha sido apresentada com base em uma situação simples e particular, sua validade estende-se também ao caso de forças paralelas ao deslocamento, porém de valor algébrico variável. Entretanto, para esses casos, sua verificação requer um tratamento matemático mais elaborado.

$$A_1 + A_2 = \tau$$
(soma algébrica)

F é o valor algébrico da força responsável pelo trabalho.

Em termos gerais, podemos enunciar que:

> Dado um diagrama do valor algébrico da força atuante em uma partícula em função de sua posição, a "área" compreendida entre o gráfico e o eixo das posições expressa o valor algébrico do trabalho da força. No entanto, a força considerada deve ser paralela ao deslocamento da partícula.

Exercícios — nível 1

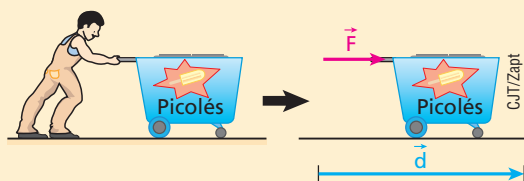
1. Na figura abaixo, embora puxe a carroça com uma força horizontal de $1{,}0 \cdot 10^3$ N, o burro não consegue tirá-la do lugar devido ao entrave de uma pedra:

Qual o trabalho da força do burro sobre a carroça?

2. No SI, a unidade de trabalho pode ser expressa por:

a) $kg \cdot \frac{m}{s^2}$
b) $kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$
c) $kg^2 \cdot \frac{m}{s^2}$
d) $kg \cdot \frac{m}{s}$
e) $kg \cdot \frac{m^2}{s^3}$

3. E.R. Um homem empurra um carrinho ao longo de uma estrada plana, comunicando a ele uma força constante, paralela ao deslocamento, e de intensidade $3{,}0 \cdot 10^2$ N. Determine o trabalho realizado pela força aplicada pelo homem sobre o carrinho, considerando um deslocamento de 15 m.

Resolução:

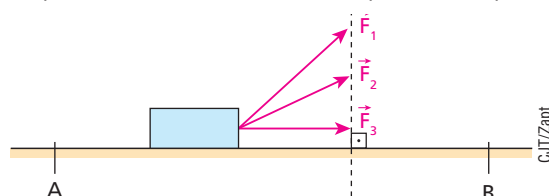
A situação descrita está representada a seguir:

Sendo $\vec{F}$ e $\vec{d}$ de mesma direção e mesmo sentido, o trabalho de $\vec{F}$ fica dado por:

$$\tau_{(\vec{F})} = F\,d$$

Como $F = 3{,}0 \cdot 10^2$ N e $d = 15$ m, vem:

$$\tau_{(\vec{F})} = 3{,}0 \cdot 10^2 \cdot 15 \text{ (J)} \Rightarrow \boxed{\tau_{(\vec{F})} = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

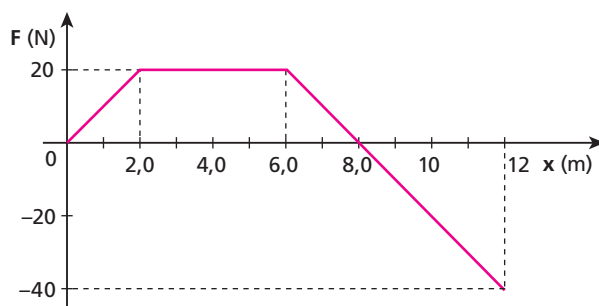
4. Uma força de intensidade 20 N atua em uma partícula na mesma direção e no mesmo sentido do seu movimento retilíneo, que acontece sobre uma mesa horizontal. Calcule o trabalho da força, considerando um deslocamento de 3,0 m.

5. No esquema da figura, uma mesma caixa é arrastada três vezes ao longo do plano horizontal, deslocando-se do ponto **A** até o ponto **B**:

Na primeira vez, é puxada pela força $\vec{F}_1$, que realiza um trabalho τ_1; na segunda, é puxada pela força $\vec{F}_2$, que realiza um trabalho τ_2; e na terceira é puxada por uma força $\vec{F}_3$, que realiza um trabalho τ_3. Supondo os comprimentos dos vetores da figura proporcionais às intensidades de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, aponte a alternativa correta.

a) $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$
b) $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$
c) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$
d) $\tau_1 = \tau_2 = 0$
e) $\tau_1 = \tau_2 < \tau_3$

6. Considere um garoto de massa igual a 50 kg em uma roda-gigante que opera com velocidade angular constante de 0,50 rad/s. Supondo que a distância entre o garoto e o eixo da roda-gigante seja de 4,0 m, calcule:

a) a intensidade da força resultante no corpo do garoto;
b) o trabalho realizado por essa força ao longo de meia volta.

7. A intensidade da resultante das forças que agem em uma partícula varia em função de sua posição sobre o eixo Ox, conforme o gráfico a seguir:

Calcule o trabalho da força para os deslocamentos:

a) de $x_1 = 0$ a $x_2 = 8{,}0$ m;
b) de $x_2 = 8{,}0$ m a $x_3 = 12$ m;
c) de $x_1 = 0$ a $x_3 = 12$ m.

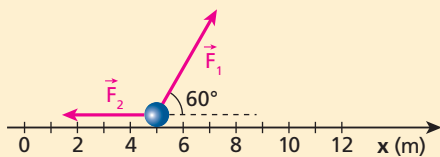
Exercícios

nível 2

8. (UCG-GO) Uma força constante $\vec{F}$, horizontal, de intensidade 20 N, atua durante 8,0 s sobre um corpo de massa 4,0 kg que estava em repouso apoiado em uma superfície horizontal perfeitamente sem atrito. Não se considera o efeito do ar. Qual o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ no citado intervalo de tempo?

9. (Fuvest-SP) Um carregador em um depósito empurra, sobre o solo horizontal, uma caixa de massa 20 kg, que inicialmente estava em repouso. Para colocar a caixa em movimento, é necessária uma força horizontal de intensidade 30 N. Uma vez iniciado o deslizamento, são necessários 20 N para manter a caixa movendo-se com velocidade constante. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a) Determine os coeficientes de atrito estático e cinético entre a caixa e o solo.
b) Determine o trabalho realizado pelo carregador ao arrastar a caixa por 5 m.
c) Qual seria o trabalho realizado pelo carregador se a força horizontal aplicada inicialmente fosse de 20 N? Justifique sua resposta.

10. E.R. Uma partícula percorre o eixo Ox indicado, deslocando-se da posição $x_1 = 2$ m para a posição $x_2 = 8$ m:

Sobre ela, agem duas forças constantes, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de intensidades respectivamente iguais a 80 N e 10 N. Calcule os trabalhos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ no deslocamento de x_1 a x_2.

Resolução:

O trabalho de $\vec{F}_1$ é motor (positivo), sendo calculado por:

$$\tau_{(\vec{F}_1)} = F_1 \, d \cos \theta_1$$

Tendo-se $F_1 = 80$ N, $d = x_2 - x_1 = 8 \text{ m} - 2 \text{ m} = 6$ m e $\theta_1 = 60°$, vem:

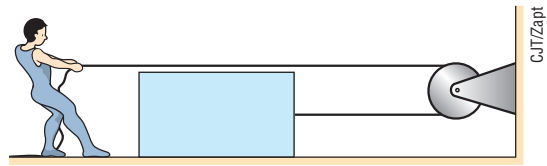
$$\tau_{(\vec{F}_1)} = 80 \cdot 6 \cdot \cos(60°) \ (\text{J}) \Rightarrow \boxed{\tau_{(\vec{F}_1)} = 240 \text{ J}}$$

O trabalho de $\vec{F}_2$ é resistente (negativo), sendo calculado por:

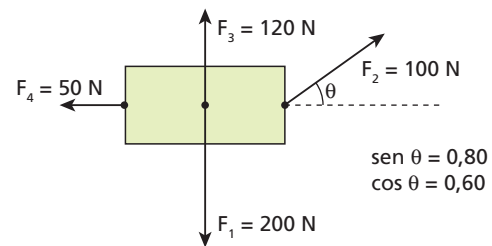
$$\tau_{(\vec{F})} = F_2 \, d \cos \theta_2$$

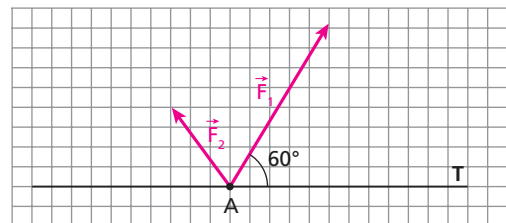
Tendo-se $F_2 = 10$ N, $d = 6$ m e $\theta_2 = 180°$, vem:

$$\tau_{(\vec{F}_2)} = 10 \cdot 6 \cdot \cos(180°) \ (\text{J}) \Rightarrow \boxed{\tau_{(\vec{F}_2)} = -60 \text{ J}}$$

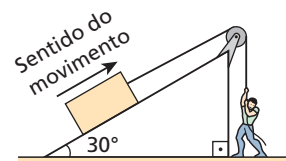
11. Na figura, o homem puxa a corda com uma força constante, horizontal e de intensidade $1{,}0 \cdot 10^2$ N, fazendo com que o bloco sofra, com velocidade constante, um deslocamento de 10 m ao longo do plano horizontal.

Desprezando a influência do ar e considerando o fio e a polia ideais, determine:

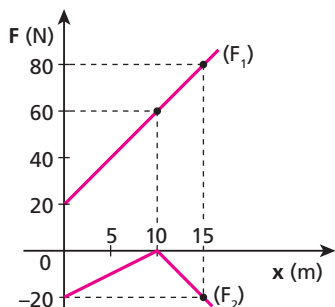
a) o trabalho realizado pela força que o homem exerce na corda;
b) o trabalho da força de atrito que o bloco recebe do plano horizontal de apoio.

12. O bloco da figura acha-se inicialmente em repouso, livre da ação de forças externas. Em dado instante, aplica-se sobre ele o sistema de forças indicado, constituído por $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$, de modo que $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ sejam perpendiculares a $\vec{F}_4$:

Sendo τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4, respectivamente, os trabalhos de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ para um deslocamento de 5,0 m, calcule τ_1, τ_2, τ_3 e τ_4.

13. Na figura, estão representadas em escala duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aplicadas em um anel que pode se movimentar ao longo de um trilho horizontal **T**.

Admitindo que a intensidade de $\vec{F}_1$ seja 10 N e que o anel sofra um deslocamento de 2,0 m da esquerda para a direita, calcule:

a) a intensidade de $\vec{F}_2$;
b) os trabalhos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ no deslocamento referido.

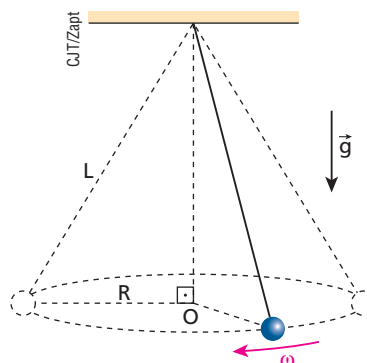
14. O esquema a seguir ilustra um homem que, puxando a corda verticalmente para baixo com força constante, arrasta a caixa de peso $4{,}0 \cdot 10^2$ N em movimento uniforme, ao longo do plano inclinado:

Desprezando os atritos e a influência do ar e admitindo que a corda e a roldana sejam ideais, calcule o trabalho da força exercida pelo homem ao provocar na caixa um deslocamento de 3,0 m na direção do plano inclinado.

15. O gráfico abaixo representa a variação do valor algébrico das duas únicas forças que agem em um corpo que se desloca sobre um eixo Ox. As forças referidas têm a mesma direção do eixo.

Calcule:

a) o trabalho da força F_1, enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;

b) o trabalho da força F_2, enquanto o corpo é arrastado nos primeiros 10 m;

c) o trabalho da força resultante, para arrastar o corpo nos primeiros 15 m.

16. Na situação representada na figura, uma pequena esfera de massa m = 2,4 kg realiza movimento circular e uniforme com velocidade angular ω em torno do ponto **O**. A circunferência descrita pela esfera tem raio R = 30 cm e está contida em um plano horizontal. O barbante que prende a esfera é leve e inextensível e seu comprimento é L = 50 cm.

Sabendo que no local a influência do ar é desprezível e que g = 10 m/s^2, determine:

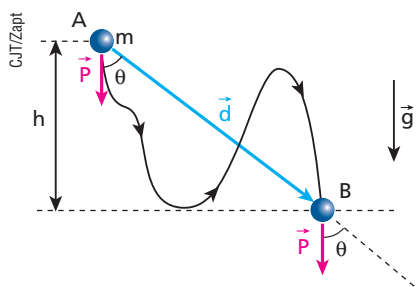
a) a intensidade da força de tração no barbante;

b) o valor de ω;

c) o trabalho da força que o barbante exerce sobre a esfera em uma volta.

Bloco 2

6. Trabalho da força peso

Consideremos a partícula da figura abaixo, inicialmente situada no ponto **A**. Sob a ação de diversas forças, incluindo de seu peso $\vec{P}$, ela sofre o deslocamento $\vec{d}$, atingindo o ponto **B**. De **A** até **B**, a partícula percorre a trajetória indicada:

em que θ é o ângulo entre $\vec{P}$ e $\vec{d}$;

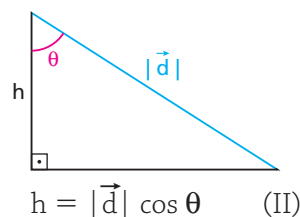
m é a massa da partícula;

g é a intensidade da aceleração da gravidade; e

h é o desnível (diferença de alturas) entre **A** e **B**.

Admitindo que, de **A** até **B**, $\vec{g}$ seja constante, temos, como consequência, $\vec{P}$ constante. Diante disso, o trabalho de $\vec{P}$ pode ser calculado por:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}||\vec{d}| \cos\theta \qquad \text{(I)}$$

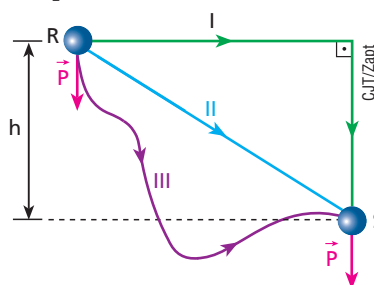
Entretanto, observando a geometria da figura, notamos que:

$$h = |\vec{d}| \cos\theta \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}|\, h \quad \text{ou} \quad \tau_{\vec{P}} = P\,h = m\,g\,h$$

Como $\tau_{\vec{P}}$ só depende de **P** e de **h**, concluímos que:

> O trabalho da força peso é independente da trajetória descrita pela partícula.

Isso significa que, no caso da figura a seguir, qualquer que seja a trajetória descrita pela partícula ao se deslocar do ponto **R** ao ponto **S**, o trabalho de seu peso será o mesmo.

Em qualquer das trajetórias, I, II ou III, o trabalho de $\vec{P}$ vale: $\tau_{\vec{P}} = P\,h = m\,g\,h$.

Suponhamos agora que a partícula faça o deslocamento oposto, isto é, saia de **B** e atinja **A**.

O trabalho de $\vec{P}$ fica determinado ao se fazer:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}||\vec{d}| \cos (180° - \theta)$$

Observando que $\cos (180° - \theta) = -\cos \theta$ (ângulos suplementares têm cossenos opostos), vem:

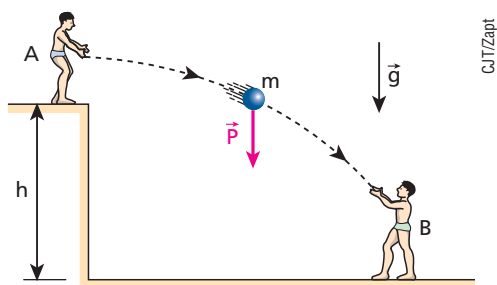
$$\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}||\vec{d}| \cos \theta$$

Como $h = |\vec{d}| \cos \theta$, obtém-se:

$$\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}|\, h \quad \text{ou} \quad \tau_{\vec{P}} = -P\,h = -m\,g\,h$$

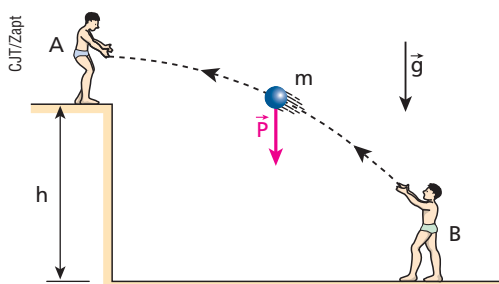
Generalizando, podemos escrever que:

$$\tau_{\vec{P}} = \pm P\,h = \pm m\,g\,h$$

Exemplo 1:

O garoto **A** joga a bola para o garoto **B**. Na descida, o trabalho do peso da bola é motor (positivo):

$$\tau_{\vec{P}} = +m\,g\,h$$

O trabalho do peso é **positivo** na descida.

Exemplo 2:

O garoto **B** joga a bola para o garoto **A**. Na subida, o trabalho do peso da bola é resistente (negativo):

$$\tau_{\vec{P}} = -m\,g\,h$$

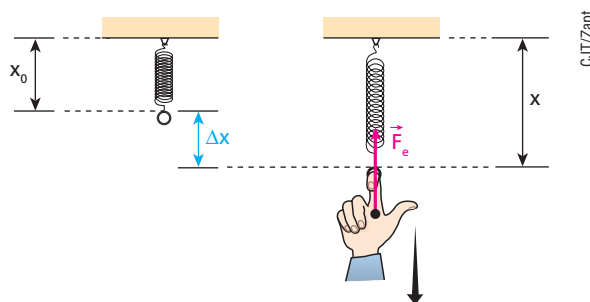
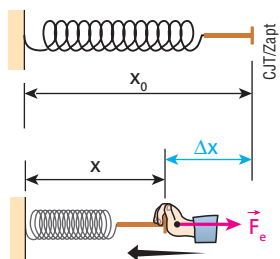
O trabalho do peso é **negativo** na subida.

O trabalho do peso é nulo em meia oscilação?

Nessa fotografia, um pêndulo oscila em um plano vertical sem ser influenciado significativamente pelo ar. Seja **m** a massa pendular, **g** a intensidade da aceleração da gravidade e **h** o desnível entre as posições mais alta e mais baixa ocupadas pelo corpo pendente da haste de peso desprezível. O trabalho da força peso é dado por $m\,g\,h$ na descida e por $-m\,g\,h$ na subida do sistema. Entre as posições de inversão do sentido do movimento, o trabalho da força peso é nulo, já que essas duas posições estão no mesmo nível horizontal.

7. Trabalho da força elástica

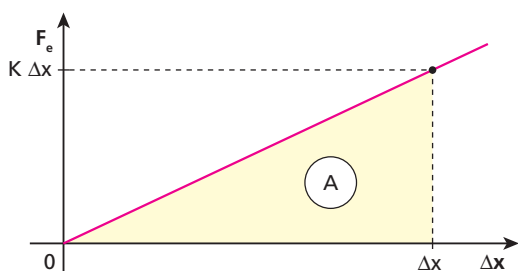
Admitamos uma mola sendo deformada em regime elástico pela mão de um operador. Nesse caso, a mola e a mão trocam, na região de contato, forças de ação e reação.

Chamemos de **força elástica** ($\vec{F}_e$) a força aplicada pela mola na mão do operador. Essa força sempre "aponta" para a posição em que estaria a extremidade livre da mola, caso esta não estivesse deformada. Por isso, é denominada **força de restituição**.

À medida que a mão do operador é deslocada verticalmente para baixo, provocando alongamento na mola, ela recebe a força elástica ($\vec{F}_e$) dirigida verticalmente para cima.

À medida que a mão do operador é deslocada horizontalmente para a esquerda, provocando compressão na mola, ela recebe a força elástica ($\vec{F}_e$) dirigida horizontalmente para a direita.

A intensidade de $\vec{F}_e$ pode ser calculada pela Lei de Hooke, vista no Tópico 1 (Princípios da Dinâmica):

$$F_e = K\,\Delta x$$

em que **K** é a constante elástica da mola; e **Δ**x é a deformação da mola (alongamento ou compressão).

Calculemos o trabalho de $\vec{F}_e$, traçando, inicialmente, o gráfico da intensidade de F_e em função de **Δ**x (o módulo do trabalho de $\vec{F}_e$ é dado pela "área" **A**, destacada no diagrama).

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = A \Rightarrow |\tau_{\vec{F}_e}| = \frac{K\Delta x \cdot \Delta x}{2}$$

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Levando em conta que $\tau_{\vec{F}_e}$ pode ser motor (+) ou resistente (–), escrevemos:

$$|\tau_{\vec{F}_e}| = \pm\frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

O trabalho da força elástica é motor (+) na fase em que a mola está retornando ao seu comprimento natural e é resistente (–) na fase em que ela é deformada (alongada ou comprimida).

O trabalho da força elástica independe da trajetória de seu ponto de aplicação.

Analisemos, a título de exemplo, o caso de um garoto que vai lançar uma pedra utilizando um estilingue.

O estilingue ainda é utilizado em brincadeiras infantis.

Na fase de tracionamento, em que as tiras de borracha do dispositivo são esticadas, as forças elásticas realizam sobre a mão do garoto um trabalho **resistente** (negativo). No ato do lançamento, entretanto, essas forças realizam sobre a pedra um trabalho **motor** (positivo).

Uma força é denominada **conservativa** quando seu trabalho, entre duas posições, independe da trajetória descrita por seu ponto de aplicação.

Diante disso, temos que a força peso e a força elástica são conservativas. Entretanto, nem toda força satisfaz à definição anterior. A força de atrito, a força de resistência do ar e a força de resistência viscosa exercida pelos líquidos, por exemplo, têm trabalhos dependentes da trajetória, o que as torna não conservativas.

8. O Teorema da Energia Cinética

Energia cinética

Consideremos uma partícula de massa **m** que, em dado instante, tem, em relação a um determinado referencial, velocidade escalar **v**. Pelo fato de estar em movimento, dizemos que a partícula está energizada, ou seja, dizemos que ela possui uma forma de energia denominada **cinética**. A **energia cinética** (E_c) é a modalidade de energia associada aos movimentos, sendo quantificada pela expressão:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Se a velocidade dobra, a energia cinética quadruplica?

Os carros de Fórmula 1 são equipados com motores muito potentes, que lhes permitem deslocamentos com altíssimas velocidades, em comparação com os carros comuns. Em alguns circuitos, é possível alcançar marcas da ordem de 300 km/h!

Quando em movimento, esses carros são dotados de **energia cinética**. A energia cinética depende da massa e da velocidade, sendo diretamente proporcional à massa e ao quadrado da velocidade.

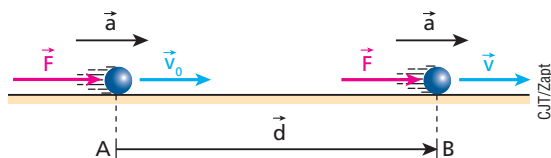
Schlegelmilch/Corbis/LatinStock

O teorema

O trabalho total, das forças internas e externas, realizado sobre um corpo é igual à variação de sua energia cinética.

$$\tau_{total} = \Delta E_c = E_{c_{final}} - E_{c_{inicial}}$$

Demonstração (particular)

Na figura abaixo, temos uma pequena esfera maciça sujeita à ação da **força resultante** constante $\vec{F}$, paralela ao deslocamento. Sejam $\vec{a}$ a aceleração comunicada por $\vec{F}$, $\vec{v}_0$ a velocidade da esfera no ponto **A** e $\vec{v}$ sua velocidade no ponto **B**. Seja, ainda, $\vec{d}$ o deslocamento da esfera de **A** até **B**.

O trabalho de $\vec{F}$ no deslocamento de **A** até **B** (τ_{total}) é dado por:

$$\tau_{total} = F\,d \qquad \text{(I)}$$

Do **Princípio Fundamental da Dinâmica**, podemos escrever que:

$$F = m\,a \qquad \text{(II)}$$

Nas condições descritas, a esfera realiza um movimento uniformemente variado.

Durante a subida, desprezando a influência do ar, apenas duas forças agem no corpo: a exercida pelo operador e a da gravidade (peso).

Pretendemos calcular o trabalho (τ_{oper}) da força exercida pelo operador durante o erguimento do corpo. Podemos escrever que:

$$\tau_{total} = \tau_{oper} + \tau_{peso} \quad \text{(I)}$$

Entretanto, pelo **Teorema da Energia Cinética**, temos:

$$\tau_{total} = E_{c_B} - E_{c_A} \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), vem:

$$\tau_{oper} + \tau_{peso} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

Na subida, o trabalho do peso é resistente (negativo), sendo dado por:

$$\tau_{peso} = -m\,g\,h$$

Temos, ainda:

$$E_{c_B} = \frac{m v_B^2}{2} \text{ e } E_{c_A} = \frac{m v_A^2}{2}$$

Substituindo, segue:

$$\tau_{oper} - m\,g\,h = \frac{m\,v_B^2}{2} - \frac{m\,v_A^2}{2}$$

Entretanto, $v_A = v_B = 0$, pois o corpo partiu do repouso em **A** e foi deixado em repouso em **B**.

Logo :

$$\tau_{oper} - m\,g\,h = 0$$

Daí:

$$\tau_{oper} = m\,g\,h$$

Trabalho ao subir escadas?

Thinkstock/Getty Images

O Corpo de Bombeiros dispõe de um equipamento fundamental para combater incêndios em edifícios altos: é a **Escada Magirus**. Acoplada a um caminhão, essa escada permite que soldados levem mangueiras e outros instrumentos até a altura de onde provêm as chamas. Supondo que na subida a variação de energia cinética seja nula, podemos dizer que o trabalho das forças musculares de um bombeiro (forças internas) é dado pelo produto m g h, em que **m** é a massa erguida, **g** é a intensidade da aceleração da gravidade e **h** é a elevação vertical do centro de massa do sistema em relação ao nível inicial.

Leitura

Um jogo estranho, mas divertido!

O *curling* é um esporte bastante antigo, criado no século XVI nos lagos congelados da Escócia, sendo anterior ao futebol. Seu nome deriva do verbo *curl*, que em inglês significa enrolar ou encaracolar. Atualmente, faz parte dos Jogos de Inverno e os locais com mais tradição na prática desse esporte estão na Escandinávia, Suíça e Canadá. O Brasil, que não tem lagos congelados naturais, também já entrou na era do *curling*, figurando atualmente em algumas competições internacionais.

Com o objetivo de atingir um determinado alvo, um lançador dispara horizontalmente um bloco de granito de base plana e circular, com cerca de 20 kg, sobre uma pista de gelo horizontal. Antes do lançamento, porém, provoca-se um gotejamento de água sobre a pista e o líquido, ao entrar em contato com o piso em baixa temperatura, congela-se, tornando o solo mais áspero e irregular. Dois jogadores da equipe do lançador podem alisar a pista em frente ao bloco e, para isso, utilizam apetrechos semelhantes a vassouras, o que reduz o atrito, permitindo que o bloco percorra distâncias maiores até parar.

Suponhamos que na situação que aparece na fotografia abaixo à direita o jogador lance horizontalmente o bloco de granito com velocidade de intensidade $\mathbf{V_0}$ sobre uma pista de gelo horizontal. Seja $\boldsymbol{\mu_C}$ o coeficiente de atrito dinâmico, admitido constante, entre o granito e o gelo e **g** a intensidade da aceleração da gravidade.

Paolo Bona/Grupo Keystone

Danita Delimont/Diomedia

Desprezando-se a resistência do ar e utilizando-se o Teorema da Energia Cinética, pode-se calcular a distância **d** que o bloco percorre até parar.

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m\,V^2}{2} - \frac{m\,V_0^2}{2} \Rightarrow F_{at}\,d\,(\cos 180°) = 0 - \frac{m\,V_0^2}{2}$$

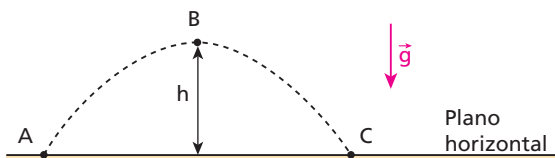
$$-\mu_C\,m\,g\,d = -\frac{m\,V_0^2}{2}$$

Da qual: $\boxed{d = \dfrac{V_0^2}{2\mu_c g}}$

Se o lançador atirasse o bloco de granito horizontalmente com o dobro de $\mathbf{V_0}$, por que fator ficaria multiplicada a distância **d**? Além disso, se a massa do bloco fosse maior, isso afetaria a distância **d**?

Exercícios

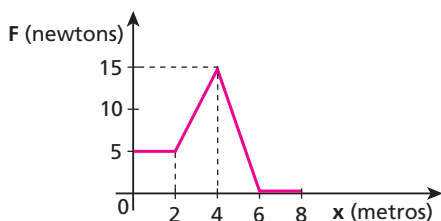
nível 1

17. Um projétil de massa **m** é lançado obliquamente no vácuo, descrevendo a trajetória indicada abaixo:

A altura máxima atingida é **h** e o módulo da aceleração da gravidade vale **g**. Os trabalhos do peso do projétil nos deslocamentos de **A** até **B**, de **B** até **C** e de **A** até **C** valem, respectivamente:

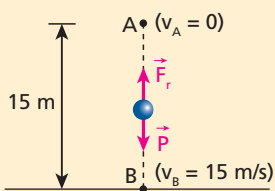
a) 0, 0 e 0.
b) mgh, mgh e 2mgh.
c) −mgh, mgh e 0.
d) mgh, −mgh e 0.
e) Não há dados para os cálculos.

18. O trabalho total realizado sobre uma partícula de massa 8,0 kg foi de 256 J. Sabendo que a velocidade inicial da partícula era de 6,0 m/s, calcule a velocidade final.

19. Uma partícula sujeita a uma força resultante de intensidade 2,0 N move-se sobre uma reta. Sabendo que entre dois pontos **P** e **Q** dessa reta a variação de sua energia cinética é de 3,0 J, calcule a distância entre **P** e **Q**.

20. Uma partícula de massa 900 g, inicialmente em repouso na posição $x_0 = 0$ de um eixo Ox, submete-se à ação de uma força resultante paralela ao eixo. O gráfico abaixo mostra a variação da intensidade da força em função da abscissa da partícula:

Determine:

a) o trabalho da força de $x_0 = 0$ a $x_1 = 6$ m;
b) a velocidade escalar da partícula na posição $x_2 = 8$ m.

21. E.R. Um pequeno objeto de massa 2,0 kg, abandonado de um ponto situado a 15 m de altura em relação ao solo, cai verticalmente sob a ação da força peso e da força de resistência do ar. Sabendo que sua velocidade ao atingir o solo vale 15 m/s, calcule o trabalho da força de resistência do ar.
Dado: $g = 10$ m/s²

Resolução:
Aplicando o **Teorema da Energia Cinética**, temos:

$$\tau_{total} = E_{c_B} - E_{c_A}$$

$$\tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_r} = \frac{m\,v_B^2}{2} - \frac{m\,v_A^2}{2}$$

$$m\,g\,h + \tau_{\vec{F}_r} = \frac{m\,v_B^2}{2} - \frac{m\,v_A^2}{2}$$

Sendo $m = 2{,}0$ kg, $g = 10$ m/s², $h = 15$ m, $v_A = 0$ e $v_B = 15$ m/s, calculemos o trabalho da força de resistência do ar ($\tau_{\vec{F}_r}$):

$$2{,}0 \cdot 10 \cdot 15 + \tau_{\vec{F}_r} = \frac{2{,}0 \cdot (15)^2}{2} \Rightarrow 300 + \tau_{\vec{F}_r} = 225$$

$$\boxed{\tau_{\vec{F}_r} = -75 \text{ J}}$$

O resultado negativo refere-se a um trabalho **resistente**.

22. (Ufal) Um corpo de massa 6,0 kg é abandonado de uma altura de 5,0 m num local em que $g = 10$ m/s². Sabendo que o corpo chega ao solo com velocidade de intensidade 9,0 m/s, calcule a quantidade de calor gerada pelo atrito com o ar.

23. Na situação esquematizada, um halterofilista levanta 80 kg num local em que $g = 10$ m/s² e mantém o haltere erguido, como representa a figura 2, durante 10 s.

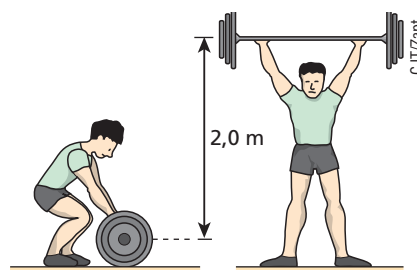



Figura 1 Figura 2

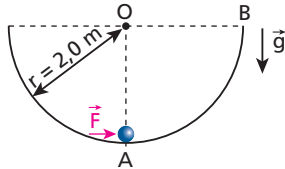
Os trabalhos das forças musculares durante o levantamento do haltere e durante sua manutenção no alto valem, respectivamente:

a) 800 J e 800 J.
b) 1 600 J e 1 600 J.
c) 800 J e zero.
d) 1 600 J e zero.
e) 1 600 J e 800 J.

24. (UFSC) Um helicóptero suspenso no ar, em repouso em relação ao solo, ergue por meio de um cabo de aço, mantido vertical, uma caixa de massa igual a 200 kg que se desloca com velocidade constante ao longo de um percurso de 10 m. No local, $g = 10$ m/s². Sabendo que no deslocamento citado as forças de resistência do ar realizam sobre a caixa um trabalho de −1 400 J, calcule o trabalho da força aplicada pelo cabo de aço sobre a caixa.

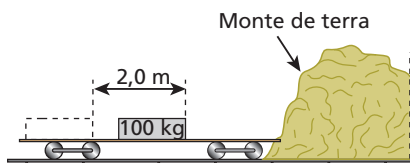
Exercícios

nível 2

25. Uma partícula, inicialmente em repouso no ponto **A**, é levada ao ponto **B** da calha contida em um plano vertical, de raio igual a 2,0 m, indicada na figura. Uma das forças que agem sobre a partícula é $\vec{F}$, horizontal, dirigida sempre para a direita e de intensidade igual a 10 N. Considerando a massa da partícula igual a 2,0 kg e assumindo g = 10 m/s², determine:

a) o trabalho de $\vec{F}$ ao longo do deslocamento AB;
b) o trabalho do peso da partícula ao longo do deslocamento referido no item anterior.

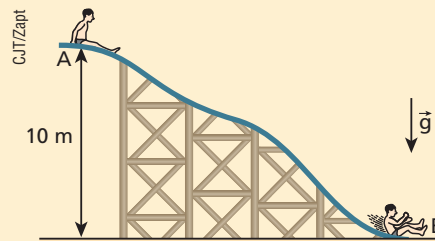
26. Um homem puxa a extremidade livre de uma mola de constante elástica igual a $1,0 \cdot 10^3$ N/m, alongando-a 20 cm. O trabalho da força elástica da mola sobre a mão do homem vale:
a) 40 J
b) 20 J
c) −40 J
d) −20 J
e) $-2,0 \cdot 10^5$ J

27. (Fuvest-SP) Considere um bloco de massa M = 10 kg que se move sobre uma superfície horizontal com uma velocidade inicial de 10 m/s. No local, o efeito do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}|$ = 10 m/s².
a) Qual o trabalho realizado pela força de atrito para levar o corpo ao repouso?
b) Supondo que o coeficiente de atrito cinético seja μ = 0,10, qual o intervalo de tempo necessário para que a velocidade do bloco seja reduzida à metade do seu valor inicial?

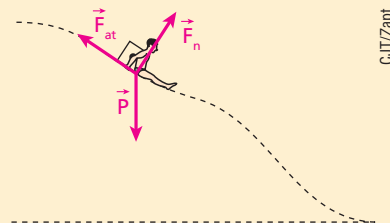
28. (Vunesp-SP) Um vagão, deslocando-se lentamente com velocidade **v** num pequeno trecho plano e horizontal de uma estrada de ferro, choca-se com um monte de terra e para abruptamente. Em virtude do choque, uma caixa de madeira, de massa 100 kg, inicialmente em repouso sobre o piso do vagão, escorrega e percorre uma distância de 2,0 m antes de parar, como mostra a figura.

Considerando g = 10 m/s² e sabendo que o coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e o piso do vagão é igual a 0,40, calcule:
a) a velocidade **v** do vagão antes de se chocar com o monte de terra;
b) a energia cinética da caixa antes de o vagão se chocar com o monte de terra e o trabalho realizado pela força de atrito que atuou na caixa enquanto ela escorregava.

29. Um projétil de 10 g de massa atinge horizontalmente uma parede de alvenaria com velocidade de 120 m/s, nela penetrando 20 cm até parar. Determine, em newtons, a intensidade média da força resistente que a parede opõe à penetração do projétil.

30. (Mack-SP) Um corpo de massa 2,0 kg é submetido à ação de uma força cuja intensidade varia de acordo com a equação F = 8,0x. **F** é a força medida em newtons e **x** é o deslocamento dado em metros. Admitindo que o corpo estava inicialmente em repouso, qual a intensidade da sua velocidade após ter-se deslocado 2,0 m?

31. E.R. Um garoto de massa 40 kg partiu do repouso no ponto **A** do tobogã da figura a seguir, atingindo o ponto **B** com velocidade de 10 m/s:

Admitindo $|\vec{g}|$ = 10 m/s² e desprezando o efeito do ar, calcule o trabalho das forças de atrito que agiram no corpo do garoto de **A** até **B**.

Resolução:

Durante a descida, três forças agem no corpo do garoto:
$\vec{P}$ = força da gravidade (peso);
$\vec{F}_n$ = reação normal do tobogã;
$\vec{F}_{at}$ = força de atrito.

O trabalho total, de todas as forças, é dado por:

$$\tau_{total} = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} + \tau_{\vec{F}_n}$$

A parcela $\tau_{\vec{F}_n}$ é nula, pois $\vec{F}_n$ é, a cada instante, perpendicular à trajetória. Assim:

$$\tau_{total} = \tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} \quad \text{(I)}$$

Conforme o **Teorema da Energia Cinética**, temos que:

$$\tau_{total} = E_{C_B} - E_{C_A}$$

$$\tau_{total} = \frac{m\,v_B^2}{2} - \frac{m\,v_A^2}{2}$$

Como $v_A = 0$ (o garoto partiu do repouso), vem:

$$\tau_{total} = \frac{m\,v_B^2}{2} \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), obtém-se:

$$\tau_{\vec{P}} + \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m\,v_B^2}{2} \Rightarrow m\,g\,h + \tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m\,v_B^2}{2}$$

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{m\,v_B^2}{2} - m\,g\,h$$

Sendo m = 40 kg, v_B = 10 m/s e g = 10 m/s², calculemos $\tau_{\vec{F}_{at}}$:

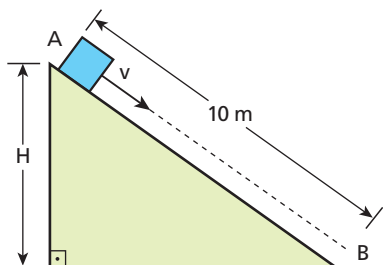
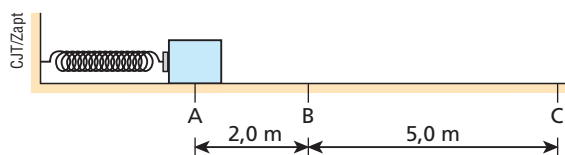
$$\tau_{\vec{F}_{at}} = \frac{40 \cdot (10)^2}{2} - 40 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (J)}$$

Assim: $\boxed{\tau_{\vec{F}_{at}} = -2,0 \cdot 10^3 \text{ J}}$

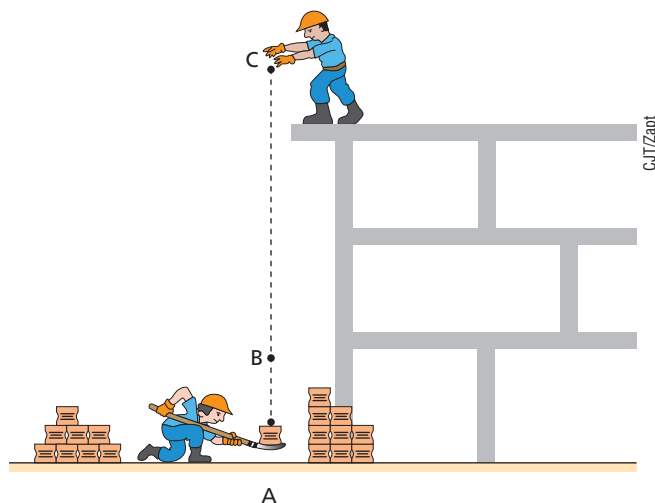
32. Em situações de emergência, bombeiros se dirigem muito rapidamente às viaturas de combate a incêndios deslocando-se, a princípio, de um andar ao outro, utilizando um cano vertical. Eles descem por esse tradicional utensílio, sob a ação de seu peso e da força de atrito, que é ajustada ao longo do percurso com vistas a evitar colisões traumáticas contra o solo.

Alamy/Other Images

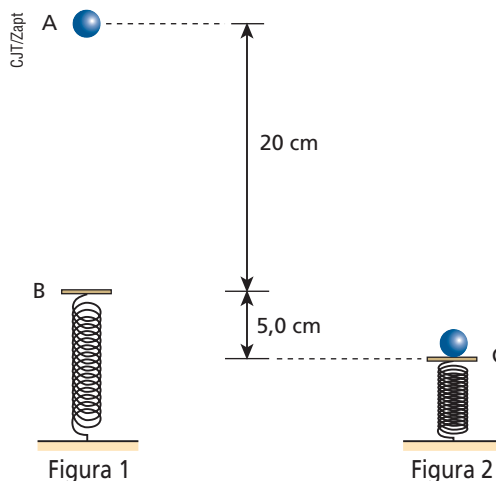
Admita que um bombeiro de massa m = 70 kg parta do repouso e escorregue verticalmente para baixo ao longo de um cano que interliga dois andares, cujos pisos são desnivelados por 5,0 m. Adotando-se $g = 10\ m/s^2$ e sabendo-se que o bombeiro atinge o andar inferior com velocidade de intensidade 2,0 m/s, determine o valor algébrico do trabalho das forças de atrito sobre seu corpo.

33. (Fuvest-SP) Um bloco de massa 2,0 kg é lançado do topo de um plano inclinado, com velocidade escalar de 5,0 m/s, conforme indica a figura. Durante a descida, atua sobre o bloco uma força de atrito constante de intensidade 7,5 N, que faz o bloco parar após deslocar-se 10 m. Calcule a altura **H**, desprezando o efeito do ar e adotando $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

34. Na situação esquematizada na figura, a mola tem massa desprezível, constante elástica igual a $1{,}0 \cdot 10^2$ N/m e está inicialmente travada na posição indicada, contraída de 50 cm. O bloco, cuja massa é igual a 1,0 kg, está em repouso no ponto **A**, simplesmente encostado na mola. O trecho **AB** do plano horizontal é perfeitamente polido e o trecho **BC** é áspero.

Em determinado instante, a mola é destravada e o bloco é impulsionado, atingindo o ponto **B** com velocidade de intensidade V_B. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10\ m/s^2$. Sabendo que o bloco para ao atingir o ponto **C**, calcule:

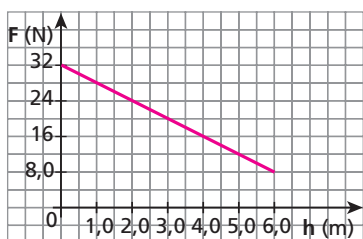
a) o valor de V_B;
b) o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano de apoio no trecho **BC**.

35. (Olimpíada Brasileira de Física) Um servente de pedreiro, empregando uma pá, atira um tijolo verticalmente para cima para o mestre de obras, que está em cima da construção. Veja a figura. Inicialmente, utilizando a ferramenta, ele acelera o tijolo uniformemente de **A** para **B**; a partir de **B**, o tijolo se desliga da pá e prossegue em ascensão vertical, sendo recebido pelo mestre de obras com velocidade praticamente nula em **C**.

Considerando-se como dados o módulo da aceleração da gravidade, **g**, a massa do tijolo, **M**, e os comprimentos, AB = **h** e AC = **H**, e desprezando-se a influência do ar, determine:

a) a intensidade **F** da força com a qual a pá impulsiona o tijolo;
b) o módulo **a** da aceleração do tijolo ao longo do percurso **AB**.

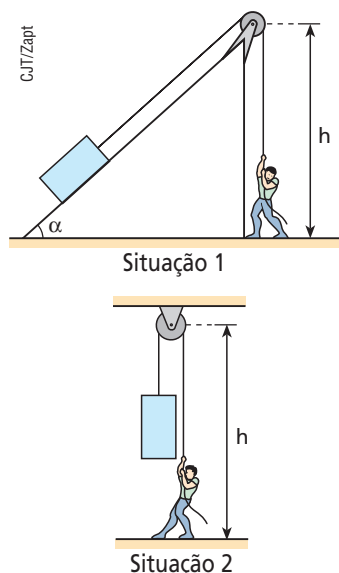
36. Na situação representada nas figuras 1 e 2, a mola tem massa desprezível e está fixa no solo com o seu eixo na vertical. Um corpo de pequenas dimensões e massa igual a 2,0 kg é abandonado da posição **A** e, depois de colidir com o aparador da mola na posição **B**, aderindo a ele, desce e para instantaneamente na posição **C**.

Adotando $g = 10\ m/s^2$ e desprezando o efeito do ar e a energia mecânica dissipada no ato da colisão, calcule:

a) o trabalho do peso do corpo no percurso **AC**;
b) o trabalho da força aplicada pela mola sobre o corpo no percurso **BC**;
c) a constante elástica da mola.

37. Uma partícula de massa 2,0 kg, inicialmente em repouso sobre o solo, é puxada verticalmente para cima por uma força $\vec{F}$, cuja intensidade varia com a altura **h**, atingida pelo seu ponto de aplicação, conforme mostra o gráfico:

No local, $|\vec{g}| = 10\ m \cdot s^{-2}$ e despreza-se a influência do ar. Considerando a ascensão da partícula de $h_0 = 0$ a $h_1 = 6,0$ m, determine:

a) a altura em que a velocidade tem intensidade máxima;

b) a intensidade da velocidade para $h_1 = 6,0$ m.

38. Nas duas situações representadas abaixo, uma mesma carga de peso **P** é elevada a uma mesma altura **h**:

Nos dois casos, o bloco parte do repouso, parando ao atingir a altura **h**. Desprezando todas as forças passivas, analise as proposições seguintes:

I. Na situação 1, a força média exercida pelo homem é menos intensa que na situação 2.

II. Na situação 1, o trabalho realizado pela força do homem é menor que na situação 2.

III. Em ambas as situações, o trabalho do peso da carga é calculado por $-P\,h$.

IV. Na situação 1, o trabalho realizado pela força do homem é calculado por $P\,h$.

Responda mediante o código:

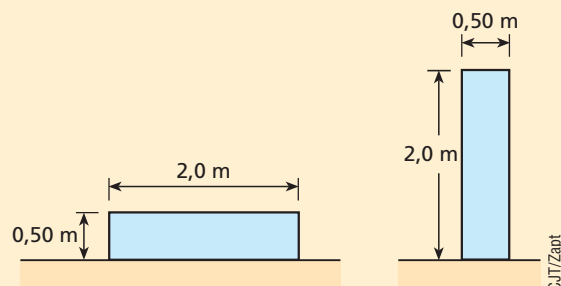
a) Todas são corretas.

b) Todas são incorretas.

c) Somente II e III são corretas.

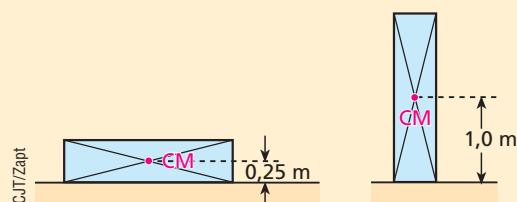
d) Somente I, III e IV são corretas.

e) Somente III é correta.

39. E.R. Considere um corpo de massa 20 kg, homogêneo, em forma de paralelepípedo, como ilustrado abaixo.

O corpo, inicialmente apoiado sobre sua maior face (figura 1), é erguido por um operador, ficando apoiado sobre sua menor face (figura 2).

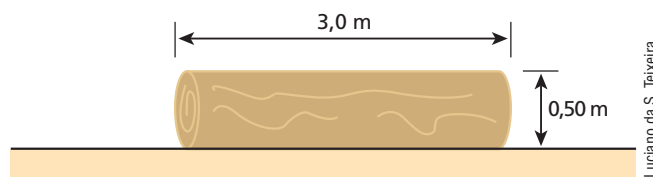
Sendo $g = 10\ m \cdot s^{-2}$, calcule o trabalho da força do operador no erguimento do corpo.

Resolução:

Observe que este é um corpo extenso, de dimensões não desprezíveis. Para efeito de cálculo vamos considerar o seu centro de massa, ou seja, o ponto CM onde se admite concentrada toda a massa do sistema.

Sendo $m = 20$ kg, $g = 10\ m \cdot s^{-2}$ e $h = 1,0 - 0,25 = 0,75$ m, calculamos o trabalho pedido (τ_{oper}):

$$\tau_{oper} = m\,g\,h \Rightarrow \tau_{oper} = 20 \cdot 10 \cdot 0,75\ (J)$$

$$\boxed{\tau_{oper} = 1,5 \cdot 10^2\ J}$$

40. Considere uma tora de madeira de massa igual a $2,0 \cdot 10^2$ kg, cilíndrica e homogênea, posicionada sobre o solo, conforme indica a figura.

Adotando $g = 10\ m \cdot s^{-2}$, calcule o trabalho realizado pelas forças aplicadas por um grupo de pessoas para colocar a tora com o eixo longitudinal na vertical, apoiada sobre sua base.

Bloco 3

9. Introdução ao conceito de potência

Na maioria dos casos práticos, não basta dizer apenas que certo dispositivo é capaz de cumprir determinada função. Às vezes é mais importante definir em quanto tempo ele executa essa função.

Tomemos, por exemplo, o caso de um guindaste. Suponhamos que ele erga uma viga de 1 tonelada a uma altura de 10 metros. Uma pergunta importante que deve ser feita nesse problema é: em quanto tempo o guindaste ergue a viga?

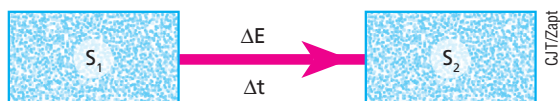
Do ponto de vista geral, a **potência** de um sistema consiste na rapidez com que ele realiza suas atribuições. A potência é tanto maior quanto menor é o intervalo de tempo utilizado na execução de uma mesma tarefa.

Dependendo do sistema em estudo, a potência recebe especificações diferentes. Falamos, por exemplo, de potência elétrica nos geradores, de potência térmica nos aquecedores e de potência mecânica quando estudamos a viabilidade de uma cachoeira para a instalação de um sistema de conversão hidrelétrico.

Quanto maior for a velocidade de rotação das facas de um liquidificador, menor será o intervalo de tempo que ele levará para triturar uma mesma quantidade de certo tipo de alimento. Assim, aumentando a velocidade de rotação das facas, estaremos aumentando a potência do sistema.

Mais velocidade ⟶ mais potência.

10. Potência média

Vamos considerar, agora, um sistema mecânico S_1 que, durante um intervalo de tempo Δt, transfere para um sistema mecânico S_2 uma quantidade de energia ΔE.

Nesse processo, define-se **potência média** (**Pot_m**) como o quociente da energia transferida (ΔE) pelo intervalo de tempo (Δt) em que essa transferência ocorreu:

$$Pot_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Essa energia transferida equivale a um trabalho τ. Assim, a potência mecânica média também pode ser dada por:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t}$$

A unidade de potência é obtida pelo quociente da unidade de trabalho (ou energia) pela unidade de tempo:

$$\text{unid (Pot)} = \frac{\text{unid } (\tau)}{\text{unid (t)}}$$

No Sistema Internacional (SI):

$$\text{unid } (\tau) = \text{joule (J)}$$
$$\text{unid (t)} = \text{segundo (s)}$$

Logo:

$$\text{unid (Pot)} = \frac{J}{s} = \text{watt (W)}$$

Um múltiplo muito usado do watt é o **quilowatt** (**kW**):

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$$

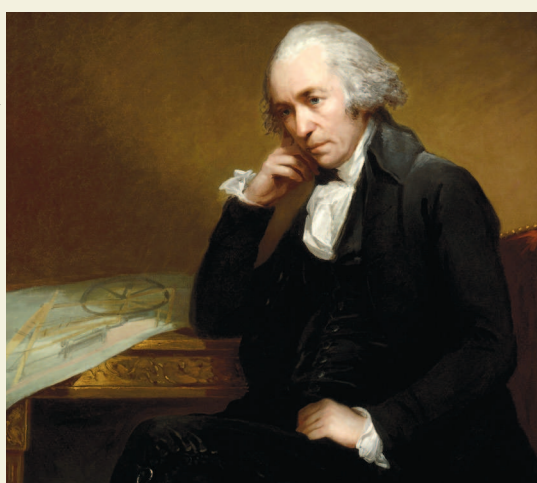
Outro múltiplo também usado frequentemente é o **megawatt** (**MW**):

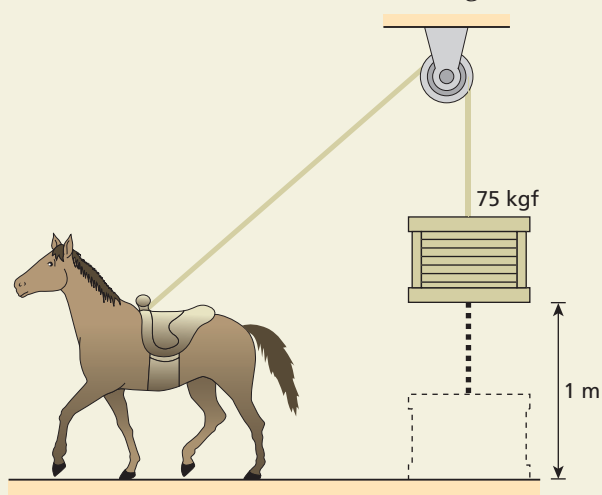
$$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$$

Embora não pertencentes ao Sistema Internacional (SI), são também muito empregadas as seguintes unidades de potência:

- cavalo-vapor (cv): $1 \text{ cv} \cong 735{,}5 \text{ W}$
- *horse-power* (HP): $1 \text{ HP} \cong 745{,}7 \text{ W}$

No quadro a seguir, fornecemos os valores aproximados das potências máximas disponibilizadas por quatro tipos de veículos automotores: um carro popular, um carro de padrão médio, um carro esportivo e um carro de Fórmula 1.

Categoria do veículo	Desenho básico	Potência máxima disponibilizada, em cavalos-vapor (cv)
Carro popular		60
Carro de padrão médio		110
Carro esportivo		400
Carro de Fórmula 1		750

Retrato de James Watt, pintado por Carl Frederik von Breda em 1792. Science Museum, Londres.

James Watt (1736-1819) foi um engenheiro escocês de fundamental importância no desenvolvimento e aprimoramento de máquinas térmicas, que constituíram a essência tecnológica de um dos períodos mais notáveis da história: a Revolução Industrial. Os mecanismos mais importantes projetados por ele eram acionados por vapor de água em alta pressão, obtido a partir da ebulição do líquido em caldeiras. Outros engenhos, porém, utilizavam tração animal, rodas-d'água e moinhos de vento. Um cavalo-vapor (cv), como foi definido por Watt, era a potência empreendida por um cavalo robusto para erguer uma carga de 75 kgf a uma altura de um metro durante um segundo.

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{m\,g\,h}{\Delta t}$$

$$Pot_m = \frac{75\text{ kg} \cdot 9{,}807\text{ m/s}^2 \cdot 1\text{m}}{1\text{ s}}$$

$$\boxed{Pot_m \cong 735{,}5\text{ W}}$$

Leitura

Potência em cachoeiras

O Brasil é um dos países de maior potencial hídrico do mundo, superado apenas pela Rússia e pelo Canadá. Esse potencial traduz a quantidade de energia mecânica aproveitável das águas dos rios por unidade de tempo. Dos 250 000 MW disponíveis em nosso país, cerca de 20% (50 000 MW) são transformados em potência elétrica nas muitas usinas hidrelétricas espalhadas pelo território nacional, predominantemente nas regiões Sudeste e Sul.

O potencial hídrico (potência hídrica média teórica) de uma queda-d'água depende da densidade absoluta da água (μ), do volume de líquido que despenca por unidade de tempo – vazão em volume (**Z**) –, da intensidade da aceleração da gravidade (**g**) e do desnível entre o topo da cachoeira e seu sopé (**h**).

Vamos admitir, no cálculo a seguir, que a água apresenta velocidade praticamente nula ao se precipitar do alto da cachoeira e que **m** seja a massa de água que despenca do topo da cachoeira em um intervalo de tempo Δt. O trabalho τ realizado pelas forças da gravidade para transportar a massa **m** do topo até o sopé da queda-d'água é dado por:

$$\tau = m\,g\,h \qquad \text{(I)}$$

A potência hídrica média teórica envolvida no processo, porém, é determinada pela relação:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$Pot_m = \frac{m\,g\,h}{\Delta t} \qquad \text{(III)}$$

Representemos por **V** o volume de água correspondente à massa **m**. A densidade absoluta da água é dada pelo quociente:

$$\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu\,V \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), temos:

$$Pot_m = \frac{\mu\,V\,g\,h}{\Delta t} \qquad \text{(V)}$$

Note que, em (V), o quociente $\frac{V}{\Delta t}$ representa a vazão em volume **Z** da cachoeira. Assim:

$$\boxed{Pot_m = \mu\,Z\,g\,h}$$

Para termos uma ideia da ordem de grandeza da potência hídrica média teórica disponível no sopé de uma cachoeira, consideremos uma queda-d'água com altura de 10 m, situada em um local em que $g = 10\ m/s^2$, por onde jorram 10 m^3 de água por segundo. Sendo de $1,0 \cdot 10^3\ kg/m^3$ a densidade absoluta da água, vem:

$$Pot_m = \mu\,Z\,g\,h \Rightarrow Pot_m = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10\ (W)$$

$$\boxed{Pot_m = 1,0 \cdot 10^3\ kW = 1,0\ MW}$$

Observe que, para μ, **Z** e **g** constantes, a Pot_m é diretamente proporcional à altura **h** da queda-d'água. Dobrando-se **h**, por exemplo, a Pot_m também dobra.

Já para μ, **g** e **h** constantes, a Pot_m é diretamente proporcional à vazão **Z** de água que jorra pela cachoeira. Dobrando-se **Z**, por exemplo, a Pot_m também dobra.

Gerson Gerloff/Pulsar Imagens

A potência hídrica média teórica disponível na base de uma cachoeira cresce com o desnível entre o topo e o sopé da queda-d'água e com a vazão de água que jorra. Essa potência, entretanto, não é totalmente aproveitável, já que sempre haverá perdas nos mecanismos de captação e conversão da energia. Nessa fotografia, temos as Cataratas do Iguaçu (2010).

Delfim Martins/Pulsar Imagens

Vista aérea da Usina Hidrelétrica de Itaipu (2009), localizada no Rio Paraná, na fronteira entre o Brasil e o Paraguai.

Na tabela a seguir, estão relacionadas as potências instaladas em algumas usinas hidrelétricas brasileiras.

POTÊNCIA INSTALADA EM ALGUMAS HIDRELÉTRICAS BRASILEIRAS

Hidrelétrica	Rio	Potência hídrica média teórica (MW)
Itaipu	Paraná	14 000
Tucuruí	Tocantins	4 245
Ilha Solteira	Paraná	3 444
Xingó	S. Francisco	3 000
Paulo Afonso IV	S. Francisco	2 460
Itumbiara	Paranaíba	2 082
São Simão	Paranaíba	1 710
Foz do Areia	Iguaçu	1 676
Jupiá	Paraná	1 551
Itaparica	S. Francisco	1 500
Irá	Uruguai	1 450
Marimbondo	Grande	1 440
Porto Primavera	Paraná	1 430

REUTERS /Latinstock

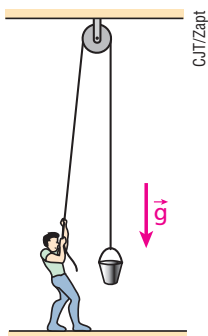
Fotografia da Usina de Três Gargantas (2009), na província de Hubei, na China, que com 26 turbinas fornece uma potência total de 18 200 MW, maior que os 14 000 MW de potência instalada de Itaipu. É um projeto controverso que inundou importantes sítios arqueológicos e demoveu 1,1 milhão de pessoas, muito embora tenha colaborado para controlar enchentes no Rio Yang-Tsé.

Exercícios

nível 1

41. Na figura, um operário ergue um balde cheio de concreto, de 20 kg de massa, com velocidade constante. A corda e a polia são ideais e, no local, $g = 10\ m/s^2$. Considerando um deslocamento vertical de 4,0 m, que ocorre em 25 s, determine:

a) o trabalho realizado pela força do operário;

b) a potência média útil na operação.

42. (PUC-SP) Uma pessoa de massa 80 kg sobe uma escada de 20 degraus, cada um com 20 cm de altura.

a) Calcule o trabalho que a pessoa realiza contra a gravidade (adote $g = 10\ m/s^2$).

b) Se a pessoa subir a escada em 20 segundos, ela se cansará mais do que se subir em 40 segundos. Como se explica isso, já que o trabalho realizado é o mesmo nos dois casos?

43. (Fuvest-SP) Dispõe-se de um motor com potência útil de 200 W para erguer um fardo de massa de 20 kg à altura de 100 m em um local onde $g = 10\ m/s^2$.

Supondo que o fardo parte do repouso e volta ao repouso, calcule:

a) o trabalho desenvolvido pela força aplicada pelo motor;

b) o intervalo de tempo gasto nessa operação.

44. Dentre as unidades seguintes, aponte aquela que não pode ser utilizada na medição de potências.

a) $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$

b) $N \cdot \frac{m}{s}$

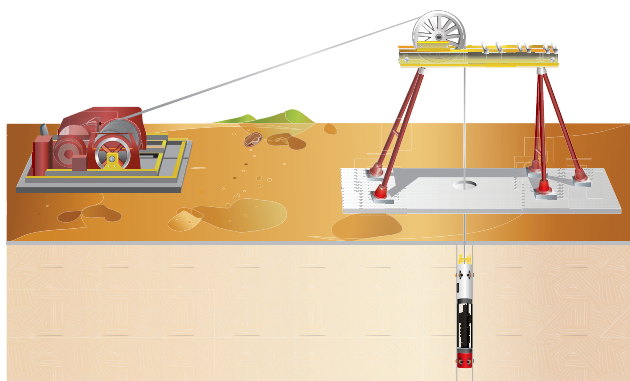
c) cavalo-vapor

d) quilowatt-hora

e) $J \cdot s^{-1}$

Exercícios

nível 2

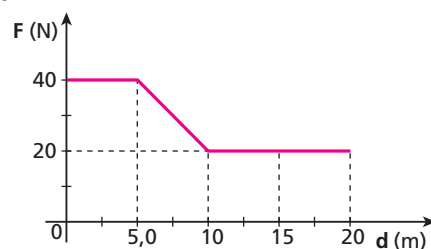
45. (UFRS-RS) O resgate de trabalhadores presos em uma mina subterrânea no norte do Chile foi realizado através de uma cápsula introduzida numa perfuração do solo até o local em que se encontravam os mineiros, a uma profundidade da ordem de 600 m. Um motor com potência total aproximadamente igual a 200 kW puxava a cápsula de 250 kg contendo um mineiro de cada vez.

Considere que, para o resgate de um mineiro de 70 kg de massa a cápsula gastou 10 minutos para completar o percurso e suponha que a aceleração da gravidade local tenha módulo igual a 10 m/s^2.
Não se computando a potência necessária para compensar as perdas por atrito, a potência efetivamente fornecida pelo motor para içar a cápsula foi de:
a) 686 W
b) 2 450 W
c) 3 200 W
d) 18 816 W
e) 41 160 W

46. (Fuvest-SP) Uma esteira rolante transporta 15 caixas de bebida por minuto de um depósito no subsolo até o andar térreo. A esteira tem comprimento de 12 m, inclinação de 30° com a horizontal e move-se com velocidade constante. As caixas a serem transportadas já são colocadas com a mesma velocidade da esteira. Se cada caixa pesa 200 N, o motor que aciona esse mecanismo deve fornecer a potência de:
a) 20 W
b) 40 W
c) $3,0 \cdot 10^2$ W
d) $6,0 \cdot 10^2$ W
e) $1,0 \cdot 10^3$ W

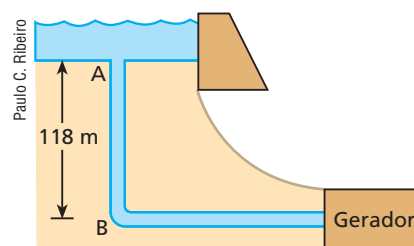
47. (Unicamp-SP) Um carro recentemente lançado pela indústria brasileira tem aproximadamente 1,5 tonelada e pode acelerar, sem derrapagens, do repouso até uma velocidade escalar de 108 km/h, em 10 segundos.

(**Fonte:** *Revista Quatro Rodas*.)

Despreze as forças dissipativas e adote 1 cavalo-vapor (cv) = 750 W.
a) Qual o trabalho realizado, nessa aceleração, pelas forças do motor do carro?
b) Qual a potência média do motor do carro em cv?

48. O gráfico a seguir mostra a variação da intensidade de uma das forças que agem em uma partícula em função de sua posição sobre uma reta orientada. A força é paralela à reta.
Sabendo que a partícula tem movimento uniforme com velocidade de 4,0 m/s, calcule, para os 20 m de deslocamento descritos no gráfico abaixo:

a) o trabalho da força;
b) sua potência média.

49. A usina hidrelétrica de Itaipu é uma obra conjunta do Brasil e do Paraguai que envolve números gigantescos. A potência média teórica chega a 12 600 MW quando 18 unidades geradoras operam conjuntamente, cada qual com uma vazão próxima de 700 m^3 por segundo. Suponha que a água da represa adentre as tubulações que conduzem o líquido às turbinas com velocidade praticamente nula e admita que os geradores aproveitem 100% da energia hídrica disponível. Adotando-se para a aceleração da gravidade o valor 10 m/s^2 e sabendo-se que a densidade da água é igual a $1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3, determine o desnível entre as bocas das tubulações e suas bases, onde estão instaladas as turbinas das unidades geradoras.

50. (UFPE) As águas do rio São Francisco são represadas em muitas barragens, para o aproveitamento do potencial hidrográfico e transformação de energia potencial gravitacional em outras formas de energia. Uma dessas represas é Xingó, responsável por grande parte da energia elétrica que consumimos. A figura a seguir representa a barragem e uma tubulação, que chamamos de tomada d'água, e o gerador elétrico. Admita que, no nível superior do tubo, a água está em repouso, caindo a seguir até um desnível de 118 m, onde encontra o gerador de energia elétrica. O volume de água que escoa, por unidade de tempo, é de $5,0 \cdot 10^2$ m^3/s.
Considere a densidade da água igual a $1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3, adote g = 10 m/s^2 e admita que não haja dissipação de energia mecânica.

Calcule, em MW, a potência hídrica na entrada do gerador.

Bloco 4

11. Potência instantânea

Definimos a potência média em um intervalo de tempo Δt. Se fizermos esse intervalo de tempo tender a zero, teremos, no limite, a **potência instantânea**, que pode ser expressa matematicamente por:

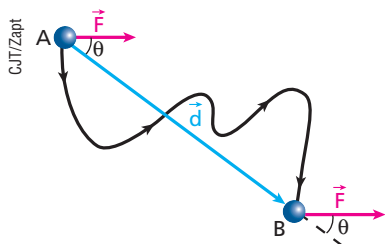
$$Pot = \lim_{\Delta t \to 0} Pot_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tau}{\Delta t}$$

Nota:

Em uma situação em que a potência é constante, o valor instantâneo iguala-se ao médio.

12. Relação entre potência instantânea e velocidade

Em vários problemas de Mecânica, há interesse em se relacionar a potência com a velocidade. Conhecendo, por exemplo, a intensidade da velocidade de um veículo, podemos determinar a potência útil fornecida por seu motor.

Estudemos a situação seguinte, em que uma partícula é deslocada de **A** para **B** ao longo da trajetória indicada, sob a ação da força $\vec{F}$ (constante), dentre outras forças:

Sejam $\vec{d}$ o deslocamento vetorial de **A** a **B** e θ ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$. O trabalho de $\vec{F}$ de **A** até **B** pode ser calculado por:

$$\tau = |\vec{F}||\vec{d}| \cos \theta \qquad \text{(I)}$$

A potência média de $\vec{F}$ nesse deslocamento é:

$$Pot_m = \frac{\tau}{\Delta t} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), segue:

$$Pot_m = \frac{|\vec{F}||\vec{d}| \cos \theta}{\Delta t}$$

O quociente $\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}$, entretanto, é o módulo da velocidade vetorial média ($\vec{v}_m$) da partícula.

Assim:

$$Pot_m = |\vec{F}||\vec{v}_m| \cos \theta$$

A potência instantânea de $\vec{F}$ é obtida passando-se o último resultado ao limite, para o intervalo de tempo tendendo a zero ($\Delta t \to 0$):

$$Pot = \lim_{\Delta t \to 0} Pot_m = \lim_{\Delta t \to 0} (|\vec{F}|\,|\vec{v}_m| \cos \theta)$$

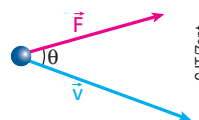
Diante desse limite, os valores médios transformam-se em instantâneos e obtemos:

$$Pot = |\vec{F}||\vec{v}| \cos \theta$$

ou, em notação mais simples:

$$Pot = F\,v \cos \theta$$

Nota:

Observe na expressão acima que θ é o ângulo formado entre $\vec{F}$ e $\vec{v}$:

Caso particular importante: $\theta = 0°$

Nesse caso, $\vec{F}$ e $\vec{v}$ têm a mesma orientação, isto é, mesma direção e sentido.

$$Pot = F\,v \cos \theta$$

Se $\theta = 0° \Rightarrow \cos \theta = 1$, levando-nos a concluir que:

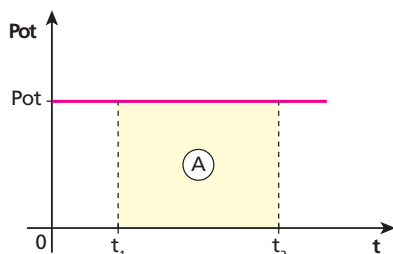
$$Pot = F\,v$$

Isso é que é potência!

Na fotografia, um ônibus espacial é impulsionado no ato do lançamento por dois foguetes. A força propulsora ($\vec{F}$) recebida pelo sistema tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade ($\vec{v}$) e, por isso, sua potência fica determinada pelo produto $Pot = F\,v$.

Thinkstock/Getty Images

13. Propriedade do gráfico da potência em função do tempo

Admitamos uma situação em que a potência de uma força seja constante no decorrer do tempo. O gráfico abaixo corresponde a esse caso.

Teria a área **A** destacada algum significado especial? Sim, pois ela fornece uma medida algébrica do trabalho da força durante o intervalo de tempo considerado.

Isso pode ser verificado fazendo-se:

$$A = \text{Pot}\,(t_2 - t_1)$$

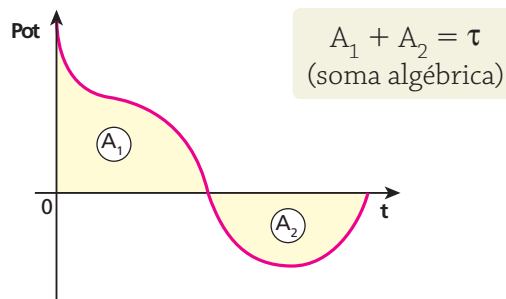
Sendo $t_2 - t_1 = \Delta t$ (intervalo de tempo), temos:

$$A = \text{Pot}\,\Delta t \qquad \text{(I)}$$

Entretanto, $\text{Pot} = \dfrac{\tau}{\Delta t} \Rightarrow \tau = \text{Pot}\,\Delta t \qquad \text{(II)}$

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$A = \tau$$

Apresentamos essa propriedade a partir de um caso particular, isto é, partimos da suposição de que a potência era constante. Entretanto, sua validade estende-se também aos casos em que a potência é variável.

De modo geral, podemos enunciar que:

> Dado um diagrama da potência em função do tempo, a "área" compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa o valor algébrico do trabalho ou da energia transferida.

Leitura

Haja gasolina!!!

Muitas vezes nos surpreendemos com o aumento de consumo de combustível apresentado por um veículo que faz uma determinada viagem em alta velocidade. É completar o trajeto, mandar encher o tanque e ter a surpresa.

— Esse carro está bebendo demais!!!

Isso se explica porque, quanto maior for a velocidade, maior será a solicitação de potência do motor e maior será, consequentemente, o consumo de combustível.

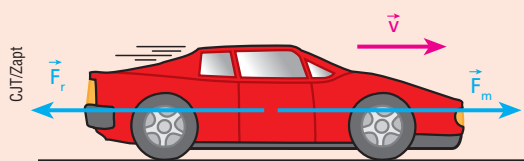
Imaginemos uma situação em que a intensidade da força total de resistência ao movimento (F_r) seja proporcional ao quadrado da intensidade da velocidade do veículo (**v**). Sendo **k** a constante da proporcionalidade, podemos escrever que:

$$F_r = k\,v^2 \qquad \text{(I)}$$

Supondo o veículo em movimento retilíneo e uniforme, deslocando-se em uma pista horizontal, a intensidade da força motriz que atua sobre ele (F_m) é igual à intensidade da força total de resistência ao movimento (F_r), já que essas duas forças se equilibram mutuamente.

$$F_m = F_r \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), vem:

$$F_m = k\,v^2 \qquad \text{(III)}$$

Veículo em movimento retilíneo e uniforme com velocidade $\vec{v}$: $F_m = F_r \Rightarrow F_m = k\,v^2$.

Como a força motriz tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade, sua potência instantânea (Pot) é determinada por:

$$\text{Pot} = F_m\,v \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo (III) em (IV), temos:

$$\text{Pot} = k\,v^2 \cdot v$$

Daí:

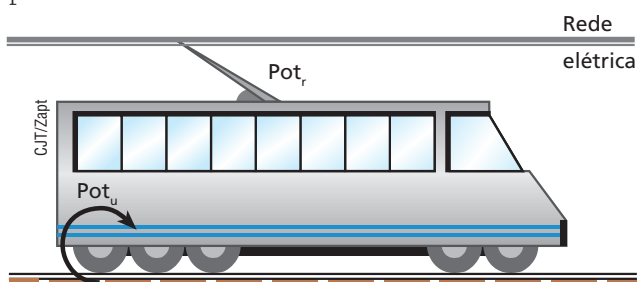
$$\boxed{\text{Pot} = k\,v^3}$$

Observe que a potência (**Pot**) é diretamente proporcional ao cubo da velocidade (**v**). Isso significa que, dobrando-se **v**, por exemplo, o valor da **Pot** fica multiplicado por oito.

Então podemos concluir que um pequeno aumento na velocidade implica um grande aumento na potência solicitada do motor, o que acarreta um maior consumo de combustível.

14. Rendimento

A noção de rendimento é largamente utilizada em diversos segmentos da atividade humana, sobretudo nas áreas técnicas. Fala-se, por exemplo, que o rendimento de um carro não está bom. Até nos esportes é comum mencionar que um determinado atleta não está rendendo como de costume.

Tome como exemplo a figura abaixo, em que uma locomotiva elétrica se acha em movimento para a direita.

Suponhamos que ela receba da rede uma potência Pot_r. Será que toda a potência recebida é utilizada no movimento? Claro que não! Uma parte é dissipada, perdendo-se por efeito de atritos: aquecimento e ruídos, dentre outros.

Sendo Pot_u a potência útil (utilizada no movimento) e Pot_d a potência dissipada, temos:

$$\text{Pot}_u = \text{Pot}_r - \text{Pot}_d$$

O rendimento (η) da locomotiva, por sua vez, é calculado pelo quociente da potência útil (Pot_u) pela potência recebida (Pot_r). Veja:

$$\eta = \frac{\text{Pot}_u}{\text{Pot}_r}$$

Esse exemplo pode ser estendido a outros casos. Em termos gerais, diz-se que:

O **rendimento** (η) de um sistema físico qualquer é dado pelo quociente da potência útil (Pot_u) pela potência recebida (Pot_r).

O rendimento é adimensional (não tem unidades) por ser definido pelo quociente de duas grandezas medidas nas mesmas unidades. É expresso geralmente em porcentagem, bastando, para isso, multiplicar seu valor por 100%.

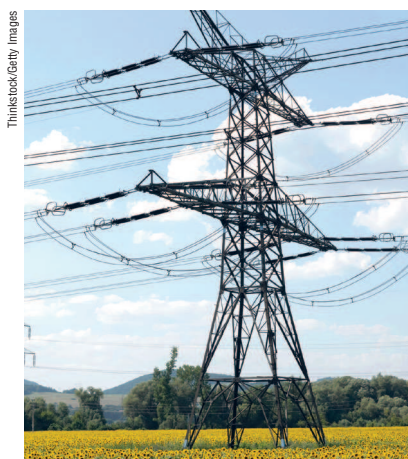
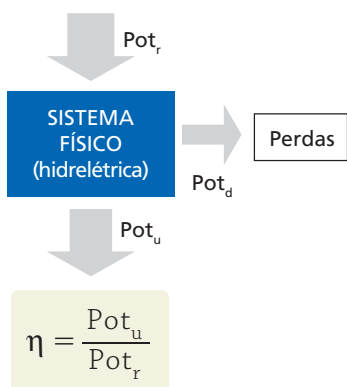
O rendimento de um sistema físico real é sempre inferior a 1 ou a 100%, pois, em razão das dissipações sempre existentes, a potência útil é sempre menor que a recebida.

De fato: $\eta = \dfrac{\text{Pot}_u}{\text{Pot}_r} \Rightarrow \eta = \dfrac{\text{Pot}_r - \text{Pot}_d}{\text{Pot}_r}$

Daí: $\eta = 1 - \dfrac{\text{Pot}_d}{\text{Pot}_r}$

O esquema a seguir ilustra o rendimento a partir de uma queda-d'água até uma linha de transmissão.

Garganta do Diabo, o maior conjunto de queda-d'água das Cataratas do Iguaçu (2012).

$$\eta = \frac{Pot_u}{Pot_r}$$

Linha de transmissão em campo de girassol.

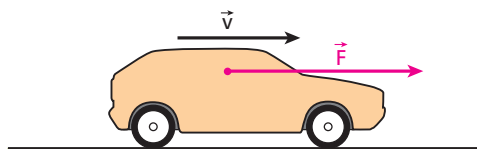
A ocorrência de $\eta = 1$ ou 100% implica $Pot_d = 0$, o que é inviável em termos reais.

Dizemos que o rendimento de um sistema é baixo quando a potência útil é bem menor que a recebida e que o rendimento de um sistema é alto quando a potência útil é pouco menor que a recebida.

Menos poluição?

Uma modalidade de energia que vem sendo utilizada cada vez em maior escala é a **eólica**, proveniente das correntes de ar (ventos). O aproveitamento desse tipo de energia, considerada energia limpa por não causar poluição, pode ser observado em regiões áridas ou desérticas, como no oeste dos Estados Unidos, nos estados da Califórnia, de Nevada e do Arizona, além de alguns estados do Nordeste brasileiro. O vento age nas pás dos rotores, fazendo-as girar. Esse movimento é transmitido aos eixos de geradores, que disponibilizam em seus terminais tensão elétrica. A potência útil disponível em cada ventoinha é sempre menor que a potência recebida do vento, já que sempre ocorrem dissipações. Isso indica que o rendimento de cada sistema captador é menor que 100%.

Exercícios nível 1

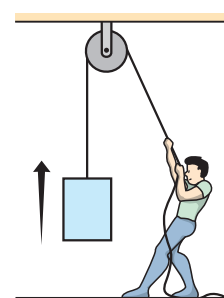
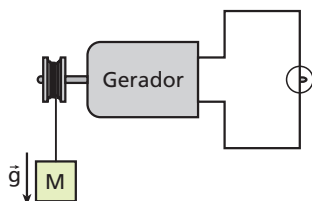
51. No esquema seguinte, $\vec{F}$ é a força motriz que age no carro e $\vec{v}$, sua velocidade vetorial instantânea:

Sendo $|\vec{F}| = 1{,}0 \cdot 10^3$ N e $|\vec{v}| = 5{,}0$ m/s, calcule, em kW, a potência de $\vec{F}$ no instante considerado.

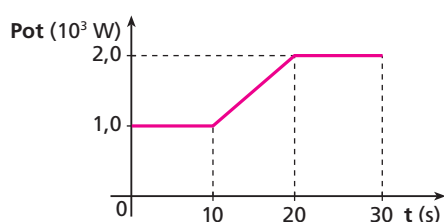
52. Uma partícula de massa 2,0 kg parte do repouso sob a ação de uma força resultante de intensidade 1,0 N. Determine:

a) o módulo da aceleração adquirida pela partícula;
b) a potência da força resultante, decorridos 4,0 s da partida.

53. No arranjo da figura, o homem faz com que a carga de peso igual a 300 N seja elevada com velocidade constante de 0,50 m/s.

Considerando a corda e a polia ideais e o efeito do ar desprezível, determine:

a) a intensidade da força com que o homem puxa a corda;
b) a potência útil da força exercida pelo homem.

54. (UFPE) Um gerador elétrico suposto ideal é acionado pela queda de um bloco de massa **M** que desce sob a ação da gravidade com velocidade escalar constante de 5,0 m/s. Sabendo que a potência fornecida pelo gerador é usada para acender uma lâmpada de 100 W, calcule o valor de **M**.

Despreze os atritos e adote $|\vec{g}| = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

55. O diagrama seguinte representa a potência instantânea fornecida por uma máquina, desde $t_0 = 0$ s até $t_1 = 30$ s:

Com base no diagrama, determine:
a) o trabalho realizado pela máquina, de $t_0 = 0$ s até $t_1 = 30$ s;
b) a potência média fornecida pela máquina no intervalo referido no item anterior.

56. E.R. O rendimento de determinada máquina é de 80%. Sabendo que ela recebe uma potência de 10,0 kW, calcule:
a) a potência útil oferecida;
b) a potência dissipada.

Resolução:
a) O rendimento (η) da máquina pode ser expresso por:

$$\eta = \frac{Pot_u}{Pot_r}$$

Sendo $\eta = 80\% = 0{,}80$ e $Pot_r = 10{,}0$ kW, calculemos Pot_u:

$$Pot_u = \eta\, Pot_r \Rightarrow Pot_u = 0{,}80 \cdot 10{,}0 \text{ kW}$$

$$\boxed{Pot_u = 8{,}0 \text{ kW}}$$

b) Temos que:

$$Pot_u = Pot_r - Pot_d$$

ou

$$Pot_d = Pot_r - Pot_u$$

Logo:

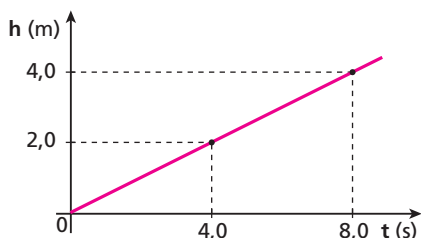
$$Pot_d = 10{,}0 \text{ kW} - 8{,}0 \text{ kW}$$

$$\boxed{Pot_d = 2{,}0 \text{ kW}}$$

57. Qual o rendimento de uma máquina que, ao receber 200 W, dissipa 50 W?
a) 25% b) 50% c) 75% d) 100% e) 150%

58. O rendimento de um motor é de 90%. Sabendo que ele oferece ao usuário uma potência de 36 HP, calcule:
a) a potência total que o motor recebe para operar;
b) a potência que ele dissipa durante a operação.

Exercícios nível 2

59. Uma caixa de massa $5{,}0 \cdot 10^2$ kg é erguida verticalmente por um guindaste, de modo que sua altura em relação ao solo varia em função do tempo, conforme o gráfico abaixo:

Considerando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, analise as proposições seguintes:
I. O movimento da caixa é uniforme.
II. A velocidade escalar da caixa no instante t = 5,0 s é $5{,}0 \cdot 10^{-1}$ m/s.
III. A força que os cabos do guindaste aplicam na caixa tem intensidade $5{,}0 \cdot 10^3$ N.
IV. A potência útil do guindaste é de 2,5 kW.
Responda conforme o código:
a) Todas são corretas.
b) Todas são incorretas.
c) Somente I e II são corretas.
d) Somente III e IV são corretas.
e) Somente I, III e IV são corretas.

60. Um paraquedista desce com velocidade constante de 5,0 m/s. O conjunto paraquedas e paraquedista pesa 100 kgf. Considerando $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$, podemos dizer que a potência dissipada pelas forças de resistência do ar tem módulo:
a) 0,50 kW b) 4,9 kW c) 5,0 kW d) 49 kW e) 50 kW

61. (Fatec-SP) Um carro de massa 1,0 tonelada sobe 20 m ao longo de uma rampa inclinada de 20° com a horizontal, mantendo velocidade constante de 10 m/s. Adotando $g = 10 \text{ m/s}^2$, sen 20° = 0,34 e cos 20° = 0,94 e desprezando o efeito do ar, calcule, nesse deslocamento:
a) o trabalho realizado pelo peso do carro;
b) a potência útil do motor.

62. Uma caminhonete de massa 1,2 tonelada sobe uma rampa inclinada de 30° em relação à horizontal, com velocidade constante de intensidade 36 km/h. As forças de atrito, resistentes ao

movimento, perfazem 25% do peso do veículo. Adotando $g = 10\ m/s^2$, calcule:
a) a intensidade da força motriz exercida na caminhonete;
b) a potência útil desenvolvida pelo motor do veículo.

63. Sabe-se que a intensidade da força total de resistência recebida por um carro de Fórmula 1 em movimento sobre o solo plano e horizontal é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de sua velocidade.
Admita que, para manter o carro com velocidade $V_A = 140$ km/h, o motor forneça uma potência útil $P_A = 30$ HP. Que potência útil P_B deverá o motor fornecer para manter o carro com velocidade $V_B = 280$ km/h?

64. E.R. A velocidade escalar (**v**) de uma partícula em trajetória retilínea varia com o tempo (**t**), conforme a função:

$$v = 4{,}0t \quad (SI)$$

Sabendo que a massa da partícula vale 3,0 kg, determine:
a) a expressão da potência instantânea da força resultante que age na partícula;
b) o valor da potência no instante t = 2,0 s.

Resolução:

Analisando a função v = 4,0t, concluímos que o movimento é uniformemente variado, com aceleração de intensidade $4{,}0\ m/s^2$.
Aplicando a **2ª Lei de Newton**, obtemos a intensidade da força que acelera a partícula:

$$F = m\,a \Rightarrow F = 3{,}0 \cdot 4{,}0\ (N)$$

$$\boxed{F = 12\ N}$$

a) Como a força resultante tem a mesma orientação da velocidade, sua potência fica dada por:

$$Pot = F\,v$$

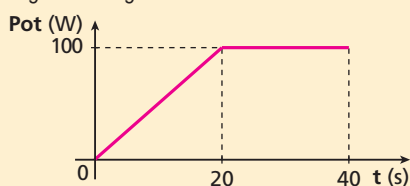
Como F = 12 N e v = 4,0t, vem:

$$Pot = 12 \cdot 4{,}0t \Rightarrow \boxed{Pot = 48t} \quad (SI)$$

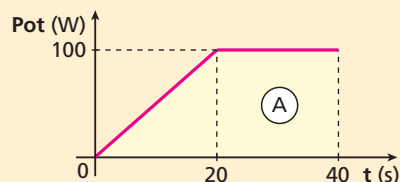
b) Para t = 2,0 s, temos:

$$Pot = 48 \cdot 2\ (W) \Rightarrow \boxed{Pot = 96\ W}$$

65. Sob a ação de uma força resultante constante e de intensidade 20 N, uma partícula parte do repouso, adquirindo um movimento cuja função das velocidades escalares é $v = 2k\,t$ (SI), sendo **k** uma constante adimensional e positiva. Sabendo que, no instante t = 1 s, a potência da força resultante sobre a partícula vale 200 W, determine o valor de **k**.

66. E.R. Um bloco de 15 kg de massa repousa sobre uma mesa horizontal e sem atrito. No instante $t_0 = 0$ s, passa a agir sobre ele uma força cuja potência é dada em função do tempo, conforme o gráfico seguinte:

Desprezando o efeito do ar e supondo que a força referida seja paralela à mesa, determine:
a) o trabalho da força sobre o bloco de $t_0 = 0$ s até $t_1 = 40$ s;
b) o módulo da velocidade do bloco no instante $t_1 = 40$ s.

Resolução:

a) O trabalho é calculado pela "área" **A** destacada abaixo:

$$\tau = A = \frac{(40 + 20)\,100}{2} \quad (J)$$

$$\boxed{\tau = 3{,}0 \cdot 10^3\ J}$$

b) A força em questão é a resultante sobre o bloco, o que nos permite aplicar o **Teorema da Energia Cinética**:

$$\tau = E_{c_{40}} - E_{c_0}$$

$$\tau = \frac{m\,v_{40}^2}{2} - \frac{m\,v_0^2}{2}$$

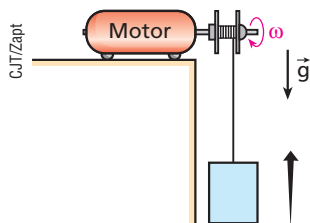
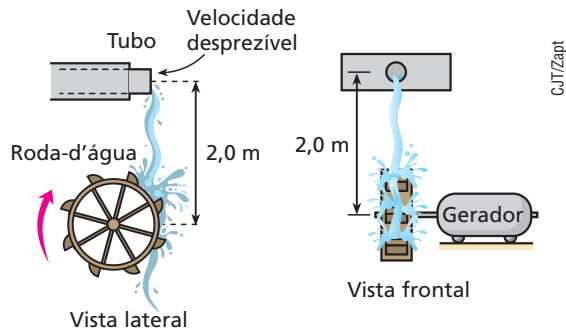
Sendo m = 15 kg, $v_0 = 0$ e $\tau = 3{,}0 \cdot 10^3$ J, calculemos v_{40}:

$$3{,}0 \cdot 10^3 = \frac{15\,v_{40}^2}{2} \Rightarrow \boxed{v_{40} = 20\ m/s}$$

67. O gráfico abaixo mostra a variação da potência instantânea da força resultante em uma partícula de massa 2,0 kg que, no instante $t_0 = 0$, tem velocidade escalar igual a 1,0 m/s.

Supondo que a trajetória seja retilínea, calcule:
a) a potência média da força resultante, no intervalo de $t_0 = 0$ a $t_1 = 5{,}0$ s;
b) a velocidade escalar da partícula no instante $t_1 = 5{,}0$ s.

68. Os trólebus são veículos elétricos ainda em operação no transporte público urbano de algumas capitais brasileiras, como São Paulo. Para se movimentarem, eles devem ser conectados a uma linha de força suspensa que os alimenta energeticamente, permitindo um deslocamento silencioso com produção de níveis praticamente nulos de poluição. Embora sua concepção tecnológica seja antiga, os trólebus funcionam com rendimentos maiores que os dos ônibus similares movidos a *diesel*, sendo, porém, cativos dos trajetos preestabelecidos em que existem as linhas de alimentação. Considere um trólebus trafegando com velocidade de intensidade constante, 36 km/h, num trecho retilíneo e horizontal de uma avenida. Sabendo que a potência elétrica que ele recebe da rede é de 5 000 kW e que seu rendimento é igual a 60%, determine:
a) a potência dissipada nos mecanismos do trólebus;
b) a intensidade da força resistente ao movimento do veículo.

69. Na situação da figura a seguir, o motor elétrico faz com que o bloco de massa 30 kg suba com velocidade constante de 1,0 m/s. O cabo que sustenta o bloco é ideal, a resistência do ar é desprezível e adota-se $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$. Considerando que nessa operação o motor apresenta rendimento de 60%, calcule a potência por ele dissipada.

70. O esquema seguinte representa os principais elementos de um sistema rudimentar de geração de energia elétrica. A água que sai do tubo com velocidade praticamente nula faz girar a roda, que, por sua vez, aciona um gerador. O rendimento do sistema é de 80% e a potência elétrica que o gerador oferece em seus terminais é de 4,0 kW.

Sendo dadas a densidade da água (1,0 g/cm³) e a aceleração da gravidade (10 m/s²), aponte a alternativa que traz o valor correto da vazão da água.

a) 0,025 m³/s
b) 0,050 m³/s
c) 0,10 m³/s
d) 0,25 m³/s
e) 0,50 m³/s

Leitura

Avião tem HP?

A decolagem de um jato é sempre um fato espetacular, que desperta interesse e indagações: como um corpo de massa da ordem de 10^2 ou 10^3 toneladas, inicialmente em repouso sobre o solo, pode ser elevado a altitudes de 10 000 m, atingindo velocidades próximas de 1 000 km/h?

As responsáveis pela propulsão da aeronave são as turbinas que "sugam" o ar à sua frente e o expelem vigorosamente para trás. Essa interação com o ar (ação e reação) faz com que esses dispositivos — e, consequentemente, o avião — recebam uma força denominada **empuxo**, que tem sua intensidade expressa em libras (na realidade, libras-força) e desempenha o papel de força motriz sobre o sistema.

É comum avaliar a "capacidade" de uma turbina em libras-força, isto é, menciona-se a intensidade da força de empuxo que ela pode disponibilizar ao avião. Para nós, porém, que estamos acostumados a expressar potências de motocicletas, carros e caminhões em cv ou HP, é comum a pergunta: quantos HP de potência tem um avião?

Para responder a essa questão, devemos saber inicialmente que 1 libra-força equivale a 0,453 kgf ou a 4,44 N aproximadamente.

Assim, lembrando que Pot = F v, fazendo F = 4,44 N e v = 600 km/h ≅ 167 m/s, concluímos que:

$$\text{Pot} = 4{,}44 \cdot 167 \text{ (W)} \quad \Rightarrow \quad \text{Pot} \cong 740 \text{ W} \cong 1 \text{ HP}$$

É possível dizer, então, que, para um avião que se move a 600 km/h, cada libra-força de empuxo nas turbinas está associada a uma potência de 1 HP.

$$\boxed{1 \text{ libra-força} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ HP}}$$

Um jato 737-300, por exemplo, que é equipado com duas turbinas de empuxo igual a 23 500 libras-força cada uma, utiliza, na velocidade de 600 km/h, uma potência de 47 000 HP.

CORBIS SYGMA/Latinstock

O jato 737-300: sessenta carros esportivos debaixo de cada asa.

Um carro esportivo pode oferecer potências próximas de 390 HP. Isso significa que o 737-300, a 600 km/h, tem debaixo de cada asa uma propulsão equivalente a 60 desses carros operando a "todo vapor".

CORBIS SYGMA/Latinstock

O jato A380 é o maior avião de passageiros do mundo. A aeronave, que pesa aproximadamente 560 toneladas-força, tem 22 rodas para manejo em solo e pode comportar até 800 pessoas, conseguindo voar sem escalas trechos de 15 000 km. Seus quatro motores proporcionam, na velocidade-cruzeiro de 1 000 km/h, um empuxo de 70 000 libras-força cada um, o que dá a esse gigante uma potência total em torno de 280 000 HP.

TF1-290_320_P2T6.indd 316 16/08/12 17:28

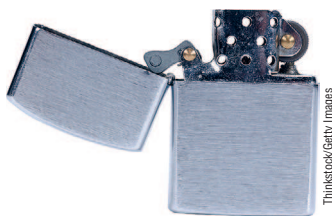
Descubra mais

1. Admita que no teste de um carro, realizado em uma pista plana e horizontal, o veículo parta do repouso e atinja 100 km/h ao fim de 3 s, de modo que nessa arrancada nenhuma de suas rodas derrape. Desconsidere os efeitos do ar. Que forças são responsáveis pela aceleração do carro e que forças são responsáveis pela variação de sua energia cinética?

2. Pesquise dados técnicos sobre as maiores hidrelétricas brasileiras (região e rio onde estão instaladas, dimensões dos respectivos lagos, vazão nas tubulações que despejam água nas turbinas e potência média teórica oferecida, dentre outros) e compare-os entre si. Analise os danos ambientais que a instalação de uma hidrelétrica acarreta e compare-os com os danos ambientais produzidos por outros sistemas de geração de energia elétrica (termelétricas e usinas nucleares).

Exercícios — nível 3

71. (Vunesp-SP) Para acender o isqueiro, um pequeno rolete de aço com ranhuras em sua face encurvada é esfregado contra uma pedra especial, tirando-lhe faíscas. As faíscas atingem o pavio embebido em fluido inflamável, ateando-lhe fogo.

Thinkstock/Getty Images

No ato de acender seu isqueiro, um rapaz faz com que o rolete se movimente, aplicando uma força tangente ao rolete, de intensidade de 1,5 N. Depois de o rolete girar 1/4 de volta, o pavio se incendeia. Sabendo-se que o diâmetro do rolete mede 80 mm, pode-se inferir que a energia de ativação empregada para a ignição do fluido, nessa circunstância, seja, em joules:

Dados: $\pi = 3$

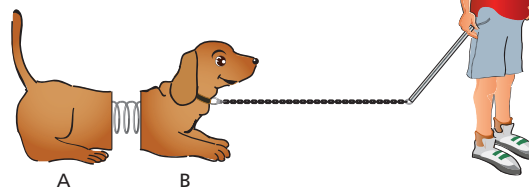
a) $1{,}9 \cdot 10^{-2}$
b) $3{,}7 \cdot 10^{-2}$
c) $5{,}3 \cdot 10^{-3}$
d) $7{,}1 \cdot 10^{-3}$
e) $9{,}0 \cdot 10^{-3}$

72. (Uepa) Quem disse que carro elétrico não anda? "Era isso o que esperávamos obter quando começamos a empresa há três anos: construir um carro com emissões zero que as pessoas adorassem dirigir." As palavras de Martin Eberhard, da Tesla Motors, são conclusivas quanto ao sucesso do projeto recém-concluído. O belo conversível de uma tonelada tem potência para fazer, com movimento uniformemente variado, de 0 a 108 km/h em apenas 4,0 segundos. Ele possui autonomia de 400 km por carga da bateria e sua velocidade escalar máxima é de 210 km/h. Junto com o seu novo *Tesla Roadster*, você poderá comprar um sistema de carga da bateria para ser instalado na sua garagem, capaz de carregar totalmente a bateria em apenas 3h30min.

(http://motorsa.com.br/tag/carro-eletrico. Adaptado.)

Sobre o texto, é correto afirmar que, para o carro elétrico em questão, deslocando-se em um plano horizontal, nos 4,0 primeiros segundos,

a) sua aceleração escalar média vale 25 m/s^2.
b) o trabalho do motor é $5{,}0 \cdot 10^6$ J
c) a força resultante nele atuante, suposta constante, tem módulo aproximadamente igual a $1{,}0 \cdot 10^3$ N.
d) a energia elétrica de sua bateria é totalmente transformada em energia cinética.
e) a distância que ele percorreu, com aceleração suposta constante, é de 60 m.

73. (Fuvest-SP) Um menino puxa, com uma corda, na direção horizontal, um cachorro de brinquedo formado por duas partes, **A** e **B**, ligadas entre si por uma mola, como ilustra a figura adiante. As partes **A** e **B** têm, respectivantente, massas $m_A = 0{,}5$ kg e $m_B = 1{,}0$ kg, sendo $\mu = 0{,}30$ o coeficiente de atrito cinético entre cada parte e o piso. A constante elástica da mola é $k = 10$ N/m e, na posição relaxada, seu comprimento é $x_0 = 10$ cm. O conjunto se move com **velocidade constante** de módulo $v = 0{,}10$ m/s.

Nessas condições, determine:

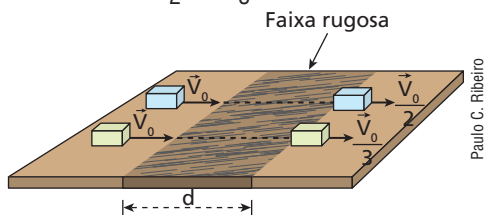
a) O módulo **T** da força exercida pelo menino sobre a parte **B**.
b) O trabalho **W** realizado pela força que o menino faz para puxar o brinquedo por 2,0 minutos.
c) O módulo **F** da força exercida pela mola sobre a parte **A**.
d) O comprimento **x** da mola, com o brinquedo em movimento.

> **Note e Adote:**
> Módulo da aceleração da gravidade no local: $g = 10$ m/s^2
> Despreze a massa da mola.

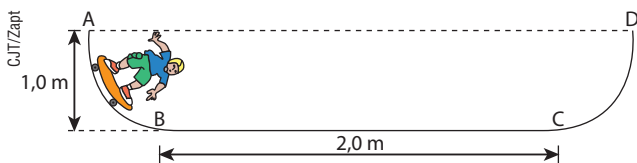
74. (Unicamp-SP) Os ímãs são magnetos permanentes utilizados no nosso dia a dia. Pequenos ímãs de forma cilíndrica são comumente empregados para fixar fotos ou bilhetes em painéis metálicos. Quando necessário, use $g = 10$ m/s^2 na solução dos itens abaixo.

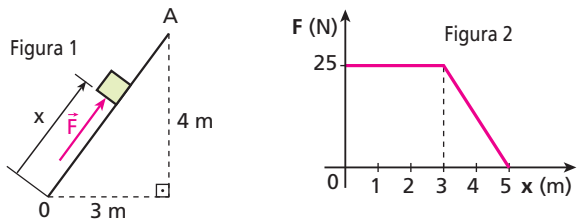
a) Considere um ímã de massa $m = 20$ g e o coeficiente de atrito estático entre a superfície do ímã e a superfície do painel igual a $\mu_e = 0{,}80$. Qual é a intensidade da força magnética mínima entre o ímã e o painel, que mantém o ímã em repouso aderido a esse painel em uma parede perfeitamente vertical ?

b) Quando um pequeno ímã é colocado para segurar uma foto, o ímã e a foto deslizam juntos lentamente para baixo. A força magnética entre o ímã e o painel nessa situação tem intensidade $F_{mag} = 0,2$ N e o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies da foto e do painel em contato vale $\mu_c = 0,60$.
Calcule o trabalho realizado pela força de atrito após um deslocamento de 20 cm do ímã.

75. (Fuvest-SP) Dois pequenos corpos, 1 e 2, movem-se em um plano horizontal, com atrito desprezível, em trajetórias paralelas, inicialmente com mesma velocidade, de módulo V_0. Em dado instante, os corpos passam por uma faixa rugosa do plano, de largura **d**. Nessa faixa, o atrito não pode ser desprezado e os coeficientes de atrito cinético entre o plano rugoso e os corpos 1 e 2 valem μ_1 e μ_2 respectivamente. Os corpos 1 e 2 saem da faixa com velocidades $\frac{V_0}{2}$ e $\frac{V_0}{3}$ respectivamente.

Nessas condições, a razão $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ é igual a:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{27}{32}$ d) $\frac{16}{27}$ e) $\frac{1}{2}$

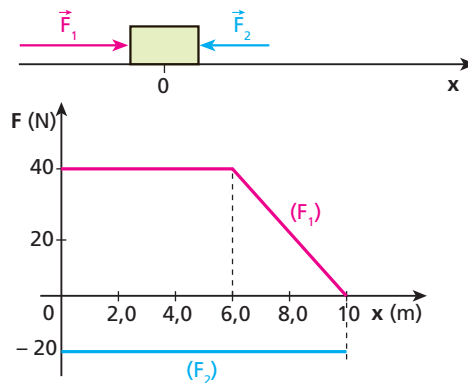
76. (UFU-MG – mod.) Um menino e seu *skate*, considerados uma única partícula, deslizam numa pista construída para esse esporte, como representado na figura abaixo. A parte plana e horizontal da pista mede 2,0 m e o menino parte do repouso do ponto **A**, cuja altura, em relação à base, é de 1,0 m. Considerando-se que há atrito somente na parte plana da pista e que o coeficiente de atrito cinético é 0,20, indique a alternativa correta.

a) O menino irá parar no ponto médio da parte plana **BC**.
b) Na primeira descida, o menino consegue atingir o ponto **D**.
c) O menino irá parar no ponto **C**, no final da parte plana da pista.
d) A energia mecânica dissipada até que o conjunto pare é maior que a energia potencial que o sistema possuía no ponto de partida.
e) O menino irá parar no ponto **B**, no início da parte plana da pista.

77. (Mack-SP) Um bloco de peso igual a 10 N parte do repouso e sobe a rampa indicada na figura 1 mediante a aplicação da força $\vec{F}$, de direção constante e cuja intensidade varia com a abscissa **x**, de acordo com o gráfico da figura 2. O trabalho de **O** até **A** realizado pelo atrito existente entre o bloco e a rampa é igual a 10 J, em valor absoluto. Adote $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Nessas condições, a velocidade do bloco, ao atingir o ponto culminante **A**, é igual a:

a) $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
b) $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
c) $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
d) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
e) $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

78. Uma partícula de massa m = 10 kg acha-se em repouso na origem do eixo Ox, quando passa a agir sobre ela uma força resultante $\vec{F}$, paralela ao eixo. De x = 0 a x = 4,0 m, a intensidade de $\vec{F}$ é constante, de modo que F = 120 N. De x = 4,0 m em diante, $\vec{F}$ adquire intensidade que obedece à função:

$$F = 360 - 60x \text{ (SI)}$$

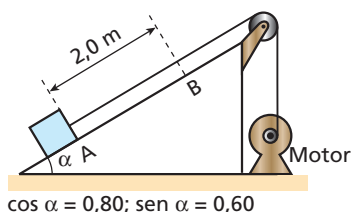
a) Trace o gráfico da intensidade de $\vec{F}$ em função de **x**.
b) Determine a velocidade escalar da partícula no ponto de abscissa x = 7,0 m.

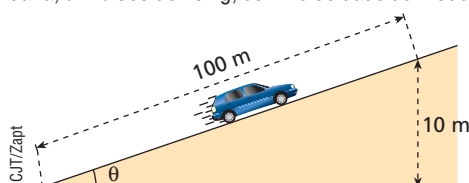
79. O bloco da figura tem 2,8 kg de massa e parte do repouso, na origem do eixo Ox. Sobre ele, agem exclusivamente as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ representadas, cujos valores algébricos variam em função de **x**, conforme o gráfico a seguir:

Sabendo que $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são suprimidas na posição x = 10 m, determine a máxima velocidade escalar atingida pelo bloco.

80. (UFPR) Uma bomba de potência teórica 2,0 cv é usada para retirar água de um poço de 15 m de profundidade, a fim de encher um reservatório de 500 L. Supondo desprezível a velocidade da água no ponto mais alto da sua trajetória, calcule em quanto tempo o reservatório estará cheio.
Dados: 1,0 cv = 735 W; g = 9,8 m/s²; densidade da água = 1,0 kg/L.

81. (UnB-DF) Um automóvel de massa **m** é acelerado uniformemente pelo seu motor. Sabe-se que ele parte do repouso e atinge a velocidade v_0 em t_0 segundos. Então, a potência que o motor desenvolve após transcorridos **t** segundos da partida é:

a) $\frac{m\, v_0^2}{2\, t_0^3}\, t^2$ b) $\frac{m\, v_0^2}{t_0^2}\, t$ c) $\frac{m\, v_0^2}{t^2}\, t_0$ d) $\frac{2m\, v_0^2}{t_0^2}\, t$

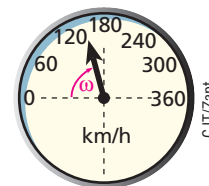
82. (Mack-SP) O motor da figura leva o bloco de 10 kg da posição **A** para a posição **B**, com velocidade constante, em 10 s. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado é 0,50. Adote g = 10 m/s².

Qual a potência útil do motor nesse deslocamento?

83. (Fuvest-SP) Nos manuais de automóveis, a caracterização dos motores é feita em cv (cavalo-vapor). Essa unidade, proposta no tempo das primeiras máquinas a vapor, correspondia à capacidade de um cavalo típico, que conseguia erguer, na vertical, com auxílio de uma roldana, um bloco de 75 kg, com velocidade de módulo 1,0 m/s.

Para subir uma ladeira com aclive de 10%, como a da figura, um carro de 1 000 kg, mantendo uma velocidade constante de módulo 15 m/s (54 km/h), desenvolve uma potência útil que, em cv, é, aproximadamente, de:
(Adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.)
a) 20.
b) 40.
c) 50.
d) 100.
e) 150.

84. (Fuvest-SP) Trens de alta velocidade, chamados trens-bala, deverão estar em funcionamento no Brasil nos próximos anos. Características típicas desses trens são: velocidade máxima de 300 km/h, massa total (incluindo 500 passageiros) de 500 t e potência máxima dos motores elétricos igual a 8,0 MW. Nesses trens, as máquinas elétricas que atuam como motores também podem ser usadas como geradores, freando o movimento (freios regenerativos). Nas ferrovias, curvas circulares têm raio de curvatura de, no mínimo,5,0 km. Considerando-se um trem e uma ferrovia com essas características, determine:

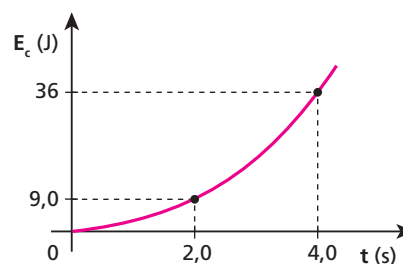
> **Note e adote:**
> 1 t = 1000 kg
> Desconsidere o fato de que, ao partir, os motores demoram alguns segundos para atingir sua potência máxima. Desconsidere o efeito de forças dissipativas.
> Admita que o movimento ocorra em um plano horizontal.

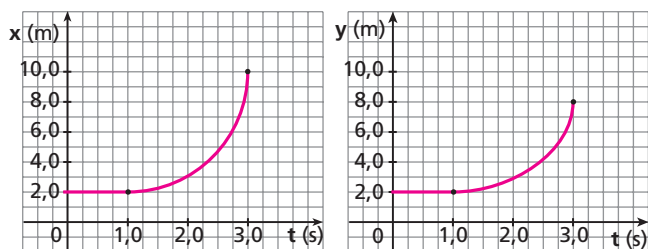
a) O tempo necessário para o trem atingir a velocidade de módulo 288 km/h, a partir do repouso, supondo-se que os motores forneçam a potência máxima o tempo todo. Admita que o trem se deslocou em linha reta.
b) A intensidade da força máxima na direção horizontal, entre cada roda e o trilho, numa curva circular percorrida a 288 km/h, supondo-se que o trem tenha **80** rodas e que as forças entre cada uma delas e o trilho tenham a mesma intensidade. Admita que todas as rodas estejam na curva.
c) O módulo da aceleração tangencial do trem quando, na velocidade de módulo 288 km/h, as máquinas elétricas são acionadas como geradores de 8,0 MW de potência, freando o movimento.

85. (Fuvest-SP) Um carro de corrida, com massa total m = 800 kg, parte do repouso e, com aceleração constante, atinge, após 15 segundos, a velocidade de 270 km/h (ou seja, 75 m/s). A figura representa o velocímetro, que indica a velocidade instantânea do carro. Despreze as perdas por atrito e as energias cinéticas de rotação (como a das rodas do carro). Suponha que o movimento ocorre numa trajetória retilínea e horizontal.

a) Qual a velocidade angular ω do ponteiro do velocímetro durante a aceleração do carro? Indique a unidade usada.
b) Qual o valor do módulo da aceleração do carro nesses 15 segundos?
c) Qual o valor da componente horizontal da força que a pista aplica ao carro durante sua aceleração?
d) Qual a potência fornecida pelo motor quando o carro está a 180 km/h?

Para raciocinar um pouco mais

86. Considere dois recipientes cilíndricos (1) e (2) feitos de material de espessura e peso desprezíveis. Os recipientes têm raios $R_1 = r$ e $R_2 = 2r$ e estão apoiados sobre duas prateleiras desniveladas por 1,0 m.
O recipiente (2), inicialmente vazio, está na prateleira superior, enquanto o recipiente (1), que contém 2,0 L de água até a altura de 40 cm em relação à parede do fundo, está apoiado na prateleira inferior. Um garoto pega o recipiente (1), ergue-o e despeja seu conteúdo no recipiente (2).
Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade da água igual a 1,0 kg/L, calcule o trabalho motor realizado sobre a água no transporte do recipiente (1) para o recipiente (2).

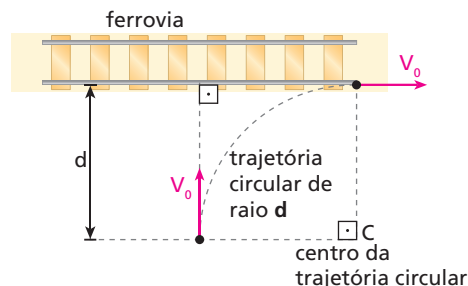
87. Uma partícula de massa igual a 2,0 kg está em movimento retilíneo uniformemente acelerado sob a ação de uma força resultante $\vec{F}$. A energia cinética da partícula é dada em função do tempo pelo gráfico ao lado:

a) Qual a intensidade da força $\vec{F}$?
b) Qual o deslocamento da partícula no intervalo de 2,0 s a 4,0 s?

88. Considere uma partícula de massa igual a 8,0 kg inicialmente em repouso num ponto **A** de um plano horizontal. A partir do instante $t_1 = 1,0$ s, essa partícula é deslocada até um ponto **B** do mesmo plano, sob a ação de uma força resultante $\vec{F}$, lá chegando no instante $t_2 = 3,0$ s.
Nos gráficos a seguir, estão registradas as variações das coordenadas de posição **x** e **y** da partícula em função do tempo. Os trechos curvos são arcos de parábola.

Pede-se:
a) esboçar, num diagrama yx, o deslocamento vetorial da partícula de **A** até **B**, destacando o seu módulo;
b) calcular o trabalho da força $\vec{F}$ de **A** até **B**, bem como a intensidade dessa força.

89. Um dublê deverá gravar uma cena de um filme de ação na qual tiros serão disparados contra ele, que estará mergulhando nas águas de um lago profundo, descrevendo uma trajetória horizontal. Os projéteis serão expelidos com velocidade de intensidade V_0 e realizarão movimentos verticais a partir de uma altura **H** em relação à superfície líquida. No local, a aceleração da gravidade tem módulo **g** e a influência do ar é desprezível. Admitindo-se que dentro d'água a força total de resistência que cada projétil recebe durante a penetração tem intensidade constante e igual ao triplo do seu peso, determine, em função de **H**, V_0 e **g**, a profundidade segura **p** em que o dublê deverá se deslocar para não ser atingido por nenhum projétil.

90. (Olimpíada Brasileira de Física) Cintos de segurança e *air bags* salvam vidas ao reduzir as forças exercidas sobre o motorista e os passageiros em uma colisão. Os carros são projetados com uma "zona de enrugamento" na metade frontal do veículo. Se ocorrer uma colisão, o compartimento dos passageiros percorre uma distância de aproximadamente 1,0 m enquanto a frente do carro é amassada. Um ocupante restringido pelo cinto de segurança e pelo *air bag* desacelera junto com o carro. Em contraste, um ocupante que não usa tais dispositivos restringentes continua movendo-se para frente, com o mesmo módulo da velocidade (primeira Lei de Newton!), até colidir violentamente com o painel ou o para-brisa. Como estas são superfícies resistentes, o infeliz ocupante, então, desacelera em uma distância de apenas 5,0 mm. Para um dado valor de velocidade inicial do carro, indiquemos por F_1 a intensidade da força que freia a pessoa quando ela não está usando cinto de segurança e o carro não dispuser de *air bag* e por F_2 a intensidade de força que freia a pessoa no carro em que ela dispõe dos dois dispositivos de segurança. A razão F_1/F_2 vale:

a) 1 b) 10 c) 20 d) 100 e) 200

91. Um motorista trafega com velocidade de intensidade V_0, perpendicularmente a uma ferrovia retilínea contida numa região plana e horizontal, quando escuta o apito de um trem em iminente passagem diante do seu veículo. Ele, então, percebe que há duas maneiras de evitar uma colisão com o comboio:
Providência 1: frear o carro imediatamente, com as quatro rodas travadas mantendo a trajetória retilínea original, com desaceleração constante, fazendo o veículo parar exatamente diante da linha férrea. Nesse caso, o coeficiente de atrito dinâmico entre os pneus e o solo é igual μ_c, e a distância percorrida é **d**.
Providência 2: fazer uma curva circular de raio **d** para a direita, com velocidade de intensidade V_0, de modo a tangenciar a linha férrea. Nesse caso, o carro fica na iminência de derrapar e o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o solo é igual a μ_e.
As duas situações estão esquematizadas na figura abaixo.

Desprezando-se a influência do ar e adotando-se para o carro o modelo de ponto material, determine a relação μ_c/μ_e.

92. Considere uma melancia que, em seu processo de crescimento, mantém permanentemente o formato esférico. Suponha que esse processo seja isotrópico, isto é, o crescimento ocorra igualmente em todas as direções. Um elástico de extremidades conectadas e constante elástica $5,0 \cdot 10^2$ N/m é colocado em volta da superfície externa da fruta, ao longo da circunferência de maior diâmetro, em um momento em que o raio é de 10 cm, assim permanecendo até o raio aumentar para 12 cm. Desprezando-se os atritos e adotando-se $\pi = 3$, calcule durante essa etapa:
a) O trabalho das forças elásticas sobre a melancia;
b) A intensidade da força média aplicada pela fruta sobre o elástico;
c) O módulo da força resultante exercida pela fruta sobre o elástico.

93. Um balde de massa igual a 800 g contendo inicialmente 20 litros de água (densidade absoluta 1,0 kg/L) é içado verticalmente a partir do solo até uma altura de 5,0 m. A operação é realizada em 20 s, com velocidade constante, num local em que $g = 10$ m/s^2, utilizando-se uma corda leve e inextensível que passa por uma polia fixa ideal. O balde, entretanto, tem uma rachadura que o faz perder água à razão de 0,08 L/s, que pode ser considerada constante ao longo do trajeto. Desprezando-se a influência do ar, determine:
a) o trabalho motor realizado sobre o balde nesse processo;
b) a potência da força de tração aplicada pela corda sobre o balde no fim dos primeiros 10 s.

94. Um carro sobe uma rampa inclinada de 30°, com velocidade constante de intensidade **v**. Nessas condições, a força de resistência do ar tem intensidade igual a um quarto do peso do carro. Em seguida, ele desce a mesma rampa com velocidade constante de intensidade 2v. Sabendo que a força de resistência do ar tem intensidade proporcional ao quadrado da velocidade do carro, responda: qual a razão entre as potências úteis desenvolvidas pelo motor na subida e na descida?

CJT/Zapt

Tópico 7

Energia mecânica e sua conservação

Bloco 1

1. Princípio da conservação — Intercâmbios energéticos

A **energia** desempenha um papel essencial em todos os setores da vida, sendo a grandeza mais importante da Física.

O Sol, a água, o vento, o petróleo, o carvão e o átomo são fontes que suprem o consumo atual de energia no mundo, mas, à medida que a população do planeta cresce e os itens de conforto à disposição da espécie humana se multiplicam, aumenta também a demanda por energia, exigindo novas alternativas e técnicas de obtenção.

Ao que tudo indica, o átomo será a principal fonte de energia do futuro. Por isso ele vem sendo objeto de estudos nos principais centros de pesquisa, que também se preocupam em investigar o aproveitamento de suas potencialidades de modo seguro e eficaz.

A energia é uma grandeza única, mas, dependendo de como se manifesta, recebe diferentes denominações:

- energia térmica;
- energia luminosa;
- energia elétrica;
- energia química;
- energia mecânica;
- energia atômica, entre outras.

Um dos preceitos mais amplos e fundamentais da Física é o **Princípio da Conservação da Energia**, segundo o qual se pode afirmar que:

> A energia total do Universo é **constante**, podendo haver apenas transformações de uma modalidade em outras.

Uma lâmpada incandescente, por exemplo, transforma energia elétrica em energia térmica. Seu filamento se aquece a tal ponto que se torna luminoso, transformando parte da energia térmica proveniente da corrente elétrica (efeito Joule) em energia luminosa.

Jason Stang/Veer/Corbis/Latinstock

Nesta fotografia, o operário corta uma peça utilizando uma máquina elétrica apropriada para esse fim. O equipamento é dotado de uma lâmina em forma de disco que gira em alta velocidade. Na operação, a energia elétrica que alimenta a máquina se transforma essencialmente em energia mecânica (a lâmina e as fagulhas produzidas pelo atrito estão em movimento), térmica (as partes que se atritam se aquecem) e acústica (há a produção de ruído).

SPL/Latinstock

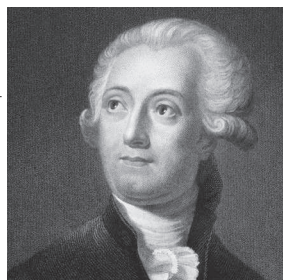
Explosão de uma bomba atômica no Atol de Bikini, no Oceano Pacífico, em 26 de março de 1954.

Na explosão de uma bomba atômica, várias formas de energia estão presentes. A energia nuclear desprendida é transformada principalmente em energia mecânica, térmica e radiante (luz visível e raios γ, que podem provocar degeneração celular nos seres vivos). Considerando o Princípio da Conservação da Energia, podemos afirmar que a soma de todas as modalidades de energia liberadas pela bomba no ato da explosão é igual à energia inicial potencializada no artefato.

Tudo teria começado com alusões à conservação da matéria. Talvez a referência mais antiga a esse respeito se deva ao poeta romano **Lucrécio**, contemporâneo de Júlio César (100 a.C.-49 a.C.). Ele escreveu em seu célebre poema *De Rerum Natura*: "[...] As coisas não podem nascer do nada, nem desaparecer voltando ao nada [...]". Passou muito tempo para que esse conceito fosse retomado e adquirisse base científica. A principal contribuição experimental foi dada pelo químico francês Antoine de **Lavoisier** (1743-1794), considerado por muitos o criador da Química Moderna. Ele escreveu em 1789:

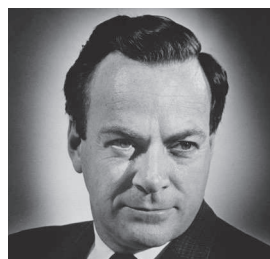
> "[...] Devemos tomar como axioma incontestável que, em todas as operações da arte e da natureza, nada é criado; a mesma quantidade de matéria existe antes e após um experimento... e nada ocorre além de mudanças e modificações nas combinações dos elementos envolvidos [...]".

O princípio de Lavoisier, denominado depois Princípio da Conservação da Massa, mostrou-se extremamente fértil no desenvolvimento da Química e da Física.

SuperStock/Diomedia

O Princípio da Conservação da Massa, de Lavoisier, pode ser assim resumido: "Na natureza, nada se cria, nada se perde, tudo se transforma".

A compreensão do conceito de energia, ocorrida definitivamente no século XIX com os experimentos do físico inglês James Prescott **Joule** (1818-1889) sobre conversões de trabalho mecânico em calor e vice-versa, deu os contornos atuais ao princípio de conservação dessa grandeza física. O físico norte-americano Richard Philips **Feynman** (1918-1988) assim se referiu ao conceito de conservação da energia:

> "[...] É importante observar que ainda hoje não sabemos o que é energia. Trata-se de uma noção que não se define de maneira ampla por meio de palavras. O que sabemos é que existe uma lei governando todos os fenômenos naturais. Não existe nenhuma exceção a essa lei, que é chamada Lei de Conservação da Energia. Ela estabelece que há uma certa quantidade, que chamamos de energia, cujo valor não se altera nas várias mudanças que ocorrem na natureza. Não se trata da descrição de mecanismo ou de qualquer coisa concreta. É uma lei abstrata porque envolve um princípio matemático. Ela exprime o fato de que, quando calculamos um certo número (o valor da energia) no início de um processo e no fim desse mesmo processo, os resultados são iguais [...]".

SPL/Latinstock

Considerado um dos maiores físicos norte-americanos, Richard Feynman foi agraciado com o Nobel de Física em 1965 por seus trabalhos em Eletrodinâmica Quântica.

Mas experimentos recentes fundamentados nas teorias do físico alemão Albert **Einstein** (1879-1955) confirmam que ocorre, sim, no Universo, a constância do conjunto massa e energia. Einstein assim se referiu a essa concepção:

> "[...] A Física pré-relativística contém duas leis de conservação cuja importância é fundamental — a Lei de Conservação da Massa e a Lei de Conservação da Energia —, em aparência, completamente independentes entre si. Por meio da Teoria da Relatividade elas se fundem em um único princípio [...]".

O processo de aniquilamento que se verifica quando se aglutinam um elétron e um pósitron — partículas elementares de massas iguais, cargas elétricas de mesmo módulo, porém de sinais contrários —, por exemplo, confirma tal afirmação. Ao se aniquilarem essas partículas "desaparecem", mas em seu lugar nota-se a presença de radiação γ (onda eletromagnética de frequência muito alta), de energia equivalente à massa de repouso das duas partículas mais a energia cinética associada a elas antes do processo.

Essa equivalência entre massa e energia é tratada com mais detalhamento em Física Moderna.

Nosso objetivo, neste capítulo, é estudar a energia mecânica que se manifesta em situações de movimento, como a de um cavalo a galope, e em casos de possíveis movimentos, como o de uma pequena bola prestes a ser lançada por uma mola comprimida.

Na figura 1, o garoto está em movimento. Em relação a um referencial no solo, ele tem energia mecânica.

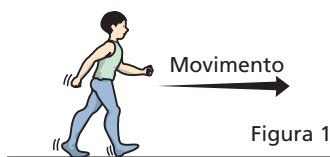



Figura 1

Na figura 2, o garoto está tentando fazer com que uma pedra role encosta abaixo. A pedra tem a potencialidade de se movimentar, apresentando, por isso, energia mecânica em relação à base da encosta.

Figura 2

A energia, da mesma forma que o trabalho, é uma grandeza de natureza **escalar**, por não ter associados a ela direção e sentido.

2. Unidades de energia

Conforme dissemos no Tópico 6 (Trabalho e potência), as unidades de energia são as mesmas do trabalho. Recordando, vimos que, no SI:

$$\text{unid. (energia)} = \text{unid. (trabalho)} = \text{joule (J)}$$

Entretanto há outras unidades de energia que, embora não pertençam a nenhum sistema oficial, foram consagradas pelo uso. Temos, por exemplo:

- **Caloria** (cal): utilizada nos fenômenos térmicos.

$$1 \text{ cal} \cong 4{,}19 \text{ J}$$

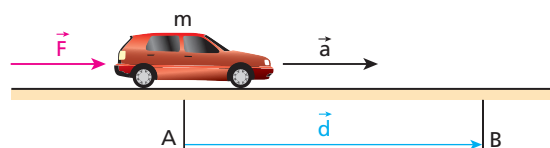
- **Quilowatt-hora** (kWh): utilizada em geração e distribuição de energia elétrica.

$$1 \text{ kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

- **Elétron-volt** (eV): utilizada nos estudos do átomo.

$$1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

3. Energia cinética

Considere a figura seguinte, em que um carrinho de massa **m** se encontra em repouso no ponto **A** do plano horizontal sem atrito. Uma pessoa empurra o carrinho, aplicando-lhe a força $\vec{F}$ indicada, constante e paralela ao plano de apoio.

Pela ação de $\vec{F}$, o carrinho adquire a aceleração $\vec{a}$, atingindo um ponto genérico *B* com velocidade $\vec{v}$. De **A** até **B** o deslocamento é $\vec{d}$.

Por estar em movimento, dizemos que o carrinho está energizado e, nesse caso, apresenta o que chamamos de **energia cinética** (E_c).

Entretanto, de onde vem essa energia? Ocorre que a partir do ponto **A** a força exercida pela pessoa passa a realizar trabalho sobre o carrinho. Esse trabalho é assimilado sob a forma de energia cinética.

Calculemos a energia cinética do carrinho em **B**:

$$E_c = \tau \quad \Rightarrow \quad E_c = F\,d \qquad \text{(I)}$$

Como $\vec{F}$ é a força resultante, a aplicação da **2ª Lei de Newton** leva-nos a:

$$F = m\,a \qquad \text{(II)}$$

De **A** até **B** o carrinho descreve movimento uniformemente variado, em que o módulo do deslocamento (**d**) pode ser calculado pela Equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Sendo $v_0 = 0$ (o carrinho partiu do repouso em **A**), vem:

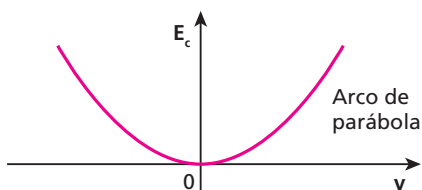
$$d = \frac{v^2}{2a} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$E_c = m\,a\,\frac{v^2}{2a}$$

Daí:

$$E_c = \frac{m\,v^2}{2}$$

A energia cinética (E_c) de uma partícula é proporcional ao quadrado de sua velocidade escalar (**v**). Graficamente, temos:

Observe que a energia cinética jamais é negativa: é **positiva** ou **nula**. Veja ainda que ela é uma grandeza relativa, pois é função da velocidade, que depende do referencial. Assim, uma única partícula pode ter, ao mesmo tempo, energia cinética nula para um referencial e não nula para outro.

Thinkstock/Getty Images

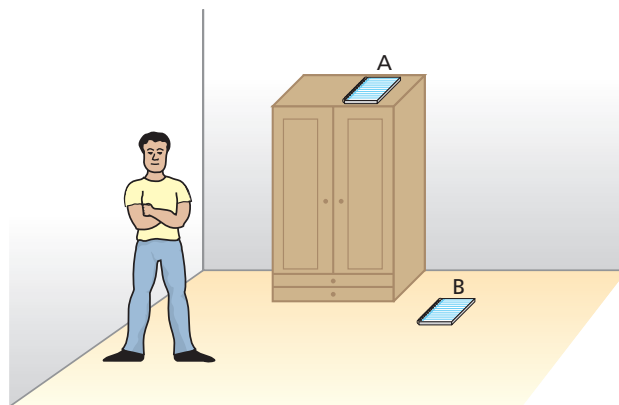
Na fotografia, um ônibus espacial norte-americano é conduzido acoplado a um avião adaptado especialmente para esse fim. Estando em repouso em relação ao avião, a espaçonave apresenta energia cinética nula em relação a ele. No entanto, em relação ao solo, ela está em movimento. Isso torna sua energia cinética não nula do ponto de vista desse outro referencial.

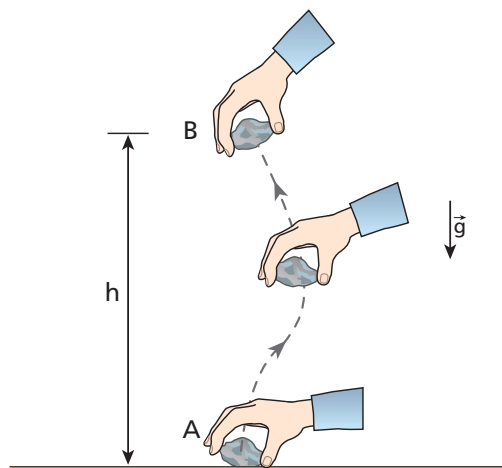
4. Energia potencial

É uma forma de energia latente, isto é, está sempre prestes a se converter em energia cinética. Na Mecânica há duas modalidades de energia potencial:

- energia potencial de gravidade;
- energia potencial elástica.

Energia potencial de gravidade (E_p)

É função da posição de um corpo em um campo gravitacional (por exemplo, o terrestre) e depende da intensidade do peso do corpo no local onde se encontra e da altura do seu centro de massa em relação a um plano horizontal de referência.

Utilizando o piso do quarto como plano horizontal de referência, o estudante poderá dizer que o caderno **A**, colocado sobre o armário, tem energia potencial de gravidade não nula, enquanto o caderno **B**, de espessura desprezível, apoiado sobre o solo, possui energia potencial de gravidade nula.

Considere a situação da figura seguinte, em que uma pessoa ergue um corpo de massa **m** da posição **A** à posição **B**. Seja **h** a altura de **B** em relação ao nível horizontal da posição **A** e **g** o módulo da aceleração da gravidade:

Pelo fato de ocupar a posição **B**, dizemos que o corpo está energizado, apresentando, em relação à posição **A**, **energia potencial de gravidade** (E_p).

De onde veio, no entanto, essa energia? Veio da pessoa que, ao erguer o corpo, exerceu uma força que realizou um trabalho assimilado pelo corpo sob a forma de energia potencial de gravidade.

Uma vez em **B** e abandonado, o corpo cai, buscando atingir o nível da posição **A**. Esse fato mostra que, em **B**, o corpo está realmente energizado, pois cai quando largado à ação da gravidade. Assim, ocorre transformação de energia potencial de gravidade em energia cinética.

Calculando a energia potencial de gravidade do corpo na posição **B**, temos:

$$E_p = \tau \qquad \text{(I)}$$

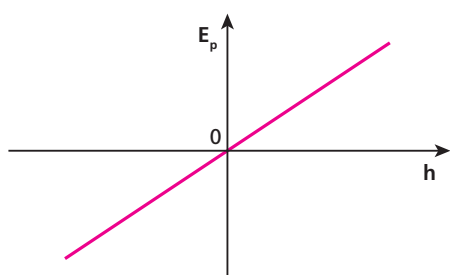
No Tópico 6 (Trabalho e potência) vimos que o trabalho motor realizado no erguimento de um corpo sem variação de energia cinética é calculado por:

$$\tau = P\,h \quad \Rightarrow \quad \tau = m\,g\,h \qquad \text{(II)}$$

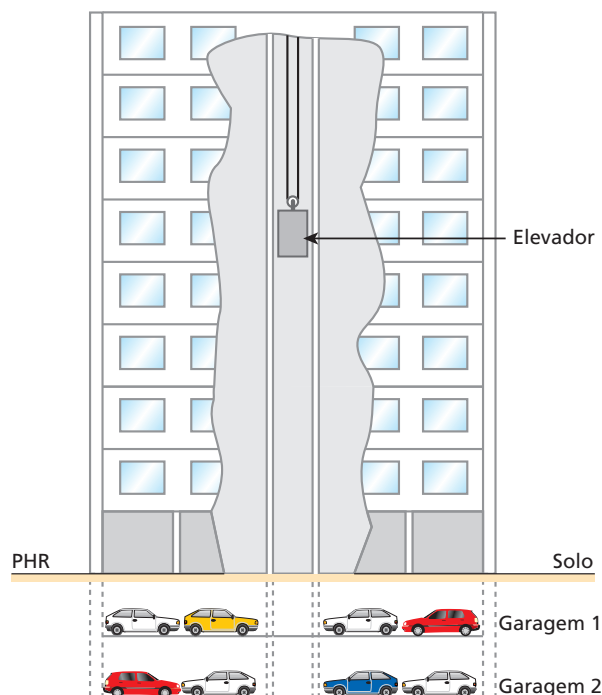
De (I) e (II), obtemos:

$$E_p = P\,h \quad \text{ou} \quad E_p = m\,g\,h$$

Devemos destacar que a energia potencial de gravidade deve ser definida em relação a um determinado **plano horizontal de referência** (**PHR**), a partir do qual são medidas as alturas. Um mesmo corpo pode ter energia potencial de gravidade positiva, nula ou negativa, dependendo do PHR adotado.

Veja a seguir a representação gráfica da variação da E_p em função de **h**.

Convém observar que valores negativos de **h** implicam valores negativos de E_p, que estão associados a posições abaixo do PHR.

Vamos agora analisar outro exemplo, em que representamos um edifício cujo elevador serve para transportar pessoas das garagens ao oitavo andar.

Consideremos o nível do solo (térreo) como plano horizontal de referência (PHR). Em relação a esse referencial, os passageiros do elevador, cujas dimensões serão admitidas desprezíveis, apresentarão energia potencial de gravidade positiva se estiverem em qualquer andar acima do solo, nula se estiverem no térreo e negativa se estiverem nas garagens 1 ou 2.

Veja o significado físico de uma energia potencial de gravidade negativa: se a energia potencial de gravidade de um corpo vale $-m\,g\,h$, deve-se realizar sobre ele um trabalho equivalente a $+m\,g\,h$ para que esse corpo chegue ao nível zero de energia potencial, isto é, ao PHR adotado.

Notas:

- A variação de energia potencial de gravidade (ΔE_p) é a diferença entre as energias potenciais final (E_{p_f}) e inicial (E_{p_i}).

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i}$$

- Se o centro de massa de um corpo sobe, então $E_{p_f} > E_{p_i}$ e $\Delta E_p > 0$.
- Se o centro de massa de um corpo desce, então $E_{p_f} < E_{p_i}$ e $\Delta E_p < 0$.
- ΔE_p **independe** do PHR adotado.

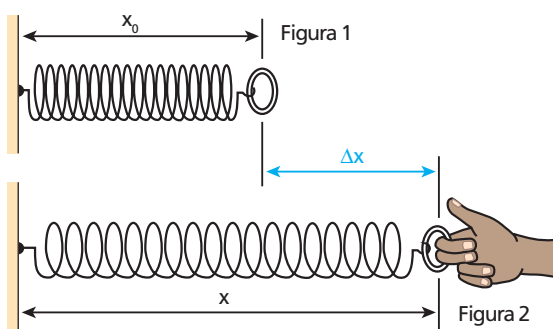
Fotografias: Cristina Xavier

Nas fotografias, uma pessoa pega um telefone sem fio que estava "deitado" sobre uma mesa e o coloca de pé. Nessa operação, o centro de massa do aparelho sofre uma elevação, de modo que ocorre uma **variação positiva** da energia potencial de gravidade.

Energia potencial elástica (E_e)

É a forma de energia que encontramos armazenada em sistemas elásticos deformados. É o caso, por exemplo, de uma mola alongada ou comprimida ou de uma tira de borracha alongada.

Vamos analisar o caso das figuras a seguir, em que temos uma mola, suposta ideal, de constante elástica **K**, fixa em uma parede e inicialmente livre de deformações (figura 1).

Um operador puxa a extremidade livre da mola, alongando-a de modo que sofra uma deformação Δx, tal que $\Delta x = x - x_0$ (figura 2).

Por estar deformada, dizemos que a mola está energizada, tendo armazenada em si **energia potencial elástica** (E_e).

De onde vem, no entanto, essa energia? Vem do operador que, ao deformar a mola, exerce sobre ela uma força que realiza um trabalho, assimilado sob a forma de energia potencial elástica.

A evidência de que a mola deformada está energizada consiste no fato de que ela pode ser usada para impulsionar objetos, dotando-lhes de energia cinética.

Vamos calcular a energia potencial elástica que a mola armazena quando deformada:

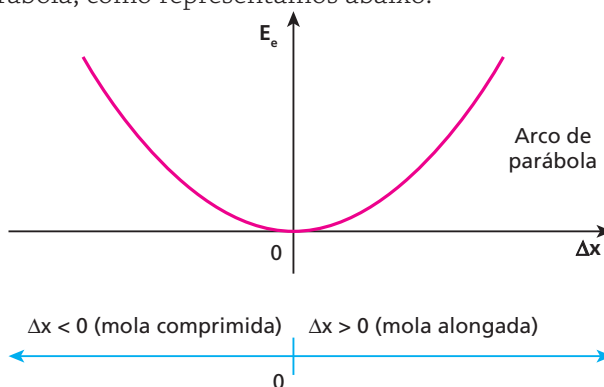
$$E_e = \tau \qquad (I)$$

O trabalho realizado pela força do operador ao deformar a mola é dado por:

$$\tau = \frac{K(\Delta x)^2}{2} \qquad (II)$$

De (I) e (II), obtemos:

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Observe que a energia potencial elástica (E_e) nunca é negativa: é **positiva** ou **nula**. Ela é diretamente proporcional ao quadrado da deformação (Δx). Assim, o gráfico E_e *versus* Δx é um arco de parábola, como representamos abaixo.

Em um arco flexionado, como o da fotografia, há energia potencial elástica (de deformação) armazenada. No ato do disparo, essa energia é transferida para a flecha, que a assimila em forma de energia cinética.

Thinkstock/Getty Images

Leitura

A poesia das equações

Na opinião do escritor e professor Michael Guillen, da Universidade de Harvard, nos Estados Unidos, cinco equações mudaram o mundo. São elas:

1. Equação de Newton para a Gravitação

$$F = G\frac{Mm}{d^2}$$

2. Equação de Bernoulli para a Hidrodinâmica

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = \text{Constante}$$

3. Equação de Faraday para a Indução eletromagnética

$$\nabla E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

4. Equação de Clausius para a Entropia total do Universo

$$\Delta S_{\text{Universo}} > 0$$

5. Equação de Einstein para a relação entre massa e energia

$$E = mc^2$$

Não cabe discutir neste momento os termos – fatores ou parcelas – ou mesmo o significado pleno envolvidos nessas expressões de aparência árida. Por enquanto, não dissecaremos esses corpos instigantes e enigmáticos. O que nos será dado dizer por ora é que as equações (ou "fórmulas") utilizadas em Física traduzem de maneira sintética o comportamento de fenômenos amplos e muitas vezes complexos. Grandes universos de conhecimento e, em certos casos, muitos anos de pesquisa são resumidos nessas verdadeiras sentenças da Natureza. Elas são a síntese conceitual que por vezes substitui laudas e laudas de linguagem corrente, escrita.

Pelo seu imenso poder de sumarização, as equações físicas se assemelham à poesia que utiliza parcas e lacônicas palavras para lançar na mente do leitor imagens magnânimas e metáforas sutis. Como na linguagem poética, busca-se a extrema sumarização, o que é conseguido em grande medida com o poder de uma ferramenta indissociável, a Matemática.

Faremos, contudo, uma exceção quanto à não descrição das equações apresentadas. Discutiremos de maneira superficial e resumida a equação de Albert **Einstein** (1879-1955), mencionada no item **5**. Ela foi publicada em 1905 quando o cientista tinha 26 anos e trabalhava como funcionário em um escritório de registro de patentes em Berna, na Suíça. Nascia naquele ano a Teoria da Relatividade Restrita, que mais tarde se desdobraria na Teoria da Relatividade Geral, mais detalhada e abrangente, a qual veio consagrar este físico teórico como um dos maiores gênios de todos os tempos.

Einstein e sua famosa equação: quase ícones *pops*.

Einstein relacionou matematicamente, de forma inusitada e harmoniosa, energia, massa e velocidade da luz no vácuo ($c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s). A expressão de Einstein transformou-se em uma "fórmula" emblemática, talvez a mais popular entre todas, aplicável aos intercâmbios entre massa e energia. Pequenas quantidades de massa podem gerar imensas quantidades de energia, como ocorre no Sol e nas demais estrelas que, por meio de fusão nuclear, transformam a matéria-prima hidrogênio em hélio mais energia radiante (radiofrequências, ondas de calor, luz visível, ultravioleta, raios X, raios γ, entre outros). É importante notar que o termo c^2 ($\cong 9{,}0 \cdot 10^{16}$ m²/s²) é um número gigantesco que amplifica de maneira extraordinária o potencial energético existente em ínfimas porções de massa. Para se ter uma ideia, uma metalúrgica que exige para operar uma quantidade de energia igual a 2 milhões de kWh por mês poderia funcionar nesse período consumindo a energia contida em apenas 0,08 g de matéria.

Selecionamos um dos artigos de Marcelo Gleiser, publicado no jornal *Folha de S.Paulo*, em 10 de maio de 2009, que aborda a importância da linguagem matemática na descrição de fenômenos físicos e do próprio Universo.

Domingo, 10 de maio de 2009
Por Marcelo Gleiser

"Será Deus um matemático?

A geometria vem de um cérebro adaptado ao mundo em que existe

O título desta coluna vem de um livro recém-lançado nos EUA, de autoria do astrofísico Mario Livio. Nele, Livio examina a origem da matemática. Será ela obra da mente humana, uma invenção? Ou será que descobrimos a matemática que já existe, uma espécie de superestrutura conceitual que define o Universo e suas leis? Os que acreditam que seja esse o caso gostam da metáfora (atenção!) de que a matemática é a expressão da mente de Deus: Deus é o grande geômetra, o arquiteto universal.

O grande físico teórico Eugene Wigner, que ganhou o Prêmio Nobel pelos seus estudos das simetrias matemáticas que regem o comportamento atômico, achava a eficácia da matemática na descrição dos fenômenos naturais surpreendente. Por que ela funciona tão bem a ponto de nos permitir prever coisas que nem sabíamos que poderiam existir? Por exemplo, quando o escocês James Clerk Maxwell mostrou que todos os fenômenos elétricos e magnéticos podem ser descritos por apenas quatro equações, não poderia imaginar que dessa união viria a descoberta de que a luz é uma onda eletromagnética e que outras existem, invisíveis aos nossos olhos, como os raios X ou as micro-ondas. Várias partículas elementares da matéria foram descobertas usando apenas princípios de simetria. Será que a natureza é mesmo uma estrutura matemática?

Joseph Mehling

Marcelo **Gleiser**, nascido no Rio de Janeiro em 19 de março de 1959, é físico, astrônomo, professor e roteirista. É conhecido nos Estados Unidos por suas pesquisas e, no Brasil, por suas colunas de divulgação científica.

Livio descreve argumentos a favor dessa hipótese e contra ela, optando por uma solução de compromisso: parte é descoberta e parte inventada.

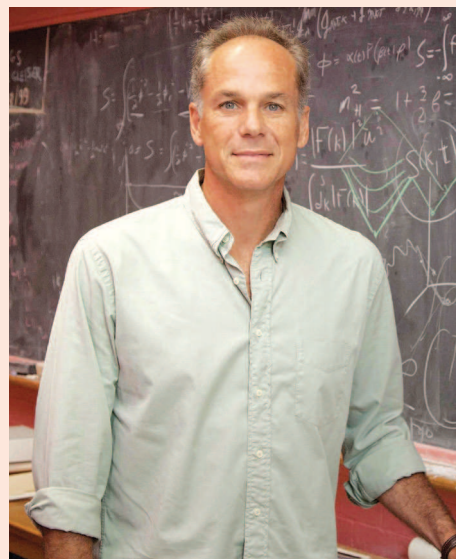
A favor, ele mostra como, de fato, a matemática tem uma permanência diversa das ciências naturais: um teorema matemático, uma vez demonstrado, é correto para sempre. Já em física ou química, explicações que parecem razoáveis numa época às vezes se provam erradas, ou aproximações de explicações mais sofisticadas.

Será, então, que uma civilização extraterrestre redescobriria os mesmos resultados matemáticos do que nós, como se fossem uma espécie de código da natureza? Pitágoras, Platão, Galileu, Newton, Einstein, muitos matemáticos (mas não todos) e os físicos que hoje trabalham em teorias de supercordas diriam que sim. Talvez mudem os símbolos, mas a essência dos resultados seria a mesma.

Um astrofísico do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), Max Tegmark, chega a afirmar que o Universo é matemática e que infinitos outros universos existem, replicando todas as combinações lógicas e geométricas possíveis. Acho que Tegmark confundiu a ficção de Jorge Luis Borges com a realidade. Sua posição é, para mim, religiosa.

Não há dúvida de que certos resultados matemáticos, como $2 + 2 = 4$, são verdadeiros independentemente de como sejam descritos. Mesmo assim, vou além de Livio e afirmo que a matemática é uma invenção humana, uma linguagem criada para descrever a nossa realidade. Somos produtos de milhões de anos de evolução, adaptados ao mundo em que vivemos.

Na superfície da Terra vemos árvores, pedras e animais, unidades que naturalmente definem os números inteiros, que usamos para contar. No céu vemos estrelas e imaginamos constelações. Uma criatura marinha inteligente e solitária, vivendo nas profundezas e sem luz ou outras formas de vida por perto, provavelmente desenvolveria uma outra matemática.

Nossa geometria descreve aproximadamente as formas que vemos à nossa volta; esferas, quadrados, cubos, círculos, linhas. Ela vem de um cérebro adaptado ao mundo em que existe. Se uma civilização extraterrestre tiver desenvolvido linguagem equivalente, é porque existe numa realidade semelhante. O único Deus matemático é aquele que inventamos."

Exercícios

nível 1

1. Apesar das tragédias ocorridas com os ônibus espaciais norte--americanos *Challenger* e *Columbia*, que puseram fim à vida de 14 astronautas, esses veículos reutilizáveis foram fundamentais na exploração do cosmo. Admita que um ônibus espacial com massa igual a 100 t esteja em procedimento de reentrada na atmosfera, apresentando velocidade de intensidade 10800 km/h em relação à superfície terrestre. Qual a energia cinética desse veículo?

2. (Fuvest-SP) A equação da velocidade de um móvel de 20 quilogramas é dada por $v = 3{,}0 + 0{,}20t$ (SI). Podemos afirmar que a energia cinética desse móvel, no instante $t = 10$ s, vale:

a) 45 J
b) $1{,}0 \cdot 10^2$ J
c) $2{,}0 \cdot 10^2$ J
d) $2{,}5 \cdot 10^2$ J
e) $2{,}0 \cdot 10^3$ J

3. E.R. Uma partícula **A** tem massa **M** e desloca-se verticalmente para cima com velocidade de módulo **v**. Uma outra partícula **B** tem massa 2M e desloca-se horizontalmente para a esquerda com velocidade de módulo $\frac{v}{2}$. Qual a relação entre as energias cinéticas das partículas **A** e **B**?

Resolução:

A energia é uma grandeza física escalar. Por isso, não importam as orientações dos movimentos das partículas **A** e **B**.

A energia cinética de uma partícula é calculada por:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

Para a partícula **A**, temos: $E_{c_A} = \frac{Mv^2}{2}$ (I)

Para a partícula **B**:

$$E_{c_B} = \frac{2M\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow E_{c_B} = \frac{2Mv^2}{8} \quad \text{(II)}$$

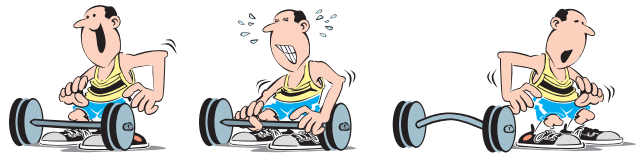
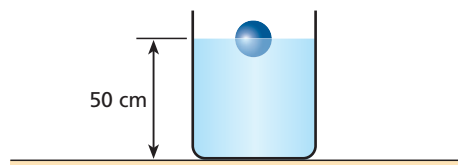
Dividindo (I) por (II), obtemos:

$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = \frac{\frac{M\,v^2}{2}}{\frac{2M\,v^2}{8}} \Rightarrow \boxed{\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = 2}$$

4. Três corpos, **A**, **B** e **C**, têm as características indicadas na tabela a seguir. Sendo E_A, E_B e E_C, respectivamente, as energias cinéticas de **A**, **B** e **C**, aponte a alternativa correta:

a) $E_A = E_B = E_C$
b) $E_A = 2E_B = 4E_C$
c) $E_B = 2E_A = 4E_C$
d) $E_C = 2E_A = 4E_B$
e) $E_A = E_B = 8E_C$

	A	B	C
Massa	M	$\frac{M}{2}$	2M
Velocidade escalar	v	2v	$\frac{v}{2}$

5. (Efomm-RJ) Se o nosso amigo da figura a seguir conseguisse levantar o haltere de massa igual a 75 kg a uma altura de 2,0 m, em um local onde $g = 10\ m \cdot s^{-2}$, qual a energia potencial que ele estaria transferindo para o haltere?

6. No esquema da figura, a esfera de massa 1,0 kg é homogênea e flutua na água com 50% do seu volume submerso:

Sabendo que, no local, a aceleração da gravidade vale 9,8 m/s², calcule a energia potencial de gravidade da esfera:

a) em relação à superfície livre da água;
b) em relação ao fundo do recipiente.

7. Uma pequena pedra de massa 2,0 kg acha-se no fundo de um poço de 10 m de profundidade. Sabendo que, no local, a aceleração da gravidade tem módulo 10 m/s², indique a alternativa que traz o valor correto da energia potencial de gravidade da pedra em relação à borda do poço.

a) $-2{,}0 \cdot 10^2$ J
b) $2{,}0 \cdot 10^2$ J
c) -20 J
d) 20 J
e) Nenhuma das anteriores.

8. Um garoto chuta uma bola de massa 400 g que, em determinado instante, tem velocidade de 72 km/h e altura igual a 10 m em relação ao solo. Adotando $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$ e considerando um referencial no solo, aponte a alternativa que traz os valores corretos da energia cinética e da energia potencial de gravidade da bola no instante considerado.

	Energia cinética (joules)	Energia potencial (joules)
a)	40	40
b)	80	40
c)	40	80
d)	80	80
e)	20	60

9. Tracionada com 800 N, certa mola helicoidal sofre distensão elástica de 10 cm. Qual a energia potencial armazenada na mola quando deformada de 4,0 cm?

Exercícios

nível 2

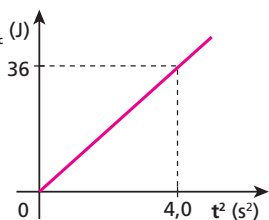
10. Em dado instante, a energia cinética de um pássaro em voo:
a) pode ser negativa.
b) depende do referencial adotado, sendo proporcional à massa do pássaro e ao quadrado de sua velocidade escalar.
c) é proporcional à altura do pássaro em relação ao solo.
d) depende da aceleração da gravidade.
e) tem a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade vetorial do pássaro.

11. Um corpo de massa **m** e velocidade $\vec{v}_0$ possui energia cinética E_0. Se o módulo da velocidade aumentar em 20%, a nova energia cinética do corpo será:
a) $1{,}56E_0$ b) $1{,}44E_0$ c) $1{,}40E_0$ d) $1{,}20E_0$ e) $1{,}10E_0$

12. A massa da Terra vale $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, aproximadamente. Se sua velocidade orbital tem intensidade média igual a 30 km/s, a ordem de grandeza da energia cinética média do planeta, em joules, é:
a) 10^{30} b) 10^{33} c) 10^{35} d) 10^{38} e) 10^{40}

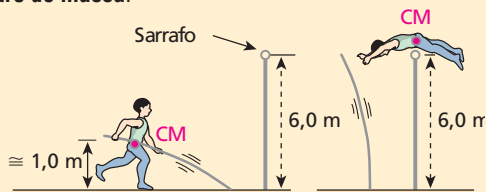
13. (Unip-SP) Uma partícula de massa 2,0 kg, em trajetória retilínea, tem energia cinética (E_c) variando com o quadrado do tempo (t^2) de acordo com o gráfico ao lado.

E_c (J); 36; 0; 4,0; t^2 (s^2)

A força resultante na partícula:
a) é variável.
b) tem intensidade igual a 3,0 N.
c) tem intensidade igual a 6,0 N.
d) tem intensidade igual a 9,0 N.
e) tem intensidade igual a 72 N.

14. Um elevador, juntamente com sua carga, tem massa de 2,0 toneladas. Qual é a potência de dez que melhor expressa o acréscimo de energia potencial de gravidade do elevador – dado em joules – quando este sobe do terceiro ao sétimo andar?
a) 10^1 b) 10^5 c) 10^9 d) 10^{13} e) 10^{17}

15. E.R. Um atleta de massa igual a 60 kg realiza um salto com vara, transpondo o sarrafo colocado a 6,0 m de altura. Calcule o valor aproximado do acréscimo da energia potencial de gravidade do atleta nesse salto. Adote $g = 10$ m/s².

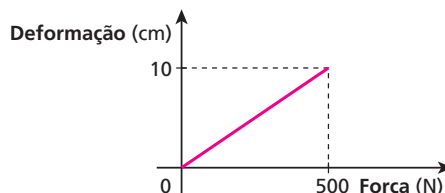
Resolução:

No caso, o atleta é um **corpo extenso** (dimensões não desprezíveis) e, por isso, deve-se raciocinar em termos do seu **centro de massa**.

Sendo $m = 60$ kg, $g = 10$ m/s² e a elevação do centro de massa do atleta $\Delta h \cong 5{,}0$ m, calculemos o acréscimo de energia potencial de gravidade (ΔE_p).

$$\Delta E_p = m\,g\,\Delta h$$

$$\Delta E_p = 60 \cdot 10 \cdot 5{,}0 \text{ (J)} \Rightarrow \boxed{\Delta E_p = 3{,}0 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

16. (Mack-SP) Uma bola de borracha de massa 1,0 kg é abandonada da altura de 10 m. A energia perdida por essa bola ao se chocar com o solo é 28 J. Supondo $g = 10$ m/s², a altura máxima atingida pela bola após o choque com o solo será de:
a) 7,2 m b) 6,8 m c) 5,6 m d) 4,2 m e) 2,8 m

17. A deformação em uma mola varia com a intensidade da força que a traciona, conforme o gráfico abaixo:

Determine:
a) a constante elástica da mola, dada em N/m;
b) a intensidade da força de tração quando a deformação da mola for de 6,0 cm;
c) a energia potencial elástica armazenada na mola quando esta estiver deformada de 4,0 cm.

18. E.R. Um bloco de peso **P** é dependurado na extremidade livre de uma mola vertical de constante elástica **K**. Admitindo o sistema em equilíbrio, calcule:
a) a distensão da mola;
b) a energia potencial elástica armazenada na mola.

Resolução:

a) Na situação de equilíbrio, o peso ($\vec{P}$) do bloco é equilibrado pela força elástica exercida pela mola ($\vec{F}_e$).

$$F_e = P \Rightarrow K\,\Delta x = P$$

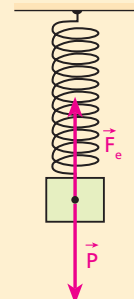
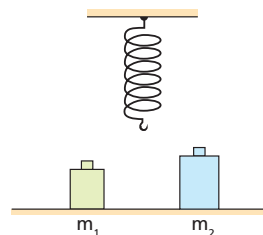
$\vec{F}_e$; $\vec{P}$

Então:

$$\boxed{\Delta x = \frac{P}{K}}$$

b) A energia potencial elástica armazenada na mola é, então, determinada por:

$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2} \Rightarrow E_e = \frac{K}{2}\left(\frac{P}{K}\right)^2$$

Logo: $$\boxed{E_e = \frac{P^2}{2K}}$$

19. (UFPE) Duas massas, $m_1 = 2{,}0$ kg e $m_2 = 4{,}0$ kg, são suspensas sucessivamente em uma mesma mola vertical. Se U_1 e U_2 são, respectivamente, as energias elásticas armazenadas na mola quando as massas m_1 e m_2 foram penduradas e $U_1 = 2{,}0$ J, qual o valor de U_2?

Bloco 2

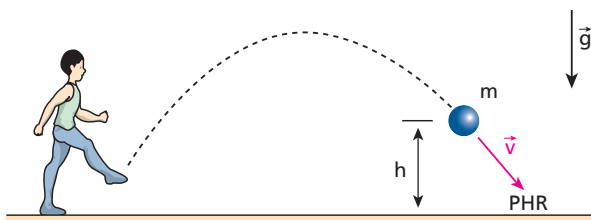
5. Cálculo da energia mecânica

Calculamos a energia mecânica (E_m) de um sistema adicionando a energia cinética à energia potencial, que pode ser de gravidade ou elástica:

$$E_m = E_{cinética} + E_{potencial}$$

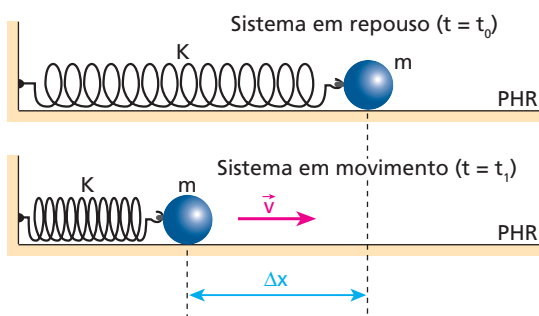
Observe os exemplos a seguir, em que mostramos o cálculo em cada caso:

Exemplo 1:

Um jogador chuta uma bola de massa **m**, que descreve a trajetória indicada. No instante da figura, a velocidade da bola é $\vec{v}$ e sua altura em relação ao solo (PHR) é **h**.

Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, a energia mecânica da bola no instante considerado é calculada por:

$$E_m = \frac{m\,v^2}{2} + m\,g\,h$$

Exemplo 2:

Uma partícula de massa **m** oscila horizontalmente, em condições ideais, ligada a uma mola leve, de constante elástica **K**.

No instante $t = t_1$ indicado na figura, a velocidade da partícula é $\vec{v}$, e a energia mecânica do sistema massa–mola é calculada por:

$$E_m = \frac{m\,v^2}{2} + \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Randy Faris/Corbis/Latinstock

Na fotografia, um atleta realiza um salto com vara. Em determinado instante de sua ascensão, ainda durante o contato com a vara envergada, a energia mecânica do sistema atleta-vara em relação ao solo é composta de três parcelas: energia cinética, energia potencial de gravidade e energia elástica de deformação.

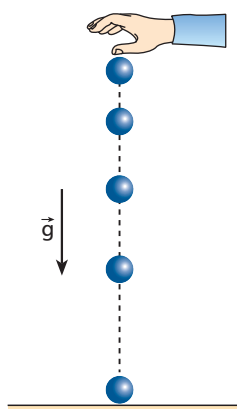
6. Sistema mecânico conservativo

Sistema mecânico conservativo é todo aquele em que as forças que realizam trabalho transformam **exclusivamente** energia potencial em energia cinética e vice-versa. É o que ocorre com as forças de gravidade, elásticas e eletrostáticas que, por sua vez, são denominadas **forças conservativas**.

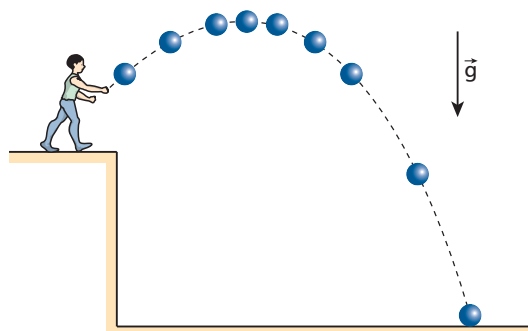
As forças de atrito, de resistência viscosa – exercidas pelos líquidos em corpos movendo-se em seu interior – e de resistência do ar transformam energia mecânica em outras formas de energia, principalmente térmica. Essas forças são denominadas **forças dissipativas**.

Podemos dizer, então, que um sistema mecânico só é conservativo quando o trabalho é realizado **exclusivamente por forças conservativas**. Vejamos alguns exemplos:

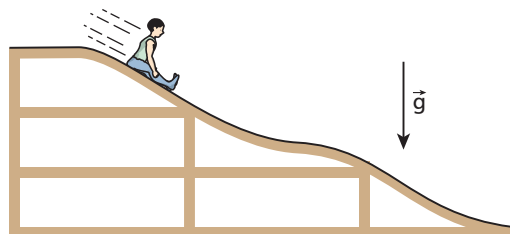
Exemplo 1:

Uma partícula cai em movimento vertical sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre:

Nesse caso, a única força que realiza trabalho sobre a partícula é a da gravidade, que é uma força conservativa.

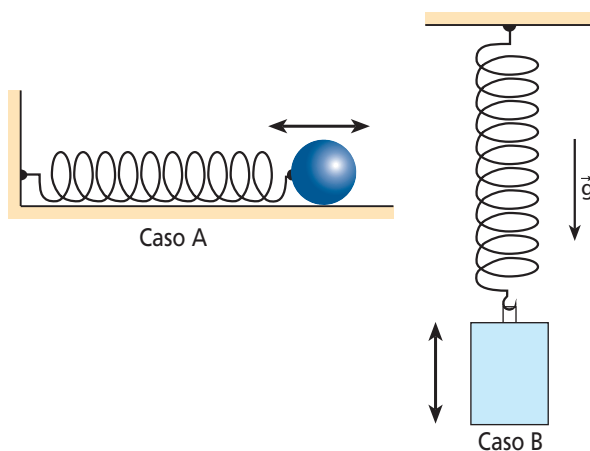
Exemplo 2:

Uma partícula é lançada obliquamente, ficando sob a ação exclusiva do campo gravitacional terrestre:

Também, nesse caso, a única força que realiza trabalho é a da gravidade, que é uma força conservativa.

Exemplo 3:

Um garoto desce por um tobogã praticamente sem atrito, movimentando-se sem sofrer a influência do ar:

Como o atrito e a influência do ar foram desprezados e a força normal não realiza trabalho, o único trabalho a considerar é o da força peso, que é uma força conservativa.

Exemplo 4:

Uma partícula, presa a uma mola leve e elástica, oscila sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar:

No caso **A**, somente a força elástica (conservativa) realiza trabalho. No caso **B**, duas forças conservativas realizam trabalho: a força elástica e a força peso.

Por um fio!

Dennis Cox/Age Fotostock/Grupo Keystone

Um esporte radical que exige do praticante muita técnica e precaução é o *bungee-jump*. Uma pessoa devidamente atada à extremidade de uma corda elástica específica para esse fim, sob os cuidados de monitores especializados, projeta-se a partir de uma plataforma elevada, despencando em um voo que termina em grandes oscilações. Desprezando-se a influência do ar, apenas a força peso e a força elástica realizam trabalho, o que caracteriza o conjunto pessoa-corda como um sistema conservativo.

7. Princípio da Conservação da Energia Mecânica

Trata-se de uma aplicação particular do Princípio da Conservação da Energia em sistemas mecânicos. Seu enunciado é:

> Em um sistema mecânico conservativo, a energia mecânica total é sempre **constante**.

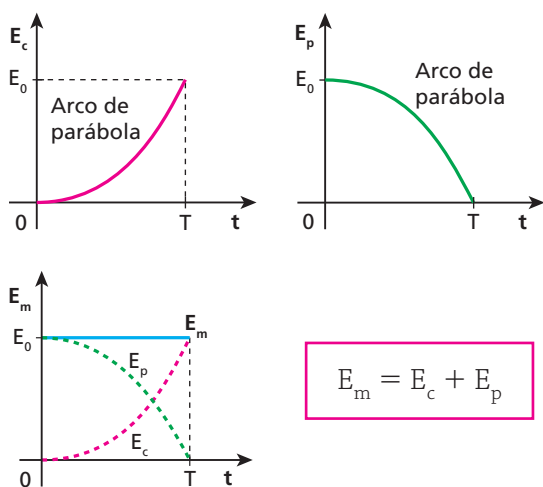
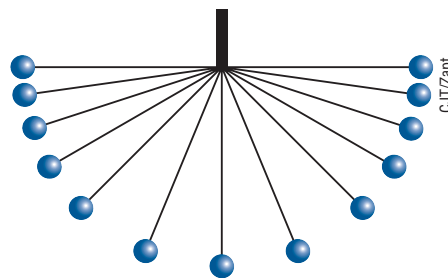
$$E_m = E_{cinética} + E_{potencial} \Rightarrow \textbf{constante}$$

Concluímos, então, que qualquer aumento de energia cinética observado nesse sistema ocorre a partir de uma redução igual de energia potencial (de gravidade ou elástica) e vice-versa.

Tomemos, por exemplo, uma partícula em queda livre nas vizinhanças da superfície terrestre. Temos, aí, um sistema mecânico conservativo, no qual deve permanecer constante a energia mecânica.

De fato, durante a queda livre, a energia cinética da partícula aumenta, enquanto a energia potencial de gravidade diminui na mesma quantidade. Isso faz com que a soma da energia cinética com a energia potencial não varie, de modo que a energia mecânica permaneça sempre constante.

Admita que a partícula tenha iniciado sua queda no instante $t_0 = 0$, a partir do repouso. Considere **T** o tempo de queda até o solo (altura zero) e $\mathbf{E_0}$ a energia mecânica inicial.

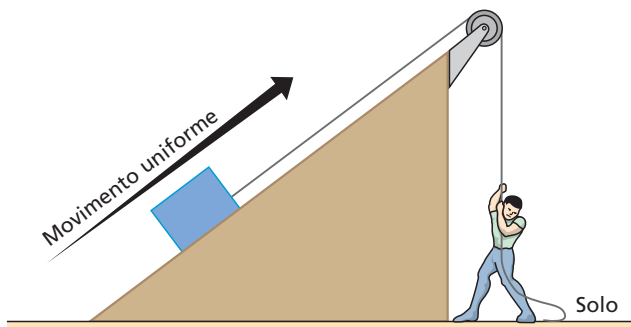
Os gráficos das energias cinética, potencial de gravidade e mecânica, em função do tempo, estão traçados a seguir:

Vejamos outro exemplo. Observe agora o caso da figura a seguir, em que um pêndulo é abandonado do repouso, iniciando movimento descendente:

Durante a descida, a energia cinética do pêndulo é crescente enquanto a potencial é decrescente. Na subida ocorre o processo inverso, isto é, enquanto a energia potencial cresce, a cinética decresce.

Não levando em conta as forças dissipativas, o movimento do pêndulo constitui um sistema conservativo, no qual a energia mecânica se mantém constante.

Troca justa: energia potencial por energia cinética

Parques aquáticos oferecem uma série de diversões emocionantes, como o toboágua da fotografia, em que as pessoas escorregam de grandes alturas por uma canaleta dotada de curvas e ondulações. Em razão dos atritos e da resistência do ar, ocorrem algumas dissipações de energia mecânica, mas, se essas perdas pudessem ser desprezadas, teríamos um sistema mecânico conservativo, no qual os acréscimos de energia cinética ocorreriam à custa de iguais reduções de energia potencial.

É correto afirmar que um sistema mecânico não conservativo sempre é dissipativo? A resposta é *não*, como exemplifica a situação a seguir.

Na figura abaixo, um homem ergue um bloco apoiado sobre um plano inclinado, perfeitamente liso, utilizando uma corda e uma polia ideais.

Suponhamos que o bloco se desloque em **movimento uniforme**.

Podemos afirmar que a energia cinética do bloco se mantém constante ao longo da rampa. À medida que o bloco sobe, porém, sua altura em relação ao solo aumenta, provocando também um aumento na respectiva energia potencial de gravidade.

A energia cinética constante, somada à energia potencial crescente, determina uma **energia mecânica total crescente**, o que caracteriza um sistema **não conservativo**.

Esse aumento da energia mecânica do sistema é proveniente do trabalho realizado pelas forças musculares (não conservativas) que o homem exerce sobre a corda.

Nesse caso, o sistema é também **não dissipativo**, já que não há forças dissipativas presentes.

Um luxo de lixo!

A sociedade de consumo está produzindo cada vez mais lixo.

Os depósitos e aterros sanitários estão abarrotados e multiplicam-se rapidamente por todo o mundo, já que a população cresce sem parar e coisas que em épocas passadas eram acondicionadas de maneira simples agora recebem camadas e mais camadas de embalagens de vidros e latas, papel e matérias plásticas.

Uma pessoa sozinha produz em média 583 g de lixo por dia. Isso significa 15 toneladas de dejetos ao longo de sua vida, estimada em 70 anos. Esse descarte equivale a 33 bois ou 18 carros populares, aproximadamente. Se pensarmos na população brasileira, o lixo produzido em um dia chega a 0,11 milhão de toneladas. A humanidade inteira, por sua vez – hoje, em número superior a 6 bilhões de seres –, joga fora 3,5 bilhões de toneladas entre um raiar de sol e o próximo.

Thinkstock/Getty Images

Veículos e máquinas especiais são utilizados para acomodar nos aterros sanitários montanhas de lixo produzidas todo dia.

Há lixo de toda espécie e em toda parte: lixo orgânico, lixo reciclável, lixo hospitalar... Há também lixo químico e lixo radioativo, ambos uma constante ameaça ao meio ambiente.

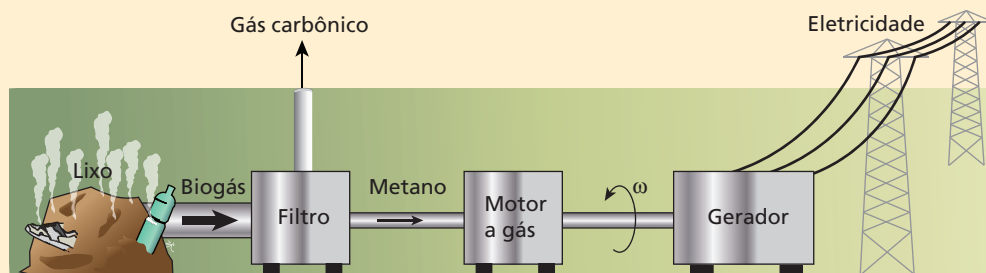
TF1-321_352_P2T7.indd 334 16/08/12 17:31

E o que fazer com tanto lixo? Onde pôr todos esses rejeitos que diariamente colocamos do lado de fora de nossas casas em quantidades cada vez maiores?

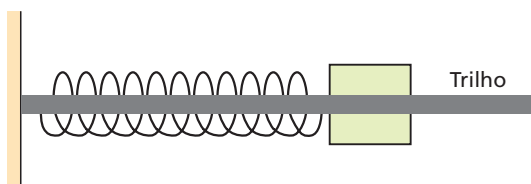
É fundamental que exista, acima de tudo, uma consciência ambiental que leve as pessoas a descartar o lixo de maneira seletiva para que cada item siga o caminho mais adequado. Papel, garrafas de vidro e de plástico, latas, pilhas, baterias, celulares obsoletos e sucata eletrônica, em geral, devem ser direcionados a coletas específicas para reciclagem.

Mas o lixo também pode ter um retorno triunfal à sociedade, sendo empregado atualmente como importante fonte de energia. As bactérias que se proliferam em lixões se alimentam da matéria orgânica lá existente e produzem o chamado biogás, uma mistura de metano e gás carbônico, principalmente.

É justamente o metano, um gás estufa que contribui bastante para o agravamento do aquecimento global, que pode ser utilizado para a produção energética. O biogás desprendido do lixo é captado por meio de drenos especiais e passa por um sistema de filtragem que separa o metano do gás carbônico. O metano é, então, direcionado para o acionamento de motores, semelhantes aos utilizados nos carros movidos a gás, que entram em operação e fazem girar eixos de geradores capazes de disponibilizar tensão suficiente para abastecer de eletricidade cidades inteiras.

Veja no esquema a seguir as etapas de captação da energia do lixo.

O biogás obtido em usinas de lixo pode suprir 15% da demanda energética brasileira. Há vários projetos para o aproveitamento dessa matéria-prima, e a transformação do lixo em energia ainda traria duas consequências benéficas: a primeira é de natureza ambiental, já que haveria uma melhor seleção e armazenagem dos resíduos que são a base de todo o processo; a segunda é de ordem política, uma vez que o não lançamento do metano diretamente na atmosfera geraria **créditos de carbono**, moeda forte que poderia favorecer o Brasil em negociações internacionais sobre mudanças climáticas, meio ambiente e sustentabilidade.

Exercícios — nível 1

20. O bloco da figura oscila preso a uma mola de massa desprezível, executando movimento harmônico simples:

A massa do bloco é de 1,0 kg, a constante elástica da mola vale $2{,}0 \cdot 10^3$ N/m e o trilho que suporta o sistema é reto e horizontal. Se no instante da figura o bloco tem velocidade de 2,0 m/s e a mola está distendida de 10 cm, qual é a energia mecânica (total) do conjunto bloco-mola em relação ao trilho?

21. Considere um sistema constituído por um homem e seu pára-quedas e admita que esse conjunto esteja descendo verticalmente com velocidade de intensidade constante. Adotando-se um referencial no solo, analise as proposições a seguir:

I. A energia cinética do sistema mantém-se constante, mas sua energia potencial de gravidade diminui.
II. O sistema é conservativo.
III. Parte da energia mecânica do sistema é dissipada pelas forças de resistência do ar, transformando-se em energia térmica.

Aponte a alternativa correta:

a) As três proposições estão corretas.
b) As três proposições estão incorretas.
c) Apenas as proposições I e II estão corretas.
d) Apenas as proposições I e III estão corretas.
e) Apenas as proposições II e III estão corretas.

22. E.R. A energia potencial de uma partícula que se desloca sob a ação exclusiva de um sistema de forças conservativas varia em função da sua posição, dada por um eixo horizontal Ox, conforme o gráfico seguinte:

Sabendo que na posição x = 0 a partícula estava em repouso, determine:

a) sua energia mecânica nas posições x = 1,0 m, x = 3,0 m e x = 7,0 m;
b) sua energia cinética nas posições x = 1,0 m, x = 3,0 m, x = 5,0 m e x = 7,0 m.

Resolução:

a) Como a partícula estava em repouso na posição x = 0, sua energia cinética era nula nesse local. Por isso, em x = 0, a energia mecânica da partícula resumia-se à potencial:

$$E_{m_0} = E_{p_0} = 500 \text{ J}$$

Considerando-se que a partícula está sujeita a um sistema de forças conservativas, podemos dizer que sua energia mecânica é constante. Assim:

$$\boxed{E_{m_{1,0}} = E_{m_{3,0}} = E_{m_{7,0}} = 500 \text{ J}}$$

b) Podemos ler diretamente no gráfico que

$$E_{p_{1,0}} = 500 \text{ J},\ E_{p_{3,0}} = 0,\ E_{p_{5,0}} = 200 \text{ J e } E_{p_{7,0}} = -300 \text{ J}.$$

Lembrando que $E_m = E_c + E_p$, segue que:

$$E_{c_{1,0}} = E_{m_{1,0}} - E_{p_{1,0}} \Rightarrow E_{c_{1,0}} = 500 \text{ J} - 500 \text{ J}$$

$$\boxed{E_{c_{1,0}} = 0}$$

$$E_{c_{3,0}} = E_{m_{3,0}} - E_{p_{3,0}} \Rightarrow E_{c_{3,0}} = 500 \text{ J} - 0$$

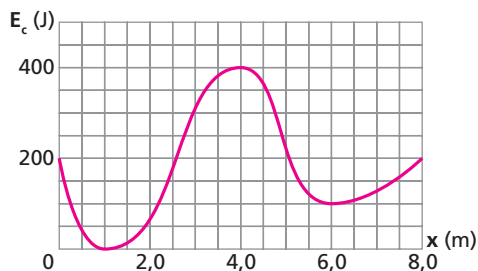
$$\boxed{E_{c_{3,0}} = 500 \text{ J}}$$

$$E_{c_{5,0}} = E_{m_{5,0}} - E_{p_{5,0}} \Rightarrow E_{c_{5,0}} = 500 \text{ J} - 200 \text{ J}$$

$$\boxed{E_{c_{5,0}} = 300 \text{ J}}$$

$$E_{c_{7,0}} = E_{m_{7,0}} - E_{p_{7,0}} \Rightarrow E_{c_{7,0}} = 500 \text{ J} - (-300 \text{ J})$$

$$\boxed{E_{c_{7,0}} = 800 \text{ J}}$$

23. (PUC-SP) O gráfico representa a energia cinética de uma partícula de massa 10 g, sujeita somente a forças conservativas, em função da abscissa **x**. A energia mecânica do sistema é de 400 J.

a) Qual a energia potencial para x = 1,0 m e para x = 4,0 m?
b) Calcule a velocidade da partícula para x = 8,0 m.

24. Um corpo movimenta-se sob a ação exclusiva de forças conservativas. Em duas posições, **A** e **B**, de sua trajetória, foram determinados alguns valores de energia. Esses valores se encontram na tabela abaixo:

	Energia cinética (joules)	**Energia potencial** (joules)	**Energia mecânica** (joules)
Posição A		800	1 000
Posição B	600		

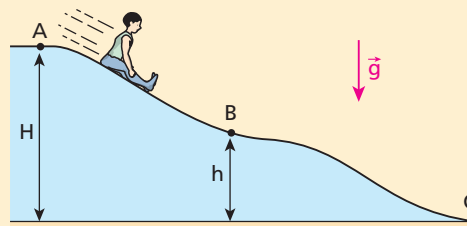
Os valores da energia cinética em **A** e das energias potencial e mecânica em **B** são, respectivamente:

a) 0 J, 800 J e 1 000 J.
b) 200 J, 400 J e 1 000 J.
c) 100 J, 200 J e 800 J.
d) 200 J, 1 000 J e 400 J.
e) Não há dados suficientes para os cálculos.

25. (UFRN) Indique a opção que representa a altura da qual devemos abandonar um corpo de massa m = 2,0 kg para que sua energia cinética, ao atingir o solo, tenha aumentado de 150 J. O valor da aceleração da gravidade no local da queda é g = 10 m/s² e a influência do ar é desprezível.

a) 150 m
b) 75 m
c) 50 m
d) 15 m
e) 7,5 m

26. E.R. Um garoto de massa **m** parte do repouso no ponto **A** do tobogã da figura a seguir e desce sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar:

TF1-321_352_P2T7.indd 336 16/08/12 17:31

Sendo dadas as alturas **H** e **h** e o valor da aceleração da gravidade (**g**), calcule o módulo da velocidade do garoto:

a) no ponto **B**;
b) no ponto **C**.

Resolução:

O sistema é conservativo, o que nos permite aplicar o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica.**

a) $E_{m_B} = E_{m_A} \Rightarrow E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_A} + E_{P_A}$

$$\frac{m\,v_B^2}{2} + m\,g\,h = \frac{m\,v_A^2}{2} + m\,g\,H$$

Sendo $v_A = 0$, calculemos v_B:

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g(H - h)}}$$

b) $E_{m_C} = E_{m_A} \Rightarrow E_{c_C} + E_{p_C} = E_{c_A} + E_{p_A}$

$$\frac{m\,v_C^2}{2} + m\,g\,h_c = \frac{m\,v_A^2}{2} + m\,g\,H$$

Como $h_C = 0$ e $v_A = 0$, vem:

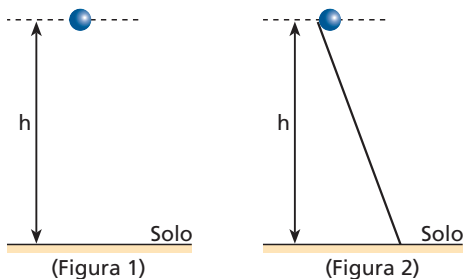
$$\boxed{v_C = \sqrt{2gH}}$$

Nota:

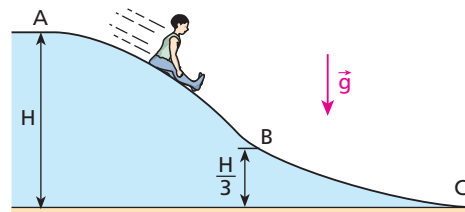
- As velocidades calculadas **independem** da massa do garoto e do formato da trajetória descrita por ele.

27. (Cesgranrio-RJ) O Beach Park, localizado em Fortaleza-CE, é o maior parque aquático da América Latina situado na beira do mar. Uma de suas principais atrações é um toboágua chamado “Insano”. Descendo esse toboágua, uma pessoa atinge sua parte mais baixa com velocidade de módulo 28 m/s. Considerando-se a aceleração da gravidade com módulo $g = 9{,}8\ m/s^2$ e desprezando-se os atritos, conclui-se que a altura do toboágua, em metros, é de:

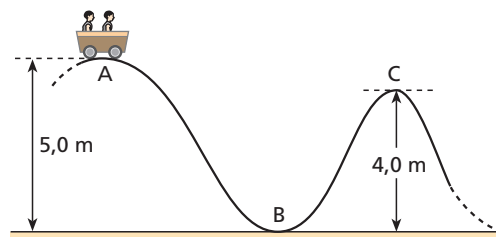
a) 40 b) 38 c) 37 d) 32 e) 28

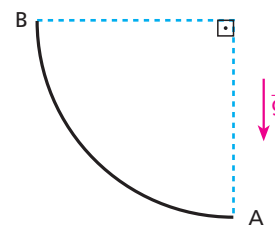
28. (UFF-RJ) Na figura 1, um corpo é abandonado em queda livre de uma altura **h**. Nessa situação, o tempo de queda e a velocidade ao chegar ao solo são, respectivamente, t_1 e v_1. Na figura 2, o mesmo corpo é abandonado sobre um trilho e atinge o solo com velocidade v_2, num tempo de queda igual a t_2.

Assim, desprezando o atrito, é correto afirmar que:

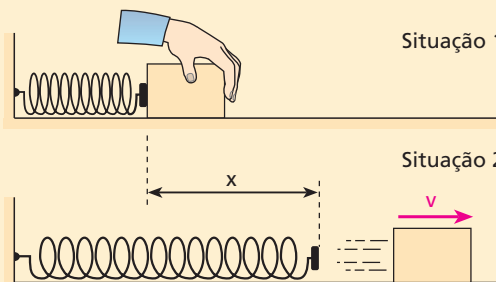
a) $t_1 < t_2$ e $v_1 < v_2$.
b) $t_1 < t_2$ e $v_1 = v_2$.
c) $t_1 = t_2$ e $v_1 = v_2$.
d) $t_1 = t_2$ e $v_1 > v_2$.
e) $t_1 > t_2$ e $v_1 = v_2$.

29. Um garoto de massa m = 30 kg parte do repouso do ponto **A** do escorregador perfilado na figura e desce, sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar, em direção ao ponto **C**:

Sabendo que H = 20 m e que $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$, calcule:

a) a energia cinética do garoto ao passar pelo ponto **B**;
b) a intensidade de sua velocidade ao atingir o ponto **C**.

30. (Fuvest-SP) Numa montanha-russa, um carrinho com 300 kg de massa é abandonado do repouso de um ponto **A**, que está a 5,0 m de altura. Supondo que os atritos sejam desprezíveis e que $g = 10\ m/s^2$, calcule:

a) o valor da velocidade do carrinho no ponto **B**;
b) a energia cinética do carrinho no ponto **C**, que está a 4,0 m de altura.

31. (Puccamp-SP) A pista vertical representada é um quadrante de circunferência de 1,0 m de raio. Adotando $g = 10\ m/s^2$ e considerando desprezíveis as forças dissipativas, um corpo lançado em **A** com velocidade de 6,0 m/s desliza pela pista, chegando ao ponto **B** com velocidade:

a) 6,0 m/s.
b) 4,0 m/s.
c) 3,0 m/s.
d) 2,0 m/s.
e) nula.

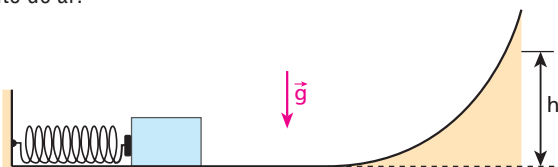
32. E.R. No experimento realizado a seguir, uma mola ideal, de constante elástica **K**, é comprimida por um operador, lançando um bloco de massa **m** sobre uma mesa horizontal perfeitamente polida.

Na **situação 1**, a mola está comprimida de um comprimento **x** e o bloco está em repouso. Na **situação 2**, a mola está sem deformação e o bloco encontra-se em movimento, com velocidade de intensidade **v**. Desprezando a influência do ar, determine o valor de **v**.

Resolução:

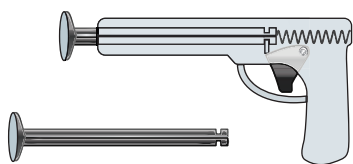
Como não há atritos nem influência do ar, o sistema é conservativo, devendo ocorrer conservação da energia mecânica total. Isso significa que a energia potencial elástica armazenada inicialmente na mola é totalmente transferida para o bloco, que a assimila em forma de energia cinética.

$$E_c = E_e \Rightarrow \frac{m\,v^2}{2} = \frac{K\,x^2}{2}$$

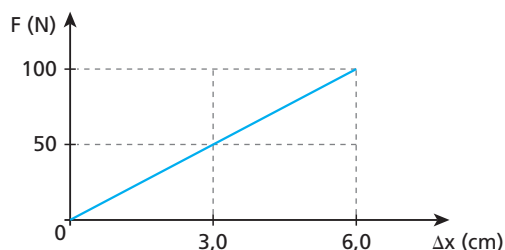
Logo: $$\boxed{v = \sqrt{\frac{K}{m}}\,x}$$

33. No arranjo experimental da figura, desprezam-se o atrito e o efeito do ar:

O bloco (massa de 4,0 kg), inicialmente em repouso, comprime a mola ideal (constante elástica de $3,6 \cdot 10^3$ N/m) de 20 cm, estando apenas encostado nela. Largando-se a mola, esta distende-se impulsionando o bloco, que atinge a altura máxima **h**. Adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s², determine:

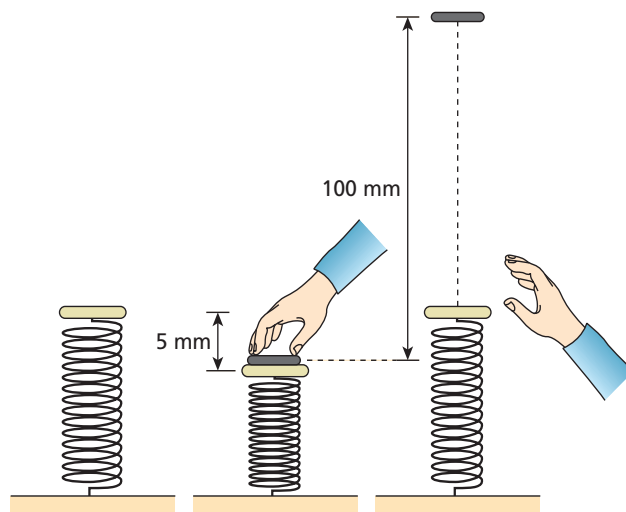
a) o módulo da velocidade do bloco imediatamente após desligar-se da mola;
b) o valor da altura **h**.

34. (Vunesp-SP) Um brinquedo de tiro ao alvo utiliza a energia armazenada em uma mola para lançar dardos.

Para carregar o lançador de dardos de brinquedo, um garoto aplica uma força progressivamente maior até que a mola encontre a trava.

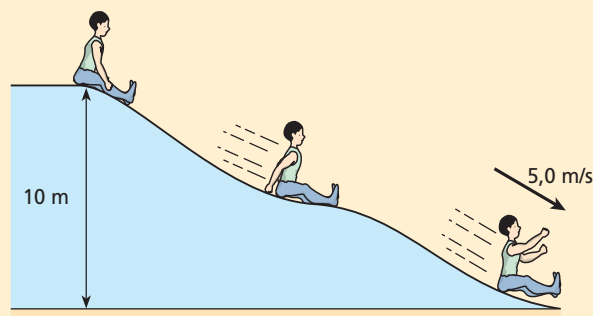
Dados: massa de um dardo = 60 g
módulo da aceleração da gravidade = 10 m/s²

a) O gráfico indica as forças envolvidas no processo de colocação do dardo no lançador até seu travamento, quando a mola é deformada em 6,0 cm.

Com base no gráfico, determine o trabalho realizado pelo garoto nessa ação.

b) Disparando-se o brinquedo de forma que o dardo realize um movimento vertical para cima, determine a máxima altura alcançada por ele, em relação à sua posição inicial, admitindo-se que toda energia armazenada pela mola seja transferida para o dardo e que não haja dissipação de energia mecânica durante a sua ascensão.

35. (UFJF-MG) Um garoto brinca com uma mola helicoidal. Ele coloca a mola em pé em uma mesa e apoia sobre ela um pequeno disco de plástico. Segurando a borda do disco, ele comprime a mola, contraindo-a de 5 mm. Após o garoto soltar os dedos, a mola projeta o disco 100 mm para cima (contados do ponto de lançamento, veja a figura).

Considerando-se a mola ideal e desprezando-se a resistência do ar, quanto subiria o disco se o garoto contraísse a mola de 10 mm?

a) 400 mm
b) 200 mm
c) 100 mm
d) 80 mm
e) 90 mm

36. E.R. Um garoto de massa 40 kg parte do repouso de uma altura de 10 m, desliza ao longo de um tobogã e atinge a parte mais baixa com velocidade de 5,0 m/s:

Admitindo a aceleração da gravidade igual a 10 m/s², calcule a energia mecânica degradada pelas forças dissipativas, durante a descida do garoto.

Resolução:

A energia mecânica inicial, associada ao garoto no alto do tobogã, era do tipo potencvial de gravidade (referencial no solo).

$$E_{m_i} = E_p = m\,g\,h$$

$$E_{m_i} = 40 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (J)} \Rightarrow E_{m_i} = 4{,}0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

A energia mecânica final com que o garoto atinge a parte mais baixa do tobogã é do tipo cinética:

$$E_{m_f} = E_c = \frac{m\,v^2}{2}$$

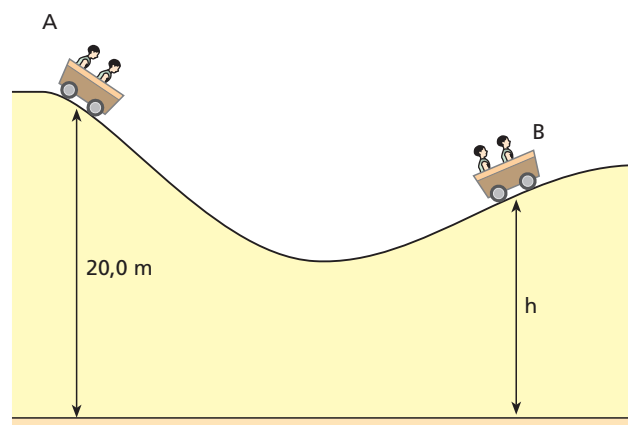
$$E_{m_f} = \frac{40 \cdot (5{,}0)^2}{2} \text{ (J)} \Rightarrow E_{m_f} = 5{,}0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

A energia mecânica degradada pelas forças dissipativas é E_d. Essa energia é calculada por:

$$E_d = E_{m_i} - E_{m_f}$$

$$E_d = 4{,}0 \cdot 10^3 \text{ J} - 5{,}0 \cdot 10^2 \text{ J}$$

$$\boxed{E_d = 3{,}5 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

37. O carrinho de montanha-russa da figura seguinte pesa $6{,}50 \cdot 10^3$ N e está em repouso no ponto **A**, numa posição de equilíbrio instável. Em dado instante, começa a descer o trilho, indo atingir o ponto **B** com velocidade nula:

Sabendo que a energia térmica gerada pelo atrito de **A** até **B** equivale a $4{,}55 \cdot 10^4$ J, determine o valor da altura **h**.

Exercícios — nível 2

38. Analise as proposições seguintes:

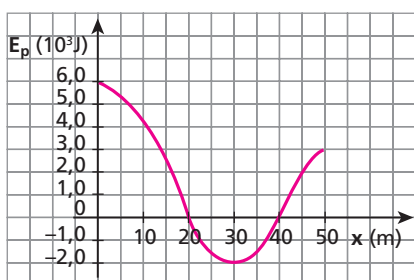
I. O aumento da energia potencial de uma partícula implica, necessariamente, a diminuição de sua energia cinética.

II. Se uma partícula se movimenta com velocidade constante, sua energia mecânica é constante.

III. Para uma partícula cuja energia mecânica é constante, a energia cinética é inversamente proporcional à potencial.

Responda mediante o código:

a) Todas são corretas.
b) Todas são incorretas.
c) Somente II e III são corretas.
d) Somente I é correta.
e) Somente I e III são corretas.

39. Em uma montanha-russa, um carrinho de massa 60 kg tem sua energia potencial de gravidade variando em função de uma coordenada horizontal de posição **x**, conforme o gráfico a seguir:

Admitindo que para $x_0 = 0$ a velocidade do carrinho é nula e supondo a inexistência de atritos:

a) calcule a altura do carrinho em relação ao nível zero de referência, bem como a intensidade de sua velocidade para x = 50 m (adote nos cálculos $g = 10 \text{ m/s}^2$);

b) esboce o gráfico da energia cinética do carrinho em função de **x**.

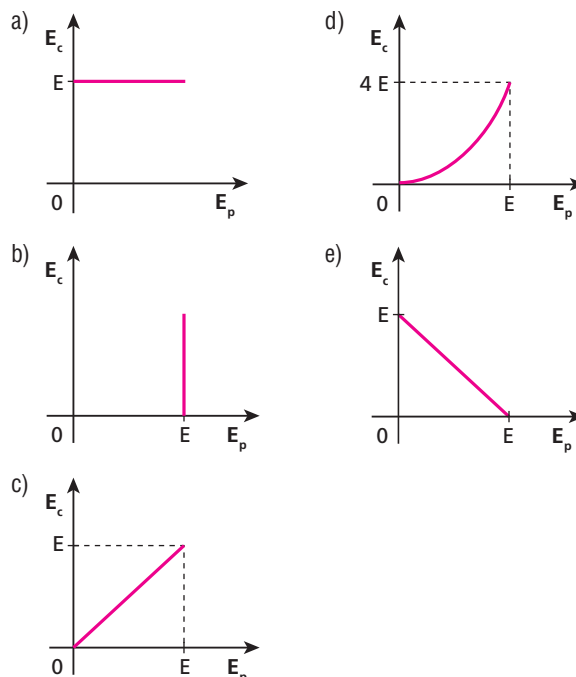
40. Uma partícula movimenta-se sob a ação de um campo de forças conservativo, possuindo energia mecânica **E**. O gráfico que melhor traduz a energia cinética (E_c) da partícula em função de sua energia potencial (E_p) é:

a)

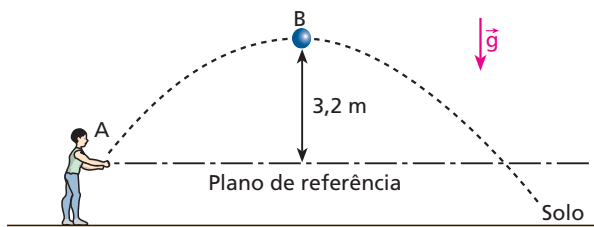
d)

b)

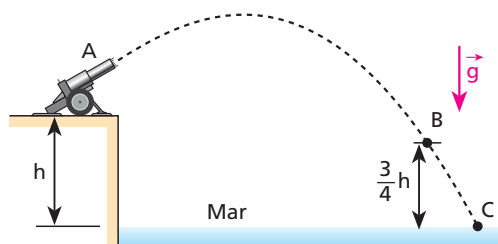
e)

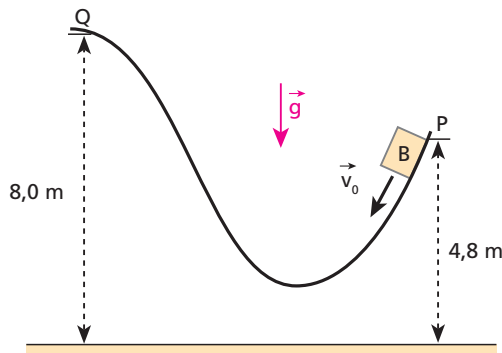
c)

41. (Vunesp-SP) No final de dezembro de 2004, um *tsunami* no Oceano Índico chamou a atenção pelo seu poder de destruição. Um *tsunami* é uma onda que se forma no oceano, geralmente criada por abalos sísmicos, atividades vulcânicas ou pela queda de meteoritos. Este foi criado por uma falha geológica reta, muito comprida, e gerou ondas planas que, em alto mar, propagaram-se com comprimentos de onda muito longos, amplitudes pequenas se comparadas com os comprimentos de onda, mas com altíssimas velocidades. Uma onda desse tipo transporta grande quantidade de energia, que se distribui em um longo comprimento de onda e, por isso, não representa perigo em alto mar. No entanto, ao chegar à costa, onde a profundidade do oceano é pequena, a velocidade da onda diminui. Como a energia transportada é praticamente conservada, a amplitude da onda aumenta, mostrando assim o seu poder devastador. Considere que o módulo da velocidade da onda possa ser obtido pela relação $v = \sqrt{hg}$, em que $g = 10,0\ m/s^2$ e **h** são, respectivamente, o módulo da aceleração da gravidade e a profundidade no local de propagação. A energia da onda pode ser estimada pela relação $E = kvA^2$, em que **k** é uma constante de proporcionalidade e **A** é a amplitude da onda. Se o *tsunami* for gerado em um local com 6 250 m de profundidade e com amplitude de 2,0 m, quando chegar à região costeira, com 10,0 m de profundidade, sua amplitude será

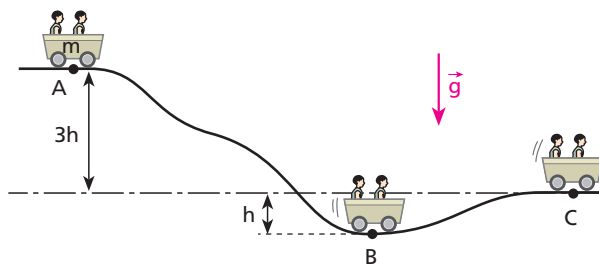
a) 14,0 m
b) 12,0 m
c) 10,0 m
d) 8,0 m
e) 6,0 m

42. Um jogador de voleibol, ao dar um saque, comunica à bola uma velocidade inicial de 10 m/s. A bola, cuja massa é de 400 g, passa a se mover sob a ação exclusiva do campo gravitacional ($|\vec{g}| = 10\ m/s^2$), descrevendo a trajetória indicada na figura:

Calcule:

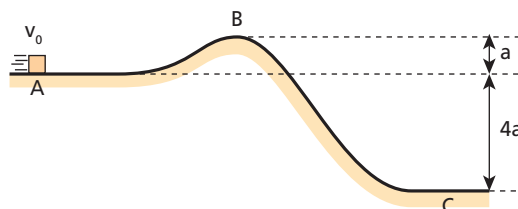
a) a energia mecânica da bola no ponto **A** em relação ao plano de referência indicado;
b) o módulo da velocidade da bola ao passar pelo ponto **B** (mais alto da trajetória).

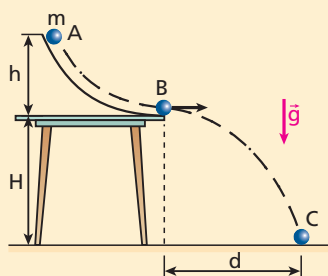
43. Do ponto **A**, situado no alto de uma plataforma de altura **h**, um canhão de dimensões desprezíveis dispara um projétil que, depois de descrever a trajetória indicada na figura, cai no mar (ponto **C**):

Sendo **g** o valor da aceleração da gravidade e v_0 o módulo da velocidade de lançamento do projétil, calcule o módulo de sua velocidade nos pontos **B** e **C**.

44. Um pequeno bloco **B**, lançado do ponto **P** com velocidade de intensidade v_0, desliza sem atrito e sem sofrer influência do ar sobre a superfície **PQ**, contida em um plano vertical.

Sabendo que **B** inverte o sentido do movimento no ponto **Q** e que $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$, calcule o valor de v_0.

45. Um carrinho de dimensões desprezíveis, com massa igual a **m**, parte do repouso no ponto **A** e percorre o trilho ABC da figura, contido em um plano vertical, sem sofrer a ação de forças dissipativas:

Supõe-se conhecida a altura **h** e adota-se para a aceleração da gravidade o valor **g**. Considerando como plano horizontal de referência aquele que passa pelo ponto **C**, determine:

a) a energia potencial de gravidade do carrinho no ponto **B**;
b) a relação v_B/v_C entre os módulos da velocidade do carrinho nos pontos **B** e **C**.

46. (UFPE) Um pequeno bloco é lançado no ponto **A** do trajeto mostrado na figura, contido em um plano vertical. O módulo da velocidade do bloco em **A** é $v_0 = 17\ m/s$.

Sabendo que quando o bloco passa pelo ponto **B** sua velocidade tem módulo $\frac{v_0}{2}$, calcule o módulo da velocidade do bloco no ponto **C**, em m/s. Despreze os efeitos do atrito, bem como os da resistência do ar.

47. E.R. Na montagem experimental esquematizada na figura, o trilho **AB** é perfeitamente liso. No local, reina o vácuo e a aceleração da gravidade tem intensidade **g**.

Uma bolinha de massa **m**, abandonada do repouso no ponto **A**, desce o trilho e projeta-se horizontalmente no ponto **B**, atingindo o solo no ponto **C**. Supondo conhecidas as alturas **h** e **H**, calcule a distância **d** entre o pé da vertical baixada do ponto **B** e o ponto **C**.

Resolução:

I. **Cálculo de v_B:**

Sistema conservativo: $E_{m_B} = E_{m_A}$

PHR em B: $\frac{m\, v_B^2}{2} = m\, g\, h \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2g\, h}}$

II. **Cálculo de t_{BC}:**

Na vertical, o movimento da bolinha de **B** até **C** é uniformemente variado, logo:

$$H = \underbrace{v_{0_y}\, t_{BC}}_{\text{parcela nula}} + \frac{g}{2}\, t_{BC}^2 \Rightarrow \boxed{t_{BC} = \sqrt{\frac{2\,H}{g}}}$$

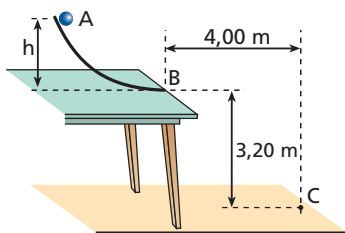
III. **Cálculo de d:**

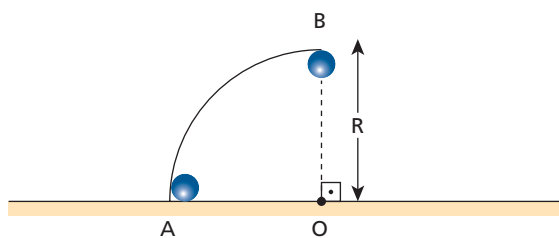
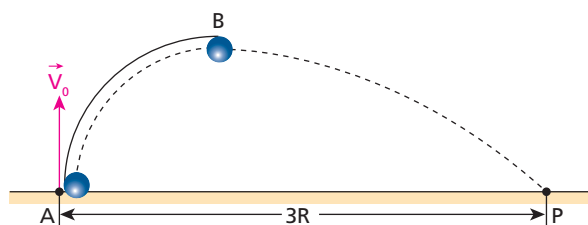
Na horizontal, o movimento da bolinha de **B** até **C** é uniforme, logo:

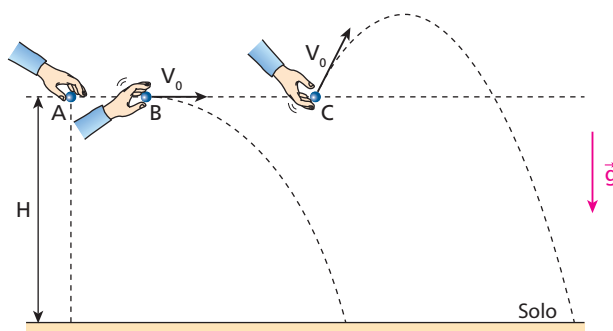
$$d = v_B\, t_{BC} \Rightarrow d = \sqrt{2g\, h} \cdot \sqrt{\frac{2\,H}{g}}$$

Logo: $\boxed{d = 2\,\sqrt{h\,H}}$

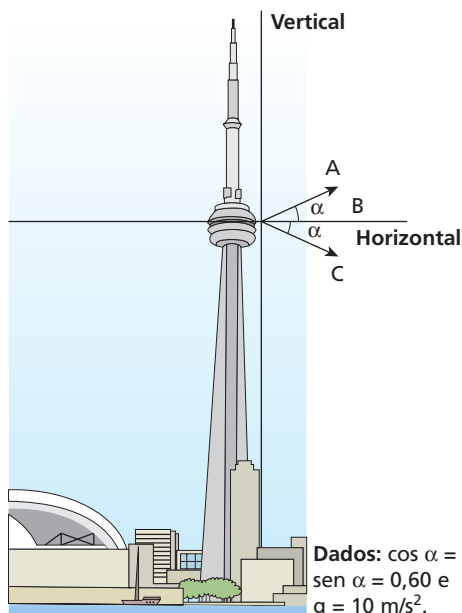
Nota:
- **d** independe de **m** e de **g**.

48. (Mack-SP) Uma bolinha é abandonada do ponto **A** do trilho liso AB e atinge o solo no ponto **C**. Supondo que a velocidade da bolinha no ponto **B** seja horizontal, a altura **h** vale:

a) 1,25 m.
b) 1,75 m.
c) 2,00 m.
d) 2,25 m.
e) 2,50 m.

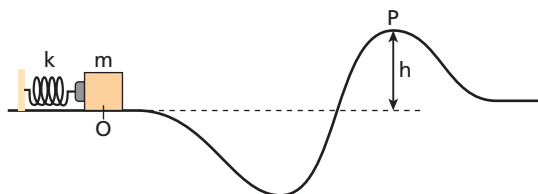
49. (UFRJ) Um trilho em forma de arco circular, contido em um plano vertical, está fixado em um ponto **A** de um plano horizontal. O centro do arco está em um ponto **O** desse mesmo plano. O arco é de 90° e tem raio **R**, como ilustra a figura.

Um pequeno objeto é lançado para cima, verticalmente, a partir da base **A** do trilho e desliza apoiado internamente a ele, sem atrito, até o ponto **B**, onde escapa horizontalmente, caindo no ponto **P** do plano horizontal onde está fixado o trilho. A distância do ponto **P** ao ponto **A** é igual a 3R.

Calcule o módulo da velocidade inicial $\vec{V}_0$ com que o corpo foi lançado, em função do raio **R** e do módulo da aceleração da gravidade **g**.

50. Três pequenos pedaços de giz, **A**, **B** e **C**, vão se movimentar no interior de uma determinada sala de aula a partir de uma mesma altura **H** sob a ação exclusiva da gravidade. O pedaço **A** será abandonado do repouso para despencar verticalmente e os pedaços **B** e **C** serão lançados com velocidades de mesma intensidade V_0 para realizarem voos balísticos, em trajetórias parabólicas. A velocidade inicial de **B** será horizontal, enquanto a de **C** será oblíqua e dirigida para cima, como representa a figura.

Representando-se respectivamente por T_A, T_B e T_C os tempos gastos por **A**, **B** e **C** em seus movimentos até o solo e por V_A, V_B e V_C as correspondentes intensidades das velocidades de impacto desses três pedaços de giz contra o chão, pede-se comparar:

a) T_A, T_B e T_C;
b) V_A, V_B e V_C.

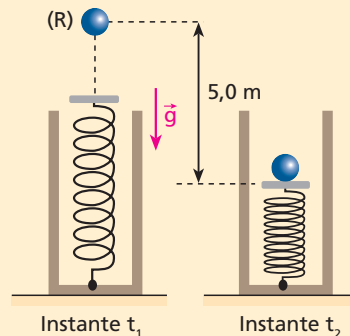
51. (Olimpíada Brasileira de Física) A *CN Tower* de Toronto, Canadá, tem altitude máxima de 1815 pés (553,33 m), constituindo-se no maior edifício do mundo. A 315 metros de altitude, os turistas têm acesso ao andar de observação. A partir desse andar, objetos de massa m = 0,40 kg são lançados com velocidades de mesmo módulo V_0 = 10 m/s, segundo direções **A**, **B** e **C**, conforme ilustra a figura.

Considerando-se o solo como altitude zero e a resistência do ar desprezível, pode-se afirmar:

a) Nas três situações, o tempo de queda do objeto é o mesmo.
b) O objeto atinge o solo com mais energia cinética quando lançado conforme a situação **C**.
c) Os três objetos atingem o solo num ponto cuja distância em relação à vertical que passa pelo ponto de lançamento é de 82,7 m (alcance horizontal).
d) Nas três situações, o módulo da velocidade de impacto do objeto com o solo vale 288 km/h.
e) Os três objetos atingem o solo com a mesma velocidade vetorial final.

52. (Olimpíada Brasileira de Física) Um bloco de massa m = 0,60 kg, sobre um trilho de atrito desprezível, comprime uma mola de constante elástica $k = 2,0 \cdot 10^3$ N/m, conforme a figura abaixo.

Considere que a energia potencial gravitacional seja zero na linha tracejada. O bloco, ao ser liberado, passa pelo ponto **P** (h = 0,60 m), onde 75% de sua energia mecânica é cinética. Adote g = 10,0 m/s² e despreze o efeito do ar.

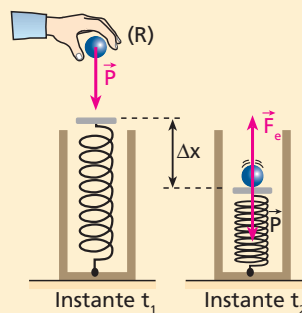
A compressão **x** da mola foi de:

a) 9,0 cm.
b) 12,0 cm.
c) 15,0 cm.
d) 18,0 cm.
e) 21,0 cm.

53. E.R. Na figura seguinte, uma esfera de massa m = 5,0 kg é abandonada do ponto **R** no instante t_1, caindo livremente e colidindo com o aparador, que está ligado a uma mola de constante elástica igual a $2,0 \cdot 10^3$ N/m. As massas da mola e do aparador são desprezíveis, como também o são todas as dissipações de energia mecânica.

Considerando g = 10 m/s² e supondo que no instante t_2 a mola está sob compressão máxima, calcule:

a) a compressão da mola quando a esfera atinge sua máxima velocidade;
b) a compressão da mola no instante t_2.

Resolução:

a) Durante a queda livre, o movimento da esfera é uniformemente acelerado pela ação do peso constante $\vec{P}$.
Após a colisão com o aparador, entretanto, além do peso $\vec{P}$, passa a agir na esfera a força elástica $\vec{F}_e$ exercida pela mola, que, pela **Lei de Hooke**, tem intensidade proporcional à deformação Δx.
Assim, logo após a colisão, como a deformação da mola ainda é pequena, o mesmo ocorre com a intensidade de $\vec{F}_e$, havendo predominância de $\vec{P}$. Isso faz com que o movimento continue acelerado (não uniformemente).
A velocidade da esfera tem **intensidade máxima** no instante em que a força elástica equilibra o peso.

Na posição em que a velocidade é máxima:

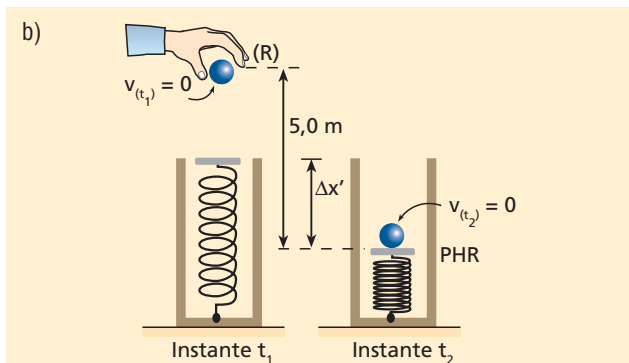
$$|\vec{F}_e| = |\vec{P}|$$

$$K \Delta x = m g$$

$$2,0 \cdot 10^3 \Delta x = 5,0 \cdot 10$$

$$\Delta x = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,5 \text{ cm}$$

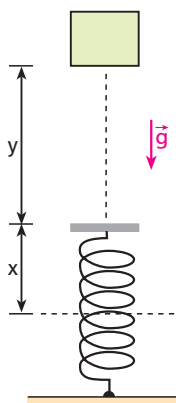
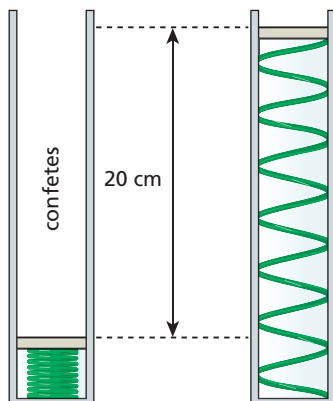
Da posição de máxima velocidade para baixo, a esfera realiza um movimento retardado (não uniformemente) até parar (instante t_2).

b)

Adotando o nível do aparador na situação da mola sob máxima compressão como referência e observando que o sistema é conservativo, podemos dizer que a energia potencial elástica acumulada na mola no instante t_2 é igual à energia potencial de gravidade da esfera no instante t_1.

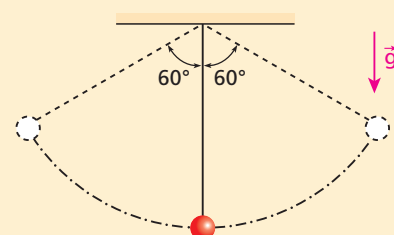
$$E_{e_{(t_2)}} = E_{p_{(t_1)}} \Rightarrow \frac{K(\Delta x')^2}{2} = m\,g\,h$$

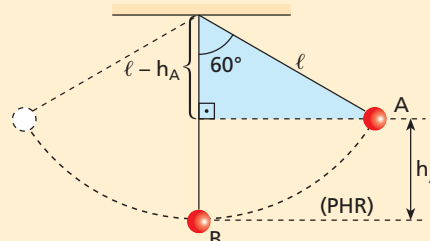
$$\frac{2{,}0 \cdot 10^3\ (\Delta x')^2}{2} = 5{,}0 \cdot 10 \cdot 5{,}0$$

Assim: $\boxed{\Delta x' = 5{,}0 \cdot 10^{-1}\ \text{m} = 50\ \text{cm}}$

54. Um corpo de massa 1,0 kg cai livremente, a partir do repouso, da altura $y = 6{,}0$ m sobre uma mola de massa desprezível e eixo vertical, de constante elástica igual a $1{,}0 \cdot 10^2$ N/m.
Adotando $g = 10\ \text{m/s}^2$ e desprezando todas as dissipações de energia mecânica, calcule a máxima deformação **x** da mola.

55. (FGV-SP) Em festas de aniversário, um dispositivo bastante simples arremessa confetes. A engenhoca é constituída essencialmente por um tubo de papelão e uma mola helicoidal comprimida. No interior do tubo, estão acondicionados os confetes. Uma pequena torção na base plástica do tubo destrava a mola que, em seu processo de relaxamento, empurra, por 20 cm, os confetes para fora do dispositivo.
Ao serem lançados com o tubo na posição vertical, os confetes atingem no máximo 4,0 metros de altura, 20% do que conseguiriam se não houvesse a resistência do ar. Considerando-se que a porção de confetes a ser arremessada tem massa total de 10 g e que a aceleração da gravidade tem módulo igual a 10 m/s², o valor da constante elástica da mola utilizada é, aproximadamente, em N/m,

a) 10 b) 20 c) 40 d) 50 e) 100

56. (Unicamp-SP) *Bungee-jump* é um esporte radical, muito conhecido hoje em dia, em que uma pessoa salta de uma grande altura, presa a um cabo elástico. Considere o salto de uma pessoa de 80 kg. No instante em que a força elástica do cabo vai começar a agir, o módulo da velocidade da pessoa é de 20 m/s. O cabo adquire o dobro de seu comprimento natural quando a pessoa atinge o ponto mais baixo de sua trajetória. Para resolver as questões abaixo, despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ \text{m/s}^2$.
a) Calcule o comprimento normal do cabo.
b) Determine a constante elástica do cabo.

57. E.R. O pêndulo da figura oscila para ambos os lados, formando um ângulo máximo de 60° com a vertical.

O comprimento do fio é de 90 cm e, no local, o módulo da aceleração da gravidade vale 10 m/s². Supondo condições ideais, determine:
a) o módulo da velocidade da esfera no ponto mais baixo de sua trajetória;
b) a intensidade da força que traciona o fio quando este se encontra na vertical (adotar, para a massa da esfera, o valor 50 g).

Resolução:
Vamos analisar, inicialmente, os aspectos geométricos do problema:

Considerando o triângulo retângulo destacado na figura, temos:

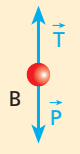
$$\cos 60° = \frac{\ell - h_A}{\ell} \Rightarrow \frac{1}{2}\ell = \ell - h_A$$

Daí: $h_A = \frac{1}{2}\ell = \frac{90\ \text{cm}}{2} \Rightarrow \boxed{h_A = 45\ \text{cm}}$

a) Como a única força que realiza trabalho é a da gravidade, o sistema é conservativo, permitindo-nos aplicar o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**:

$$E_{m_B} = E_{m_A}$$

$$E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_A} + E_{p_A}$$

$$\frac{m\,v_B^2}{2} + m\,g\,h_B = \frac{m\,v_A^2}{2} + m\,g\,h_A$$

Sendo $h_B = 0$ e $v_A = 0$, calculamos v_B:

$$v_B = \sqrt{2g\,h_A} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}45} \quad \text{(m/s)}$$

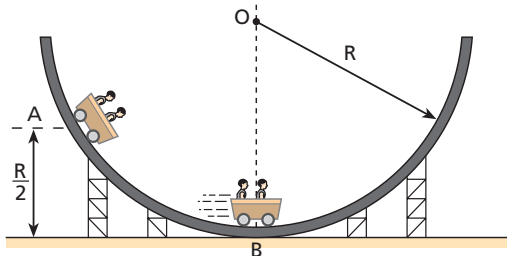
$$\boxed{v_B = 3{,}0 \text{ m/s}}$$

b) No ponto **B**, agem na esfera seu peso ($\vec{P}$) e a força aplicada pelo fio ($\vec{T}$):

A resultante entre $\vec{P}$ e $\vec{T}$ deve ser **centrípeta**. Então, temos:

$$T - P = F_{cp_B} \Rightarrow T = m\left(\frac{v_B^2}{\ell} + g\right)$$

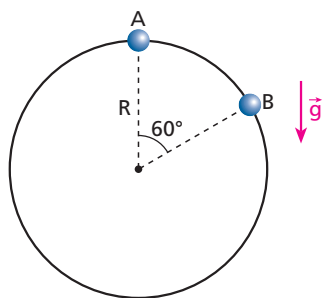
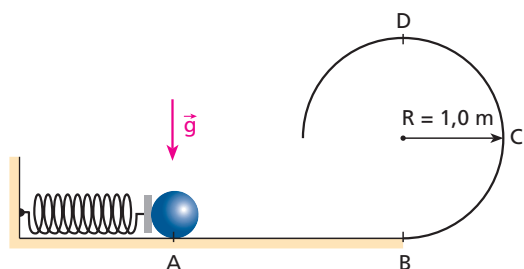
$$T = 50 \cdot 10^{-3}\left(\frac{3{,}0^2}{0{,}90} + 10\right) \Rightarrow \boxed{T = 1{,}0 \text{ N}}$$

58. (UFMG) A figura mostra um trecho de uma montanha-russa de formato circular de raio **R**. Um carro de massa M = 200 kg parte do repouso de uma altura $\frac{R}{2}$ (ponto **A**).

Considere o instante em que o carro passa pelo ponto mais baixo da trajetória (ponto **B**). Despreze as forças de atrito e use $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a) Faça uma figura representando as forças que atuam sobre o carro nesse instante.

b) Calcule a intensidade da força que a pista faz sobre ele nesse instante.

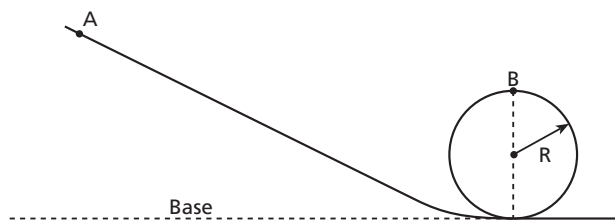
59. (UFPE) Uma pequena conta de vidro de massa igual a 10 g desliza sem atrito ao longo de um arame circular de raio R = 1,0 m, como indicado na figura.

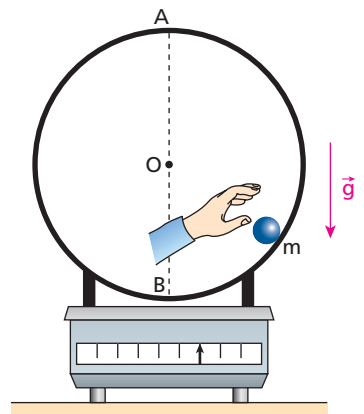
Se a conta partiu do repouso na posição **A**, determine o valor de sua energia cinética ao passar pelo ponto **B**. O arame está posicionado verticalmente em um local em que $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$.

60. (UFU-MG) A mola da figura abaixo possui uma constante elástica K = 280 N/m e está inicialmente comprimida de 10 cm:

Uma bola com massa de 20 g encontra-se encostada na mola no instante em que esta é abandonada. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que todas as superfícies são perfeitamente lisas, determine:

a) o valor da velocidade da bola no ponto **D**;

b) o valor da força que o trilho exerce na bola no ponto **D**;

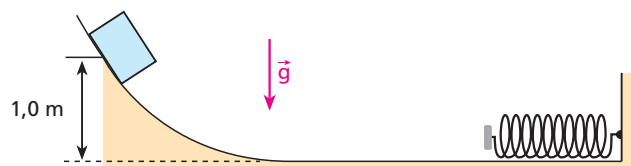
c) o valor da aceleração tangencial da bola quando ela passa pelo ponto **C**.

61. (Fatec-SP) A figura representa uma pista no plano vertical, por onde uma partícula desliza sem atrito. Abandonada do repouso no ponto **A**, a partícula passa por **B**, tendo nesse ponto aceleração 2 g (igual ao dobro da aceleração gravitacional). Sendo **R** o raio da circunferência descrita, a altura de **A** em relação à base é:

a) 1R. b) 2R. c) 3R. d) 4R. e) 5R.

62. Considere a situação esquematizada na figura em que um aro circular de raio R = 50 cm e massa M = 3,0 kg, disposto verticalmente, é apoiado sobre uma balança graduada em newtons. Uma pequena esfera de massa m = 200 g será lançada por um operador de modo a percorrer a parte interna do aro, sem perder o contato com a trajetória e sem sofrer a ação de forças de atrito.

No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10 \text{ m/s}^2$. Supondo que nos instantes em que a esfera passa no ponto **A**, o mais alto do aro, a balança indique zero, determine:

a) a intensidade da velocidade da esfera no ponto **B**, o mais baixo do aro;

b) a indicação da balança nos instantes da passagem da esfera no ponto **B**.

63. No esquema da figura, o bloco tem massa 3,0 kg e encontra-se inicialmente em repouso num ponto da rampa, situado à altura de 1,0 m:

Uma vez abandonado, o bloco desce atingindo a mola de constante elástica igual a $1{,}0 \cdot 10^3$ N/m, que sofre uma compressão máxima de 20 cm. Adotando $|\vec{g}| = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a energia mecânica dissipada no processo.

Leitura

Emoção no *looping* vertical

Consideremos o caso ideal de uma partícula que deverá percorrer o trilho esquematizado na figura, sem sofrer a ação de atritos ou da resistência do ar. O trilho está contido em um plano vertical e o *looping* circular tem raio **R**.

Se a partícula partir do repouso do ponto **A**, qual deverá ser o menor desnível **h** entre os pontos **A** e **B** para que ela consiga descrever toda a trajetória sem perder o contato com o trilho?

Sabe-se que $h \neq 0$, isto é, o ponto **A** está acima do ponto **B**, pois, se esses pontos estivessem no mesmo nível horizontal, a partícula teria em **B** uma parcela de energia (energia cinética) a mais que no ponto **A**, o que contrariaria o Princípio da Conservação da Energia Mecânica.

Raciocinando em termos de **h** mínimo, a partícula não trocará forças com o trilho no ponto **B** e, por isso, seu peso $(\vec{P})$ fará o papel de resultante centrípeta $(\vec{F}_{cp})$.

Assim, no ponto **B**, temos:

$$\vec{P} = \vec{F}_{cp}$$

Sendo **m** a massa, **g** o valor da aceleração da gravidade e v_B a intensidade da velocidade em **B**, vem:

$$m\,g = \frac{m\,v_B^2}{R} \Rightarrow g\,R = v_B^2 \qquad \text{(I)}$$

Adotando o nível horizontal do ponto **B** como referência e aplicando o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**, temos:

$$m\,g\,h = \frac{m\,v_B^2}{2} \Rightarrow 2g\,h = v_B^2 \qquad \text{(II)}$$

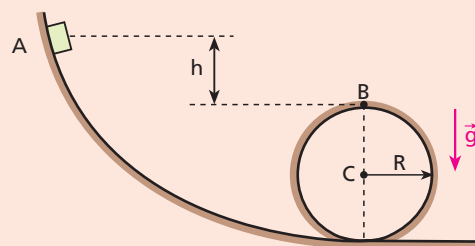
Comparando (I) e (II), calculamos **h** mínimo:

$$2g\,h = g\,R \Rightarrow \boxed{h = \frac{R}{2}}$$

Se **h** for menor que $\frac{R}{2}$, a partícula não realizará o *looping*, perdendo o contato com o trilho antes de atingir o ponto **B**.

Em parques de diversões, há vários brinquedos em que veículos desafiam a gravidade, realizando *loopings* contidos em um plano vertical. Para tanto, é fundamental que a construção desses brinquedos leve em conta o desnível entre o ponto de partida dos veículos e o ponto mais alto do *looping*.

Se não houvesse atrito nem resistência do ar, o desnível deveria ser no mínimo igual à metade do raio do *looping*, como demonstramos acima.

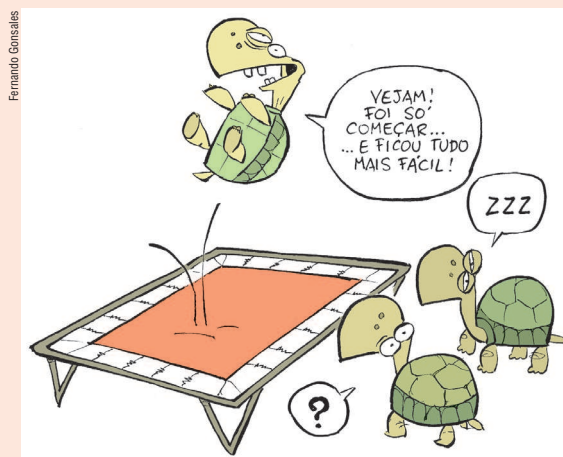
Na prática, entretanto, ocorrem dissipações de energia mecânica. Por esse motivo, e também por questões de segurança, é necessário que esses brinquedos sejam operados com um desnível sempre maior que a metade do raio do *looping* numa montanha-russa.

Thinkstock/Getty Images

Desafiar a gravidade numa montanha-russa é muito emocionante e divertido, principalmente quando a aceleração se aproxima da de $\vec{g}$. É disso que surge aquela sensação de "frio na barriga", causada pela aparente "perda de peso" das vísceras, que praticamente levitam no interior do abdome.

TF1-321_352_P2T7.indd 345 16/08/12 17:32

Descubra mais

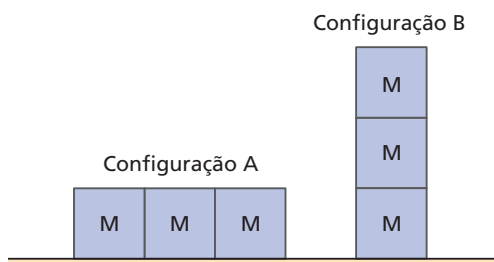
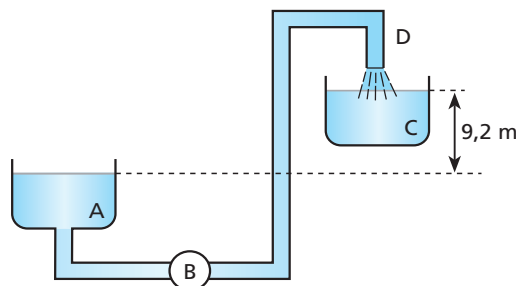
1. Um dos princípios mais importantes da Física é o da conservação da energia. Ele estabelece que energia não se cria nem se destrói; energia se transforma. O aparecimento de certa quantidade de energia implica sempre o desaparecimento de quantidade igual. Dê sustentação argumentativa a essa lei, fundamentando sua linha de raciocínio em exemplos.

2. Observe o quadrinho abaixo, em que uma tartaruga está se exercitando com entusiasmo numa cama elástica. Como foi possível iniciar essa série de saltos, considerando-se que o quelônio estava inicialmente em repouso sobre a lona? Explique as conversões de energia envolvidas no processo.

3. Considere uma granada explodindo e se fragmentando em vários estilhaços lançados nas diversas direções ao redor do local da explosão com velocidades de grande intensidade. Nessa situação, há conversão entre que modalidades de energia? A energia total do sistema, que inclui o meio em que ocorre a explosão, permanece constante? No ato da explosão, a granada constitui um sistema mecânico conservativo?

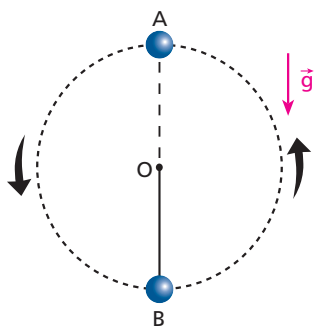
4. A energia emanada das estrelas provém de um processo contínuo, que ocorre em seu interior, denominado fusão nuclear. Do que consiste esse processo? Fusão nuclear e fissão nuclear são um mesmo processo? Pesquise.

Exercícios

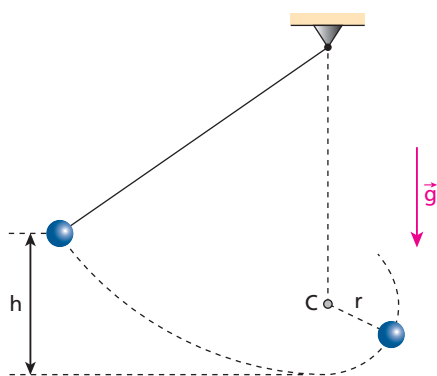
nível 3

64. (UFPE) Uma criança, que está brincando com blocos cúbicos idênticos, constrói as configurações compostas de três blocos mostradas na figura. Cada bloco tem aresta $a = 10$ cm e massa $M = 100$ g. A criança pode até perceber intuitivamente que a configuração A é mais estável do que a B, mas não consegue quantificar fisicamente essa estabilidade. Para tal, é necessário determinar a diferença de energia potencial gravitacional $\Delta U = U_B - U_A$ entre as duas configurações. Qual é o valor de ΔU? Adote $g = 10$ m/s^2.

65. (Mack-SP) Uma bomba (**B**) recalca água, à taxa de $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ m^3 por segundo, de um depósito (**A**) para uma caixa (**C**) no topo de uma casa. A altura de recalque é de 9,2 m e a velocidade da água na extremidade do tubo de descarga (**D**) é de $4{,}0$ m $\cdot$ s^{-1}.

Considere $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2} e a massa específica da água igual a $1{,}0 \cdot 10^3$ kg $\cdot$ m^{-3}. Despreze as dissipações de energia. Qual a potência da bomba em kW?

66. Demonstre que, num sistema sujeito exclusivamente à ação de forças conservativas, o trabalho total é igual à variação da energia potencial com o sinal trocado.

67. Uma esfera de massa **m**, ligada a um ponto fixo **O**, deverá realizar voltas circulares contidas em um plano vertical. No local, a aceleração da gravidade vale **g** e a influência do ar é desprezível. No ponto **B**, o mais baixo da trajetória, a velocidade da esfera tem a mínima intensidade de modo que permita a realização de uma volta completa.

Considerando a esfera no ponto **B**, calcule a intensidade da força de tração no elemento que a conecta ao ponto **O** nos seguintes casos:

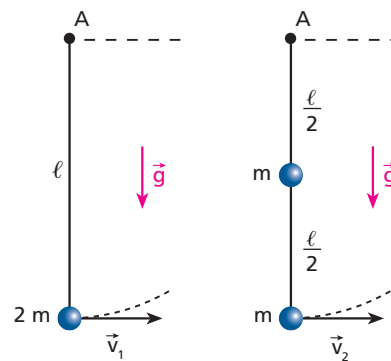
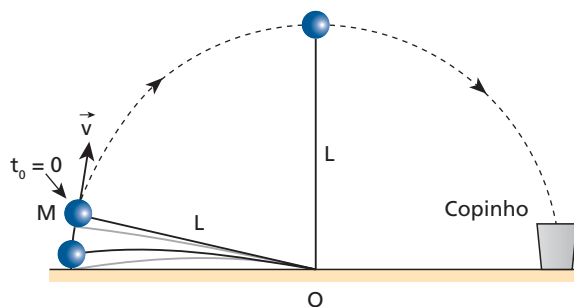
a) o elemento de conexão é um fio inextensível, flexível e de massa desprezível;
b) o elemento de conexão é uma haste rígida de massa desprezível.

68. (Vunesp-UFTM-MG) A figura, fora de escala, mostra um pêndulo simples abandonado à altura **h** do ponto mais baixo da trajetória. Na vertical que passa pelo ponto de sustentação, um pino faz o fio curvar-se e o pêndulo passa a descrever uma trajetória circular de raio **r** e centro **C**.

O menor valor de **h** para que a esfera pendular descreva uma circunferência completa é igual a:

a) 1,0r.
b) 1,5r.
c) 2,0r.
d) 2,5r.
e) 3,0r.

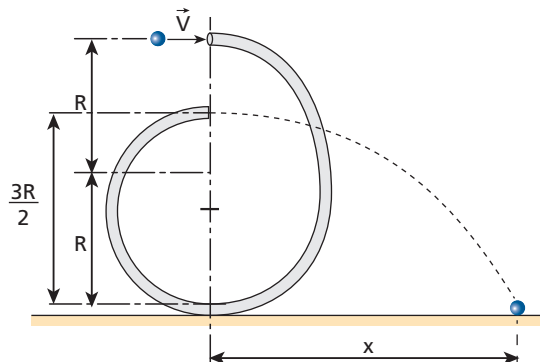
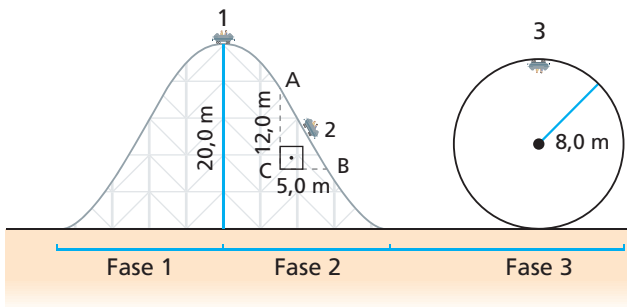
69. (ITA-SP) Uma haste rígida de peso desprezível e comprimento ℓ carrega uma massa 2m em sua extremidade. Outra haste, idêntica, suporta uma massa **m** em seu ponto médio e outra massa **m** em sua extremidade. As hastes podem girar ao redor do ponto fixo **A**, conforme as figuras.

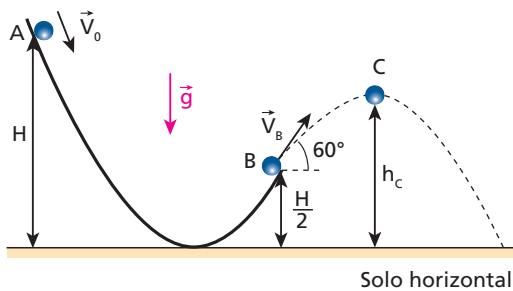
Qual a velocidade horizontal mínima que deve ser comunicada às suas extremidades para que cada haste deflita até atingir a horizontal?

Considere conhecida a intensidade da aceleração da gravidade: **g**.

70. (UFRJ) Um brinquedo muito popular entre as crianças é a minicatapulta. Ela consiste de uma fina tira de madeira que pode ser flexionada a fim de impulsionar uma pequena esfera de massa **M**, presa a um dos extremos de um fio ideal de comprimento **L** (o outro extremo está fixo no ponto **O**), para que esta se encaixe em um copinho no extremo oposto do brinquedo, como ilustra a figura a seguir. Para que o arremesso seja bem-sucedido, é necessário que no ponto mais alto da trajetória da esfera o fio esteja esticado.

Suponha que no momento do lançamento ($t_0 = 0$) o fio encontre-se esticado e que a energia mecânica total da esfera nesse instante seja 5M g L, tomando como nível zero de energia potencial o nível do ponto **O**.

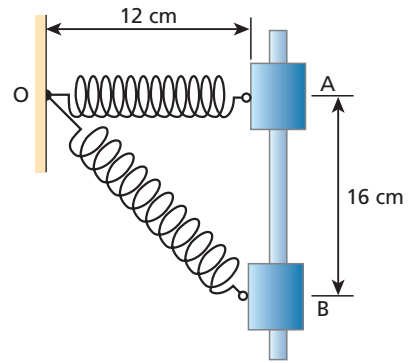
Admita que a energia mecânica da esfera permaneça constante.

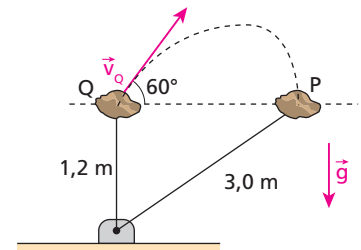
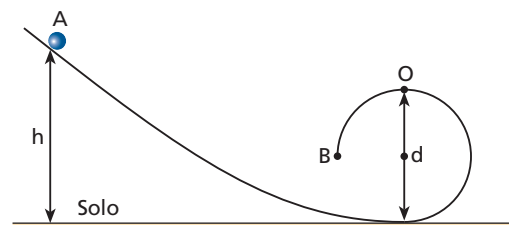
a) Calcule a energia cinética da esfera no ponto mais alto de sua trajetória.
b) Calcule a força de tração no fio no ponto mais alto da trajetória da esfera e responda se esta se encaixará ou não no copinho.

71. (ITA-SP) Uma pequena esfera penetra com velocidade $\vec{V}$ em um tubo oco, recurvado e colocado em um plano vertical, como mostra a figura, num local onde a aceleração da gravidade tem módulo igual a **g**. Supondo que a esfera percorra a região interior do tubo sem atrito e acabe saindo horizontalmente pela extremidade, pergunta-se: que distância **x**, horizontal, ela percorrerá até tocar o solo?

72. (Fuvest-SP) Na montanha-russa esquematizada a seguir, um motor leva o carrinho até o ponto 1. Desse ponto, ele parte, saindo do repouso, rumo ao ponto 2, localizado em um trecho retilíneo **AB**. Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$.

Desprezando-se a resistência do ar e as forças de atrito, calcule
a) o módulo da aceleração do carrinho no ponto 2.
b) a velocidade escalar do carrinho no ponto 3, dentro do *loop*.

73. (Unip-SP) No esquema da figura, uma pequena esfera desliza em uma trajetória sem atrito de **A** para **B** e, em seguida, fica sob a ação exclusiva da gravidade, descrevendo um arco de parábola de vértice **C**. O referencial para medir as energias é o solo e a trajetória parabólica não está na escala correta.

A esfera foi lançada, a partir do ponto **A**, com velocidade de intensidade V_0 e, ao abandonar o trilho em **B**, sua velocidade $\vec{V}_B$ forma ângulo de 60° com a horizontal.
Sabendo que no ponto **A** a energia mecânica da esfera vale 700 J e a energia cinética vale 100 J, podemos concluir que a altura do ponto **C**:
a) é igual a **H**.
b) é menor que **H**.
c) é maior que **H**.
d) vale $\frac{3}{4}$H.
e) não pode ser obtida em função de **H** com os dados apresentados.

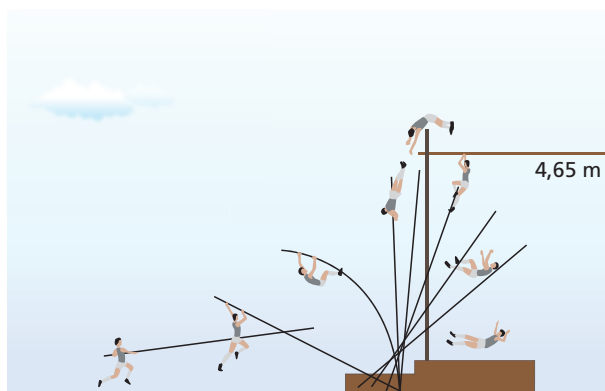
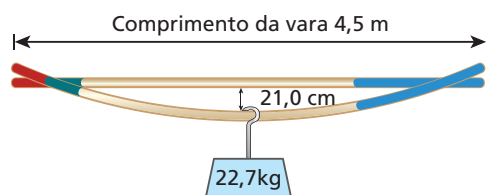
74. Um atleta de massa igual a 64,0 kg prepara-se para realizar um salto a distância. Para isso, ele começa a correr numa pista horizontal, destacando-se do solo com uma velocidade oblíqua $\vec{V}_0$ que tem componente horizontal de intensidade 10,5 m/s. Nesse instante, o centro de massa do atleta encontra-se a uma altura de 80,0 cm em relação ao solo. No local, a aceleração da gravidade tem intensidade $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e a influência do ar é desprezível. Tendo-se verificado que o centro de massa do atleta sofreu uma elevação máxima de 45,0 cm durante o voo e que ao encerrar-se o salto este ponto termina praticamente ao nível do chão, determine:
a) a energia cinética do atleta no instante em que se destaca do solo;
b) o intervalo de tempo transcorrido durante o voo;
c) a marca obtida pelo atleta em seu salto, isto é, a distância percorrida por ele durante o voo, paralelamente à pista.

75. Na figura, tem-se um cilindro de massa 5,0 kg, dotado de um furo, tal que, acoplado à barra vertical indicada, pode deslizar sem atrito ao longo dela. Ligada ao cilindro, existe uma mola de constante elástica igual a $5,0 \cdot 10^2$ N/m e comprimento natural de 8,0 cm, cuja outra extremidade está fixada no ponto **O**. Inicialmente, o sistema encontra-se em repouso (posição **A**) quando o cilindro é largado, descendo pela barra e alongando a mola. Calcule o módulo da velocidade do cilindro depois de ter descido 16 cm (posição **B**). Adote nos cálculos $g = 10 \text{ m/s}^2$.

76. (ITA-SP) Um *bungee-jumper* de 2,0 m de altura e 100 kg de massa pula de uma ponte usando uma *bungee-cord* de 18 m de comprimento quando não alongada, constante elástica de 200 N/m e massa desprezível, amarrada aos seus pés. Na sua descida, a partir da superfície da ponte, a corda atinge a extensão máxima, sem que ele toque nas rochas embaixo. Das opções abaixo, a menor distância entre a superfície da ponte e as rochas é: (Adotar $g = 10 \text{ m/s}^2$.)
a) 26 m.
b) 31 m.
c) 36 m.
d) 40 m.
e) 46 m.

77. Uma pedra **Q**, de massa igual a 2,0 kg, está presa a um fio elástico que possui constante elástica $K = 2,0 \cdot 10^2$ N/m. A pedra é projetada com velocidade $\vec{V}_Q$ de módulo 20 m/s, formando um ângulo de 60° com a horizontal. No instante do lançamento, o fio elástico estava esticado de 0,20 m. Desprezando a influência do ar e considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule o módulo da velocidade da pedra, em m/s, no instante em que ela atinge a posição **P**.

78. Uma partícula, saindo do repouso do ponto **A**, percorre a guia representada no esquema, disposta em um plano vertical:

Sendo **h** a altura do ponto **A** em relação ao solo e **d** o diâmetro do arco de circunferência indicado, calcule o máximo valor admissível à relação d/h para que a partícula consiga chegar ao ponto **B** sem perder o contato com a guia. Despreze os atritos e a resistência do ar.

Para raciocinar um pouco mais

79. (UFG-GO) A saltadora brasileira Fabiana Murer terminou as Olimpíadas de Pequim em décimo lugar, após descobrir, no meio da competição, que o Comitê Organizador dos Jogos havia perdido uma de suas varas, a de flexibilidade 21.
Fabiana Murer foi prejudicada porque teve de usar uma vara inapropriada para seu salto.
A altura que Fabiana não conseguiu ultrapassar: 4,65 m.

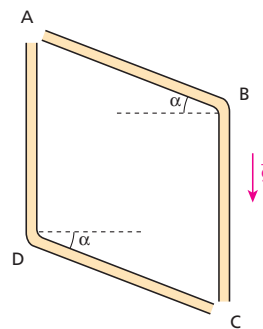
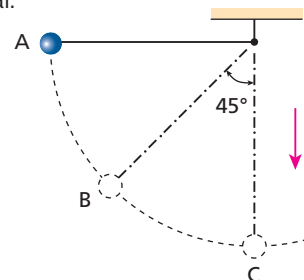
Com a vara errada		
Flexibilidade		**Saltos para os quais a vara é apropriada**
A vara foi perdida	21,0	4,55 m e 4,60 m 4,65 m e 4,70 m
A vara que Fabiana usou	20,5	4,75 m e 4,80 m

COMO SE MEDE A FLEXIBILIDADE?

Dizer que a vara tem flexibilidade 21,0 significa que, quando apoiada e submetida a um peso de 22,7 kgf em seu centro, ela sofrerá uma deformação de 21,0 cm.

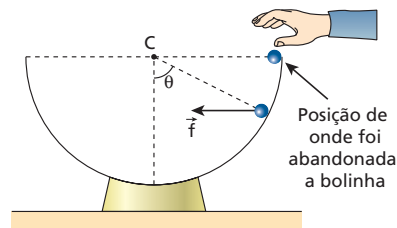
Fontes: Elson Miranda, treinador de Fabiana Murer, e Júlio Serrão, do Laboratório de Biomecânica da USP.
(*VEJA*. São Paulo, p. 128, 27 ago. 2008. Adaptado.)

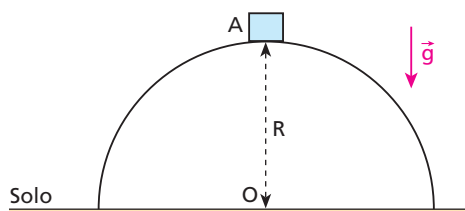
Com a técnica adequada, considere que, ao flexionar a vara, a atleta consiga um acréscimo de energia equivalente a 20% de sua energia cinética antes do salto. Na corrida para o salto, a atleta atinge uma velocidade de módulo 8,0 m/s e seu centro de massa se encontra a 80 cm do solo. Admita que, no ponto mais alto de sua trajetória, a velocidade da atleta é desprezível. Nessas condições, desconsiderando-se a resistência do ar e adotando-se $g = 10\ m/s^2$, a altura máxima, em metros, que a atleta consegue saltar é:

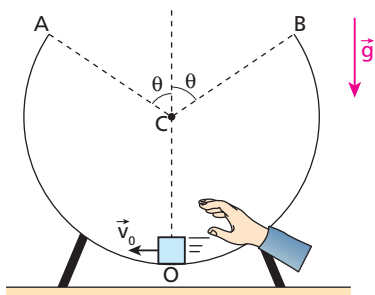
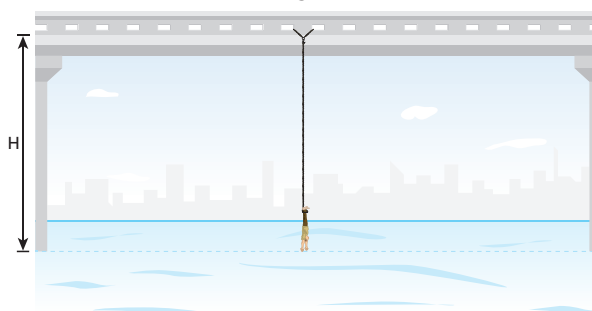
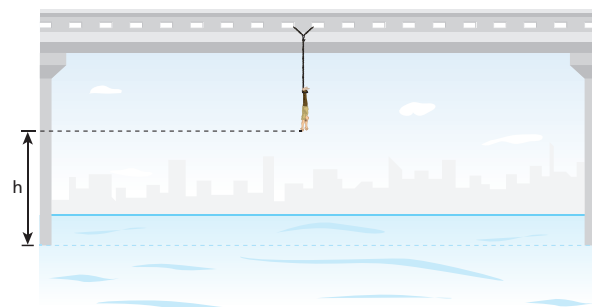
a) 3,84
b) 4,00
c) 4,64
d) 4,70
e) 4,80

80. Na figura, ABC e ADC são tubos contidos em um mesmo plano vertical. Os segmentos AB, BC, AD e DC têm todos o mesmo comprimento **L**, estando AD e BC posicionados verticalmente. Uma esfera I parte do repouso de **A**, percorre o tubo ABC e atinge **C** com velocidade de intensidade v_I, gastando um intervalo de tempo Δt_I. Uma outra esfera II também parte do repouso de **A**, percorre o tubo ADC e atinge **C** com velocidade de intensidade v_{II}, gastando um intervalo de tempo Δt_{II}. Despreze todos os atritos e as possíveis dissipações de energia mecânica nas colisões das esferas com as paredes internas dos tubos. Supondo conhecidos o ângulo α e a intensidade da aceleração da gravidade **g**, pede-se:

a) calcular v_I e v_{II};
b) comparar Δt_I com Δt_{II}.

81. O pêndulo esquematizado na figura é constituído de uma pequena esfera de massa **m** e de um fio leve e inextensível que pode suportar uma tração máxima de intensidade m g, em que **g** é o módulo da aceleração da gravidade local.
Nas posições **A** e **C,** o fio apresenta-se, respectivamente, na horizontal e na vertical.

Admita que o pêndulo parta do repouso da posição **A**. Desprezando o efeito do ar, você poderá afirmar que:
a) o fio se romperá entre as posições **A** e **B**;
b) o fio se romperá na posição **B**;
c) o fio se romperá entre as posições **B** e **C**;
d) o fio se romperá na posição **C**;
e) o pêndulo permanecerá oscilando indefinidamente.

82. (UFRJ) Uma bolinha de gude de dimensões desprezíveis é abandonada, a partir do repouso, na borda de um hemisfério oco e passa a deslizar, sem atrito, em seu interior.

Calcule o ângulo **θ** (expresso por uma função trigonométrica) entre o vetor-posição da bolinha em relação ao centro **C** e a vertical para o qual a força resultante $\vec{f}$ sobre a bolinha é horizontal.

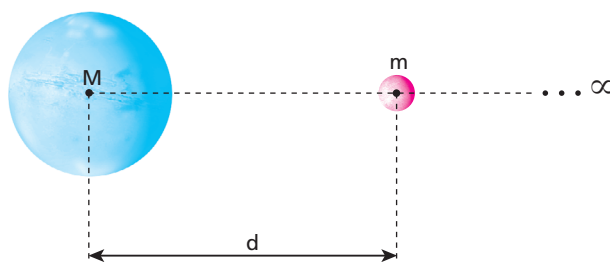
83. Um pequeno bloco de gelo parte do repouso do ponto **A** da superfície hemisférica representada na figura e desce sem sofrer ação de atritos ou da resistência do ar:

Sendo **R** o raio do hemisfério, calcule a que altura **h** do solo o bloco perde o contato com a superfície, passando a se mover sob a ação exclusiva da gravidade $\vec{g}$.

84. (Olimpíada Brasileira de Física) Considere um trilho envergado em forma de arco de circunferência com raio igual a **R** instalado verticalmente, como representa a figura. No local, a aceleração da gravidade tem módulo **g** e a resistência do ar é desprezível.
Supondo-se conhecido o ângulo **θ**, qual deve ser a intensidade da velocidade $\vec{v}_0$ com que se deve lançar um pequeno objeto do ponto **O**, o mais baixo do trilho, para que ele possa deslizar livremente saltando da extremidade **A** para a extremidade **B**, executando assim um movimento periódico?

85. Um esporte radical que fascina muitas pessoas é o *bungee-jump*. Nessa modalidade, a adrenalina aflora à pele quando o praticante, devidamente treinado, projeta-se a partir de grandes alturas atado a uma corda elástica. Considere um jovem de massa 70 kg que vai se deixar cair do parapeito de uma ponte de altura H = 50 m, medida em relação à água de um lago. Admita que o jovem toque seu corpo na água no instante em que a corda, perfeitamente elástica e de comprimento natural L_0 = 10 m, atinge sua máxima distensão (Figura 1).
Depois de várias oscilações, o jovem estabiliza-se e, na situação de repouso, sua altura em relação à água é **h** (Figura 2). Desprezando-se a influência do ar e adotando-se g = 10 m/s^2, determine o valor de **h**.

Apêndice

Energia potencial gravitacional*

Conforme vimos no Tópico 4 (Gravitação), um astro, por ter massa, cria no espaço uma zona de influências sobre outras massas, denominada **campo gravitacional**, cuja intensidade é decrescente com a distância ao astro. Um corpo qualquer situado nesse campo é atraído gravitacionalmente, ficando sujeito a uma força caracterizada pela Lei de Newton.

Teoricamente, o campo gravitacional se estende ao infinito. Para grandes distâncias à superfície do astro, entretanto, a intensidade desse campo é tão pequena que seus efeitos são praticamente desprezíveis.

Considere um astro esférico e homogêneo, de massa **M**, isolado e estacionário no espaço, interagindo gravitacionalmente com uma partícula de massa **m**, situada a uma distância **d** do centro de massa do astro.

* Quando tratamos da interação entre dois astros, preferimos usar a denominação energia potencial **gravitacional**.

O sistema constituído pelo astro e pela partícula armazena uma modalidade de energia mecânica denominada **energia potencial gravitacional**. Trata-se de uma forma latente de energia, isto é, que está sempre prestes a se transformar em energia cinética.

Adotando-se um referencial no infinito (no suposto "fim" do campo gravitacional), pode-se demonstrar que a energia potencial gravitacional E_p associada a esse sistema é dada por:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{d}$$

em que **G** é a Constante da Gravitação.

Dizer que a energia potencial gravitacional do sistema vale $-G\frac{Mm}{d}$ significa que, para deslocar a partícula ao nível zero de energia potencial (infinito), é preciso realizar sobre ela um trabalho $+G\frac{Mm}{d}$.

Admitindo que o astro tenha raio **R** e que a partícula esteja sobre sua superfície, a energia potencial gravitacional do sistema fica expressa por:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{R}$$

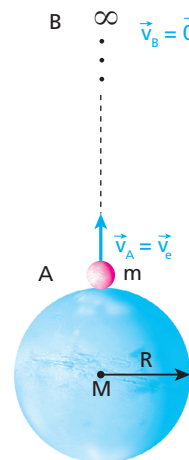
Velocidade de escape

Admita que uma partícula de massa **m** seja lançada sucessivas vezes para cima, a partir da superfície de um astro esférico e homogêneo, de massa **M** e raio **R**, isolado e estacionário no espaço. Despreze as influências atmosféricas.

Os lançamentos são verticais (radiais ao astro) e realizados com velocidades de intensidades crescentes.

Inicialmente, a partícula sobe, atinge velocidade nula no ponto de altura máxima e volta ao solo, atraída gravitacionalmente pelo astro. Entretanto, haverá um lançamento em que a partícula subirá tanto que chegará ao "fim" do campo gravitacional (infinito). Ao chegar a esse ponto, ela apresentará velocidade nula e permanecerá em repouso, não mais retornando ao solo.

Diremos, então, que a partícula escapou da gravidade do astro e, nesse caso, chamaremos a velocidade de lançamento de **velocidade de escape** ($\mathbf{v_e}$).

Para calcularmos v_e, consideremos os elementos da figura a seguir.

O sistema é conservativo, permitindo-nos aplicar o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**.

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{m\,v_e^2}{2} - G\frac{M\,m}{R} = 0$$

$$\frac{v_e^2}{2} = G\frac{M}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G\,M}{R}}$$

Multiplicando e dividindo a fração contida no radical acima por **R**, teremos:

$$v_e = \sqrt{2\frac{G\,M}{R^2}R} \quad \text{(I)}$$

Na Gravitação, vimos que a intensidade da aceleração da gravidade na superfície do astro (g_0) pode ser expressa por:

$$g_0 = \frac{G\,M}{R^2} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$v_e = \sqrt{2\,g_0\,R}$$

Se o astro for a Terra, teremos $g_0 \cong 9{,}81\ \text{m/s}^2$ e $R \cong 6{,}38 \cdot 10^6$ m. Calculemos, então, v_e para a Terra:

$$v_e \cong \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6}\ \text{(m/s)}$$

$$v_e \cong 11{,}2 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 11{,}2\ \text{km/s}$$

É claro que a partícula, se for lançada com velocidade maior que a de escape, chegará ao "fim" do campo gravitacional ainda em movimento e prosseguirá com velocidade constante, por inércia, livre da atração do astro de onde partiu até entrar em zona de influência (campo gravitacional) de um outro astro.

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte
Velocidade de escape (km/s)	3,6	10,2	11,2	5,0

Planeta	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
Velocidade de escape (km/s)	60	36	21	23

Nota:

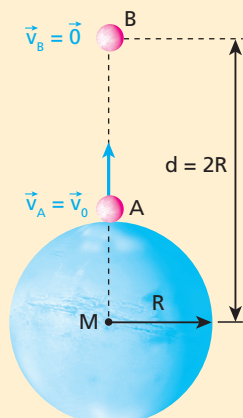
- A velocidade de escape de um buraco negro (estágio final de uma grande estrela que esgotou seu combustível nuclear) é maior que a velocidade da luz no vácuo ($\cong 3{,}0 \cdot 10^5$ km/s), o que justifica o fato de nem mesmo a luz conseguir escapar de sua excepcional influência gravitacional.

Exercícios

nível 1

86. E.R. Um artefato espacial sem propulsão, lançado verticalmente da superfície de um planeta de massa **M** e raio **R**, atinge uma altura máxima igual a **R**. Supondo que o planeta seja isolado, estacionário e sem atmosfera, calcule a intensidade da velocidade de lançamento do artefato. Considere conhecida a Constante da Gravitação **G**.

Resolução:

Sistema conservativo:

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$\frac{m\,v_0^2}{2} - G\frac{M\,m}{R} = -G\frac{M\,m}{2R}$$

$$\frac{v_0^2}{2} = G\frac{M}{R} - G\frac{M}{2R}$$

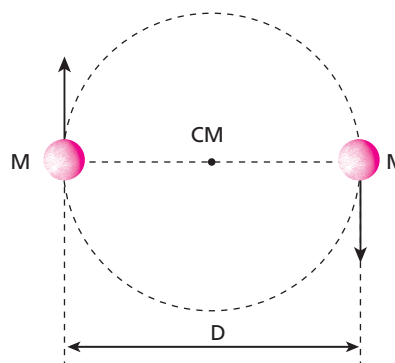
Logo: $$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

87. Um corpo, lançado verticalmente da superfície da Terra (massa **M** e raio **R**), atinge uma altura máxima igual ao triplo do raio terrestre. Supondo a Terra estacionária no espaço, calcule a intensidade da velocidade de lançamento do corpo. Considere conhecida a Constante da Gravitação **G** e admita que, durante o movimento, a única força que age no corpo seja a gravitacional exercida pela Terra.

88. (Puccamp-SP) Calcular o módulo da velocidade que adquiriria um corpo se, partindo do repouso de um ponto **B**, infinitamente afastado, caísse livremente na superfície da Terra, num ponto **A**. Despreze todos os movimentos da Terra (raio igual a $6{,}4 \cdot 10^6$ m), a influência do ar e adote a aceleração da gravidade na superfície do planeta igual a 10 m/s^2.

89. (UFG-GO) Um satélite, lançado da superfície da Terra, é destinado a permanecer em órbita terrestre a uma altura **R**. Supondo que a energia mecânica do satélite seja conservada, que **R** seja o raio da Terra e **g** a aceleração da gravidade em sua superfície, podemos afirmar que o módulo da velocidade de lançamento é:

a) $\left[\frac{3}{2} R\,g\right]^{\frac{1}{2}}$
b) $[2\,g\,R]^{\frac{1}{2}}$
c) $\left[\frac{2}{3} g\,R\right]^{\frac{1}{2}}$
d) $[3\,g\,R]^{\frac{1}{2}}$
e) $\left[\frac{1}{2} g\,R\right]^{\frac{1}{2}}$

90. Na figura, dois corpos celestes de massas iguais a **M**, com centros de massa separados por uma distância **D**, descrevem movimento circular e uniforme em torno do centro de massa (CM) do sistema. As únicas forças a serem consideradas são as de atração gravitacional trocadas entre os dois corpos.

Sendo **G** a Constante da Gravitação, calcule:

a) a energia cinética de um dos corpos em relação ao centro de massa do sistema;
b) a energia de ligação entre os dois corpos. Considere nula a energia potencial gravitacional no caso de a distância entre os dois corpos ser infinita.

Tópico 8

Quantidade de movimento e sua conservação

Bloco 1

1. Impulso de uma força constante

Os impulsos mecânicos estão presentes em uma série de fenômenos do dia a dia, como nas situações em que há empurrões, puxões, impactos e explosões.

Um jogador de futebol, por exemplo, impulsiona a bola no ato de um chute. Seu pé aplica na bola uma força que, agindo durante um certo intervalo de tempo, determina um impulso.

Ao se dar um tiro com uma arma de fogo qualquer, o projétil é impulsionado pelos gases provenientes da detonação do explosivo. Esses gases agem muito rapidamente sobre o projétil, porém de forma intensa, determinando um impulso considerável.

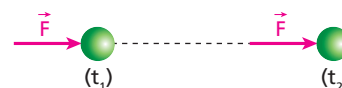
Também recebem impulsos uma flecha ao ser lançada por um arco e uma pedra ao ser disparada por um estilingue.

Um empurrãozinho vai bem!

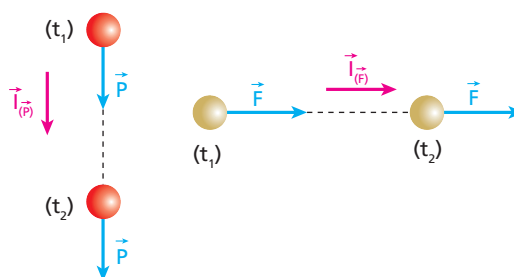
Thinkstock/Getty Images

Ao empurrar a menina no balanço, a mulher exerce sobre ela uma força que, durante o intervalo de tempo do empurrão, produz um impulso.

Em nosso curso vamos nos restringir à definição do **impulso de uma força constante** (intensidade, direção e sentido invariáveis), uma vez que a definição geral dessa grandeza requer elementos de Matemática normalmente não estudados no Ensino Médio.

Para tanto, considere o esquema a seguir, em que uma força $\vec{F}$ constante age sobre uma partícula do instante t_1 ao instante t_2:

O impulso de $\vec{F}$ no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é a grandeza vetorial $\vec{I}$, definida por:

$$\vec{I} = \vec{F}\,\Delta t$$

Sendo Δt um escalar positivo, $\vec{I}$ tem sempre a mesma orientação de $\vec{F}$.

As unidades de impulso decorrem da própria definição:

$$\text{unid (I)} = \text{unid (F)} \cdot \text{unid } (\Delta t)$$

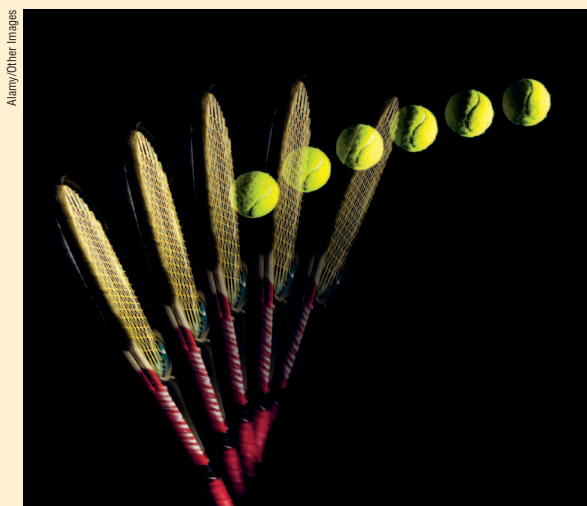
No Sistema Internacional (SI), temos:

$$\text{unid (I)} = \text{newton} \cdot \text{segundo} = \text{N} \cdot \text{s}$$

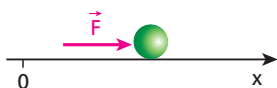
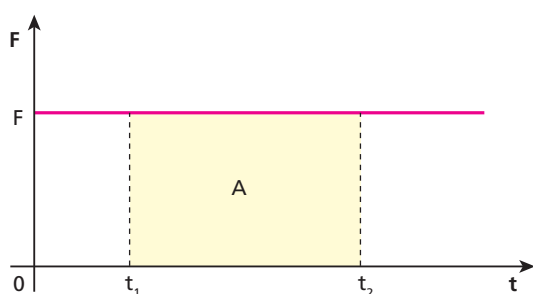
Se a força tiver direção constante, mas intensidade variável, também podemos utilizar a definição particular dada para a grandeza impulso. Basta raciocinar

em termos de uma **força média** que exerça, no mesmo intervalo de tempo, o mesmo efeito dinâmico da força considerada.

Impulsos também no tênis?

Alamy/Other Images

Durante o curto intervalo de tempo em que estabelece contato com as cordas da raquete, uma bola de tênis recebe um impulso de considerável intensidade, capaz de provocar significativas variações de sua velocidade vetorial. O impulso exercido pela raquete sobre a bola tem mesma direção e sentido da força que a raquete aplica sobre ela.

2. Cálculo gráfico do valor algébrico do impulso

Considere o esquema a seguir, em que uma partícula se movimenta ao longo do eixo 0x sob a ação da força $\vec{F}$ constante.

Tracemos o gráfico do valor algébrico de $\vec{F}$ (dado em relação ao eixo 0x) em função do tempo:

Seja a "área" **A** destacada no diagrama. Teria essa "área" algum significado especial? Sim: ela fornece uma medida do valor algébrico do impulso da força $\vec{F}$, desde o instante t_1 até o instante t_2.

De fato, isso pode ser facilmente verificado:

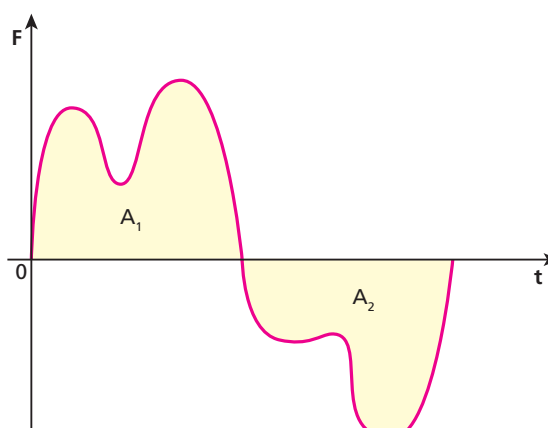
$$A = F\,(t_2 - t_1)$$

Mas $t_2 - t_1$ é o intervalo de tempo Δt considerado. Logo:

$$A = F\,\Delta t$$

Como o produto $F \cdot \Delta t$ corresponde ao valor algébrico do impulso de $\vec{F}$, segue que:

$$A = I$$

Embora a última propriedade tenha sido apresentada com base em um caso simples e particular, sua validade estende-se também a situações em que a força envolvida tem direção constante, porém valor algébrico variável. Nesses casos, entretanto, sua verificação requer um tratamento matemático mais elaborado.

F é o valor algébrico da força responsável pelo impulso.

$$A_1 + A_2 = I$$
(soma algébrica)

Tendo em conta o exposto, podemos fazer a seguinte generalização:

> Dado um diagrama do valor algébrico da força atuante em uma partícula em função do tempo, a "área" compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos expressa o valor algébrico do impulso da força. No entanto, a força considerada deve ter direção constante.

3. Quantidade de movimento

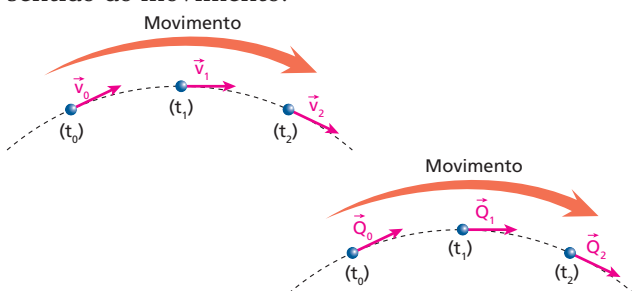
Em diversos fenômenos físicos é necessário agrupar os conceitos de massa e de velocidade vetorial. Isso ocorre, por exemplo, nas colisões mecânicas e nas explosões. Nesses casos, torna-se conveniente a definição de **quantidade de movimento** (ou momento linear), que é uma das grandezas fundamentais da Física.

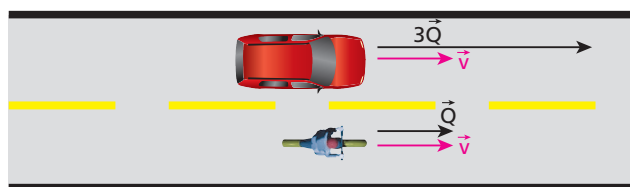
Considere uma partícula de massa **m** que, em certo instante, tem velocidade vetorial igual a $\vec{v}$.

Por definição, a quantidade de movimento da partícula nesse instante é a grandeza vetorial $\vec{Q}$ expressa por:

$$\vec{Q} = m\,\vec{v}$$

A quantidade de movimento é uma grandeza instantânea, já que sua definição envolve o conceito de velocidade vetorial instantânea.

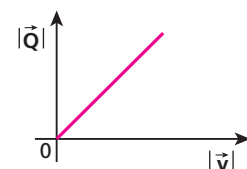
Sendo **m** um escalar positivo, $\vec{Q}$ tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$, isto é, em cada instante é tangente à trajetória e dirigida no sentido do movimento.

Nestas figuras aparece uma partícula nos instantes t_0, t_1 e t_2 do seu movimento curvilíneo. À esquerda estão indicadas as velocidades vetoriais $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e, à direita, as respectivas quantidades de movimento $\vec{Q}_0$, $\vec{Q}_1$ e $\vec{Q}_2$.

Observe a ilustração a seguir.

Nesta figura estamos admitindo que o carro e a moto se movimentam lado a lado, com velocidades iguais. Supondo que a massa do carro seja o triplo da massa da moto, teremos para o carro uma quantidade de movimento de intensidade o triplo da definida para a moto.

É interessante ressaltar que, quanto maior for a intensidade da quantidade de movimento de um corpo, maior será seu "poder de impacto".

Um carro que trafega sob uma forte chuva de granizo geralmente fica bastante danificado, o que certamente não seria verificado sob chuvas líquidas. Isso acontece porque as pedras de gelo que despencam das nuvens – água no estado sólido de massa geralmente maior que a de gotas de água individuais – atingem o veículo com uma quantidade de movimento relativamente intensa, o que, somado à rigidez própria do gelo, determina um maior "poder de impacto", capaz mesmo de causar estragos à lataria.

Um outro exemplo é o de um caminhão a 60 km/h que vai colidir frontalmente com um poste. Esse veículo provocará um dano muito maior ao poste do que aquele que seria observado no impacto frontal de um carro popular igualmente rígido à mesma velocidade.

Para **m** constante, $\vec{Q}$ tem módulo diretamente proporcional ao módulo de $\vec{v}$. O gráfico a seguir representa tal proporcionalidade.

Declividade da reta:

$$\frac{|\vec{Q}|}{|\vec{v}|} = m$$

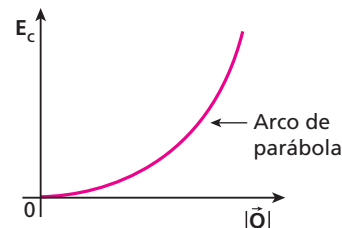
A energia cinética (E_c) pode ser relacionada com o módulo da quantidade de movimento $|\vec{Q}|$, fazendo-se:

$$E_c = \frac{m\,|\vec{v}|^2}{2} \quad \text{(I)}$$

$$|\vec{Q}| = m\,|\vec{v}| \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{|\vec{Q}|}{m} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\frac{|\vec{Q}|}{m}\right)^2 \Rightarrow E_c = \frac{|\vec{Q}|^2}{2m}$$

Para **m** constante, E_c é diretamente proporcional ao quadrado de $|\vec{Q}|$. O gráfico a seguir representa tal proporcionalidade.

As unidades de quantidade de movimento decorrem da própria definição:

$$\text{unid (Q)} = \text{unid (m)} \cdot \text{unid (v)}$$

No Sistema Internacional (SI), temos:

$$\text{unid (Q)} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Quem tem maior quantidade de movimento?

David Madison/Corbis/LatinStock

Nesta fotografia, quatro ciclistas percorrem uma curva do velódromo mantendo, nesse trecho, espaçamento constante entre si (velocidades escalares relativas nulas). Isso significa que suas velocidades em relação ao solo têm intensidades iguais e, por isso, cada quantidade de movimento terá módulo diretamente proporcional à respectiva massa do conjunto ciclista-bicicleta, sendo tangente à trajetória e orientada no sentido do movimento.

4. O teorema do impulso

Um arco dispara uma flecha conferindo-lhe um impulso, que provoca no dardo certa variação de quantidade de movimento. Um jogador de futebol cobra uma falta, imprimindo à bola no momento do chute um forte impulso. Este, por sua vez, determina expressiva variação de quantidade de movimento na bola. Você lança uma pedra e o impulso exercido no ato do lançamento provoca no projétil uma dada variação de quantidade de movimento...

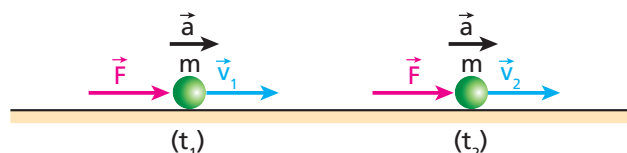
Haveria alguma conexão entre as noções de impulso e variação de quantidade de movimento? Certamente que sim! O Teorema do Impulso, apresentado a seguir, estabelece uma relação matemática entre essas grandezas.

Enunciado:

O impulso da resultante (impulso total) das forças sobre uma partícula é igual à variação de sua quantidade de movimento:

$$\vec{I}_{total} = \Delta\vec{Q} \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{total} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{nicial}$$

Demonstração (particular):

Na figura seguinte, temos uma partícula de massa **m** sujeita à ação da força resultante $\vec{F}$, constante e de mesma orientação que o movimento. Sejam $\vec{a}$ a aceleração comunicada por $\vec{F}$, $\vec{v}_1$, a velocidade inicial da partícula no instante t_1, e $\vec{v}_2$, sua velocidade final no instante t_2.

O impulso de $\vec{F}$ no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é $\vec{I}_{total}$, dado por:

$$\vec{I}_{total} = \vec{F}\,\Delta t \qquad \text{(I)}$$

Como $\vec{F}$ é a resultante, a aplicação do **Princípio Fundamental da Dinâmica** conduz a:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad \text{(II)}$$

Sendo $\vec{F}$ constante, $\vec{a}$ será constante, permitindo escrever que:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II), vem:

$$\vec{F} = m\,\frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo agora (IV) em (I), segue que:

$$\vec{I}_{total} = m\,\frac{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t}\,\Delta t$$

Daí:

$$\vec{I}_{total} = m\,\vec{v}_2 - m\,\vec{v}_1$$

Como os produtos $m\,\vec{v}_2$ e $m\,\vec{v}_1$ são as respectivas quantidades de movimento da partícula nos instantes final (t_2) e inicial (t_1), temos:

$$\vec{I}_{total} = \Delta\vec{Q} \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_{total} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}$$

Embora tenhamos demonstrado o Teorema do Impulso a partir de uma situação simples e particular, sua aplicação é geral, estendendo-se ao cálculo do impulso de forças constantes ou variáveis. Devemos observar apenas que a força, cujo impulso é igual à variação da quantidade de movimento, deve ser a **resultante.**

Podemos dizer, ainda, que o impulso da força resultante é equivalente à soma vetorial dos impulsos de todas as forças que atuam na partícula.

O Teorema do Impulso permite concluir que as unidades N · s e kg · m/s, respectivamente de impulso e quantidade de movimento, são equivalentes. Isso ocorre porque essas grandezas têm as mesmas dimensões físicas.

O Teorema do Impulso aplicado a uma partícula solitária equivale à 2ª Lei de Newton (Princípio Fundamental da Dinâmica).

Beleza e terror

Thinkstock/Getty Images

As erupções vulcânicas, uma das mais espetaculares manifestações da natureza, já fizeram milhares de vítimas ao longo da história, como ocorreu no ano 79 a.C., quando o Vesúvio soterrou a cidade e toda a população de Pompeia (região de Nápoles, sul da Itália).

Quando um vulcão entra em erupção, gases e vapores produzidos em seu interior, submetidos a elevadas temperaturas e pressões, ejetam para fora da cratera lava incandescente, cinza e fragmentos mais leves, que conseguem atingir altitudes estratosféricas (da ordem de 10 km).

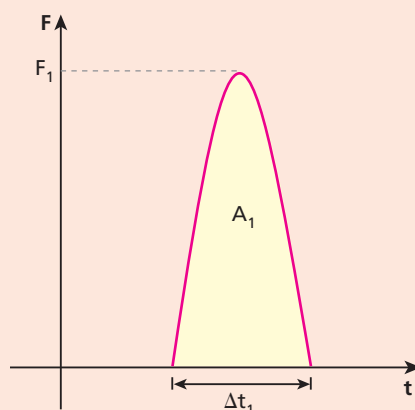
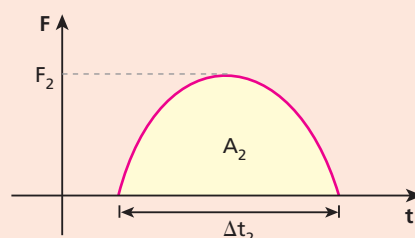
Aplicando ao material expelido por um vulcão o Teorema do Impulso, podemos afirmar que o impulso total entre dois instantes, exercido pela força resultante, é igual à variação da quantidade de movimento desse material.

Air bags: frenagens menos traumáticas

Rick Fischer/Masterfile/Other Images

Nesta fotografia, observa-se um teste de colisão em que um carro equipado com *air bags* se choca contra um obstáculo fixo. No ato do impacto, os *air bags* são prontamente inflados, minimizando os efeitos da inércia de movimento inerente aos corpos situados dentro do veículo. A proteção proporcionada pelo dispositivo ocorre porque, em contato com ele, a frenagem fica suavizada, ocorrendo em um intervalo de tempo maior do que aquele no qual ocorreria sem o equipamento. Com isso, uma mesma variação de quantidade de movimento, obtida em um intervalo de tempo maior, requer uma força de intensidade menor, o que reduz os possíveis danos.

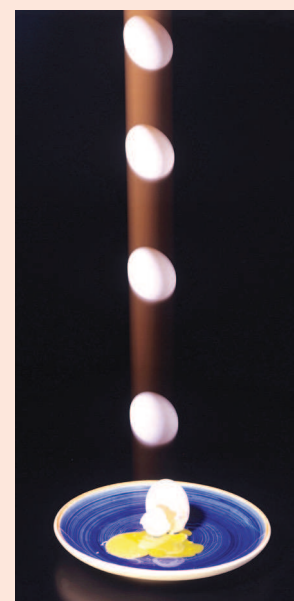
Nos gráficos a seguir você poderá assimilar melhor o que foi dito até aqui. As escalas utilizadas para intensidade de força (**F**) e valores de tempo (**t**) são as mesmas, respectivamente, e, nas duas situações, uma mesma pessoa dentro de um carro vai sofrer uma freada súbita, provocada por uma colisão frontal do veículo. Em ambos os casos a velocidade inicial é a mesma, o que impõe ao corpo da pessoa uma mesma variação de quantidade de movimento até sua completa imobilização. Sendo assim, será exigido, nas duas frenagens, o mesmo impulso de retardamento, o que implica a igualdade entre as áreas A_1 e A_2 destacadas nos dois diagramas.

Situação 1: O carro não está equipado com *air bag* e o corpo da pessoa é freado pelas forças exercidas pelas partes internas rígidas do veículo.

Situação 2: O carro está equipado com *air bag* e o corpo da pessoa é freado pelas forças aplicadas pelo acessório.

Com a utilização do *air bag*, o intervalo de tempo de frenagem é maior, isto é, $\Delta t_2 > \Delta t_1$. Sendo assim, como $A_1 = A_2$, conclui-se que $F_2 < F_1$, o que significa que, com o *air bag*, os possíveis traumas no corpo da pessoa são menores, já que as forças impactantes exercidas sobre ele são de intensidade menor.

Faça você mesmo

A vivência cotidiana e nossa própria intuição deixam claro que, se soltarmos um ovo do repouso a partir de uma altura próxima de 1,5 m sobre um prato de cerâmica dura, ele se esborrachará no choque.

Consiga, agora, um ovo e abandone-o sobre um espesso pedaço de espuma macia ou um amontoado de palha, isopor ou outros materiais amortecedores. Largue-o também a partir de uma altura próxima de 1,5 m. Nessa situação, o ovo terá grandes chances de não se quebrar.

Ora, em ambos os casos, o ovo atinge seu ponto de impacto com velocidade de igual intensidade, $\sqrt{2gh}$, em que o **g** é o módulo da aceleração da gravidade e **h** é a altura inicial de queda (algo em torno de 1,5 m, como propusemos), devendo ser conduzido ao repouso no ato da colisão. Como explicar então que na queda sobre o prato duro o ovo se espatifa e na queda sobre a espuma macia nada ocorre com ele? A resposta está na maneira com que o ovo colide contra seu alvo em cada experimento. Mas, considerando-se que ambos os ovos utilizados tenham massas iguais, que grandezas fisicas se alteram de um caso para o outro? Elabore hipóteses e, com base nos conceitos de impulso e quantidade de movimento, construa uma explicação convincente para o fato.

Richard Megna/Fundamental Photographs

Exercícios

nível 1

1. Um ciclista, junto com sua bicicleta, tem massa de 80 kg. Partindo do repouso de um ponto do velódromo, ele acelera com aceleração escalar constante de 1,0 m/s^2. Qual o módulo da quantidade de movimento do sistema ciclista-bicicleta após 20 s da partida?

2. Considere duas partículas **A** e **B** em movimento com quantidades de movimento constantes e iguais. É necessariamente correto que:

a) as trajetórias de **A** e **B** são retas divergentes.
b) as velocidades de **A** e **B** são iguais.
c) as energias cinéticas de **A** e **B** são iguais.
d) se a massa de **A** for o dobro da de **B**, então, o módulo da velocidade de **A** será metade do de **B**.
e) se a massa de **A** for o dobro da de **B**, então, o módulo da velocidade de **A** será o dobro do de **B**.

3. E.R. Uma partícula de massa 8,0 kg desloca-se em trajetória retilínea, quando lhe é aplicada, no sentido do movimento, uma força resultante de intensidade 20 N. Sabendo que no instante de aplicação da força a velocidade da partícula valia 5,0 m/s, determine:

a) o módulo do impulso comunicado à partícula, durante 10 s de aplicação da força;
b) o módulo da velocidade da partícula ao fim do intervalo de tempo referido no item anterior.

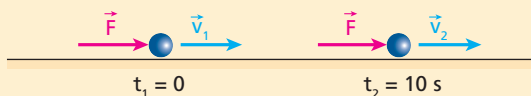
Resolução:

a) A intensidade do impulso da força referida no enunciado, suposta constante, é calculada por $I = F\,\Delta t$

Sendo $F = 20$ N e $\Delta t = 10$ s, calculemos **I**:

$$I = 20 \cdot 10\ (\text{N} \cdot \text{s}) \Rightarrow \boxed{I = 2{,}0 \cdot 10^2\ \text{N} \cdot \text{s}}$$

b) A força aplicada na partícula é a resultante. Por isso, o impulso exercido por ela deve ser igual à variação da quantidade de movimento da partícula (**Teorema do Impulso**):

$\vec{F}$ $\vec{v}_1$ — $t_1 = 0$ $\vec{F}$ $\vec{v}_2$ — $t_2 = 10$ s

$$I = \Delta Q \Rightarrow I = Q_2 - Q_1$$

$$I = m\,v_2 - m\,v_1 \Rightarrow I = m\,(v_2 - v_1)$$

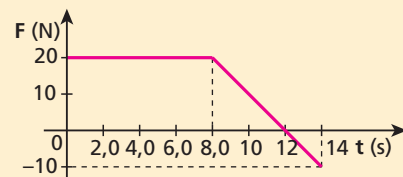
Com $I = 2{,}0 \cdot 10^2$ N · s; $m = 8{,}0$ kg; $v_1 = 5{,}0$ m/s, calculemos v_2:

$$2{,}0 \cdot 10^2 = 8{,}0 \cdot (v_2 - 5{,}0) \Rightarrow \boxed{v_2 = 30\ \text{m/s}}$$

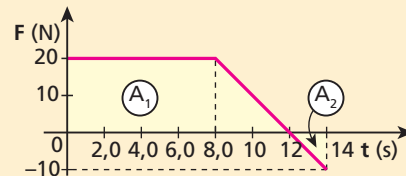
4. Uma bola de bilhar de massa 0,15 kg, inicialmente em repouso, recebeu uma tacada numa direção paralela ao plano da mesa, o que lhe imprimiu uma velocidade de módulo 4,0 m/s. Sabendo que a interação do taco com a bola durou $1{,}0 \cdot 10^{-2}$ s, calcule:

a) a intensidade média da força comunicada pelo taco à bola;
b) a distância percorrida pela bola, enquanto em contato com o taco.

5. (Cefet-MG) Um corpo de massa $m = 10$ kg se movimenta sobre uma superfície horizontal perfeitamente polida, com velocidade escalar $v_0 = 4{,}0$ m/s, quando uma força constante de intensidade igual a 10 N passa a agir sobre ele na mesma direção do movimento, porém em sentido oposto. Sabendo que a influência do ar é desprezível e que quando a força deixa de atuar a velocidade escalar do corpo é $v = -10$ m/s, determine o intervalo de tempo de atuação da força.

6. E.R. Um corpo de massa 38 kg percorre um eixo orientado com velocidade escalar igual a 15 m/s. No instante $t_0 = 0$, aplica-se sobre ele uma força resultante cujo valor algébrico varia em função do tempo, conforme o gráfico seguinte:

Admitindo que a força seja paralela ao eixo, calcule a velocidade escalar do corpo no instante $t = 14$ s.

Resolução:

Determinemos, inicialmente, o valor algébrico do impulso que a força resultante comunica ao corpo de $t_0 = 0$ a $t = 14$ s. Isso pode ser feito calculando-se a "área" destacada no diagrama:

$$I = A_1 + A_2 = \frac{(12 + 8{,}0) \cdot 20}{2} + \frac{2{,}0 \cdot (-10)}{2}$$

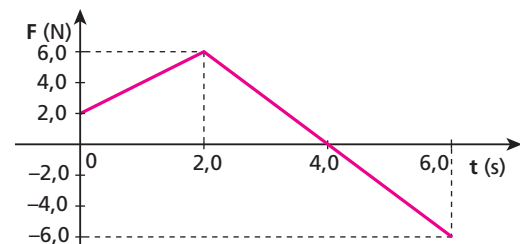
$$I = 190\ \text{N} \cdot \text{s}$$

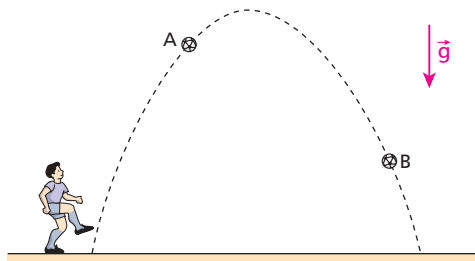
Aplicando ao corpo o **Teorema do Impulso**, vem:

$$I = Q_{14} - Q_0 = m\,v_{14} - m\,v_0$$

Sendo $I = 190$ N · s, $m = 38$ kg e $v_0 = 15$ m/s, calculemos v_{14}, que é a velocidade escalar da partícula no instante $t = 14$ s:

$$190 = 38 \cdot (v_{14} - 15) \Rightarrow \boxed{v_{14} = 20\ \text{m/s}}$$

7. Um carrinho de massa 2,0 kg está em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. No instante $t_0 = 0$, passa a agir sobre ele uma força $\vec{F}$ de direção constante, paralela ao plano, cujo valor algébrico é dado em função do tempo, conforme o gráfico:

Desprezando a influência do ar, determine as velocidades escalares do carrinho nos instantes $t_1 = 2{,}0$ s, $t_2 = 4{,}0$ s e $t_3 = 6{,}0$ s.

8. Um garoto chuta uma bola e esta descreve uma trajetória parabólica, como representa a figura, sob a ação exclusiva do campo gravitacional, considerado uniforme:

Indique a alternativa cuja seta melhor representa a variação da quantidade de movimento da bola entre os pontos **A** e **B**:

a)

b)

c)

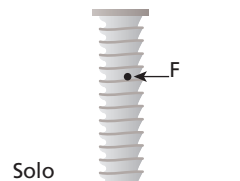
d)

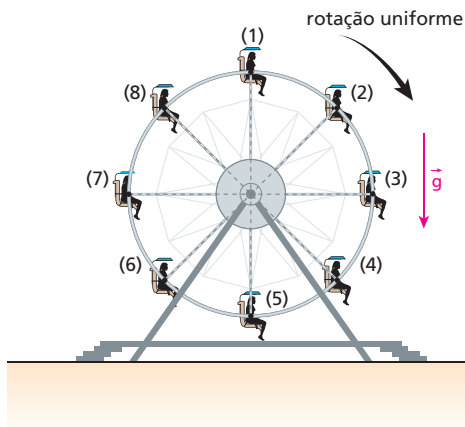
e) Faltam dados para uma conclusão possível.

Exercícios nível 2

9. Uma partícula percorre certa trajetória em movimento uniforme.

a) Podemos afirmar que a energia cinética da partícula é constante?
b) Podemos afirmar que a quantidade de movimento da partícula é constante?

10. Uma formiga **F** sobe com velocidade escalar constante a "rosca" de um grande parafuso, colocado de pé sobre um solo plano e horizontal, como indica a figura. Em relação a um referencial no solo, podemos afirmar que:

a) as energias cinética e potencial de gravidade da formiga permanecem constantes.
b) a energia cinética e a quantidade de movimento da formiga permanecem constantes.
c) a energia cinética da formiga permanece constante, mas sua energia potencial de gravidade aumenta.
d) a quantidade de movimento da formiga permanece constante, mas sua energia potencial de gravidade aumenta.
e) a energia mecânica total da formiga permanece constante.

11. (Unip-SP) Considere uma roda-gigante com movimento de rotação uniforme e formada por oito unidades simetricamente dispostas, como indica a figura.

Todas as unidades são formadas pela cadeira e por uma pessoa e têm pesos iguais.
Considere um sistema de referência fixo no solo terrestre, suposto horizontal.
Analise as proposições a seguir:

(1) A quantidade de movimento de cada unidade permanece constante.
(2) A quantidade de movimento total do sistema formado pelas oito unidades permanece constante.
(3) A energia mecânica de cada unidade permanece constante.
(4) A energia mecânica total do sistema formado pelas oito unidades permanece constante.
(5) A força resultante em cada unidade não realiza trabalho.

Somente está correto o que se afirma em:

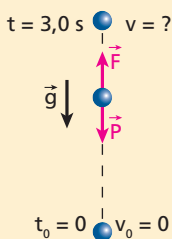
a) (2) e (4)
b) (4) e (5)
c) (1) e (3)
d) (2), (4) e (5)
e) (1), (3) e (5)

12. Considere duas partículas **A** e **B** em movimento com energias cinéticas constantes e iguais. É necessariamente correto que:

a) as trajetórias de **A** e **B** são retas paralelas.
b) as velocidades de **A** e **B** têm módulos iguais.
c) as quantidades de movimento de **A** e **B** têm módulos iguais.
d) se a massa de **A** for o quádruplo da de **B**, então o módulo da quantidade de movimento de **A** será o quádruplo do de **B**.
e) se a massa de **A** for o quádruplo da de **B**, então o módulo da quantidade de movimento de **A** será o dobro do de **B**.

13. A um pequeno bloco que se encontra inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal e lisa aplica-se uma força constante, paralela à mesa, que lhe comunica uma aceleração de 5,0 m/s^2. Observa-se, então, que, 4,0 s após a aplicação da força, a quantidade de movimento do bloco vale 40 kg m/s. Calcule, desprezando o efeito do ar, o trabalho da força referida desde sua aplicação até o instante $t = 4{,}0$ s.

14. E.R. Uma partícula de massa igual a 2,0 kg, inicialmente em repouso sobre o solo, é puxada verticalmente para cima por uma força constante $\vec{F}$, de intensidade 30 N, durante 3,0 s. Adotando $g = 10$ m/s^2 e desprezando a resistência do ar, calcule a intensidade da velocidade da partícula no fim do citado intervalo de tempo.

Resolução:
Apenas duas forças agem na partícula: $\vec{F}$ e $\vec{P}$ (peso).

Aplicando o **Teorema do Impulso**, temos:

$$\vec{I}_{total} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

$$\vec{I}_{(\vec{F})} + \vec{I}_{(\vec{P})} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

Algebricamente:

$$F\,\Delta t - m\,g\,\Delta t = m\,v - m\,v_0$$

Sendo $F = 30$ N, $\Delta t = 3{,}0$ s, $m = 2{,}0$ kg, $g = 10$ m/s^2 e $v_0 = 0$, calculemos o valor de **v**:

$$30 \cdot 3{,}0 - 2{,}0 \cdot 10 \cdot 3{,}0 = 2{,}0\,v$$

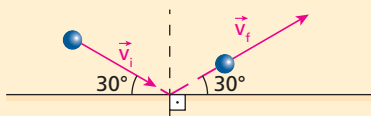
$$\boxed{v = 15 \text{ m/s}}$$

Nota:
- Este problema também poderia ser resolvido aplicando-se a **2ª Lei de Newton**.

15. (Unicamp-SP) As histórias de super-heróis estão sempre repletas de feitos incríveis. Um desses feitos é o salvamento, no último segundo, da mocinha que cai de uma grande altura. Considere a situação em que a desafortunada garota caia, a partir do repouso, de uma altura de 81 m e que nosso super-herói a intercepte 1,0 m antes de ela chegar ao solo, demorando $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ s para detê-la, isto é, para anular sua velocidade vertical. Considere que a massa da mocinha é de 50 kg e despreze a influência do ar.

a) Calcule a força média aplicada pelo super-herói sobre a mocinha para detê-la. Adote $g = 10$ m/s^2.
b) Uma aceleração 8 vezes maior que a da gravidade (8 g) é letal para um ser humano. Determine quantas vezes a aceleração à qual a mocinha foi submetida é maior que a aceleração letal.

16. Uma bola de massa igual a 40 g, ao chegar ao local em que se encontra um tenista, tem velocidade horizontal de módulo 12 m/s. A bola é golpeada pela raquete do atleta, com a qual interage durante $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ s, retornando horizontalmente em sentido oposto ao do movimento inicial. Supondo que a bola abandone a raquete com velocidade de módulo 8,0 m/s, calcule a intensidade média da força que a raquete exerce sobre a bola.

17. E.R. bola de tênis de massa **m** é lançada contra o solo, com o qual interage, refletindo-se em seguida sem perdas de energia cinética. O esquema abaixo representa o evento:

Sabendo que $|\vec{v}_i| = V$ e que a interação tem duração Δt, calcule a intensidade média da força que o solo exerce na bola.

Resolução:
Como não há perdas de energia cinética, temos:

$$|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = V$$

Aplicando à bola o **Teorema do Impulso**, vem:

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q} \Rightarrow \vec{I} = m\,\Delta\vec{v} \quad (I)$$

Mas:

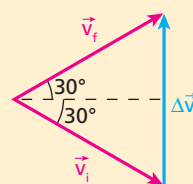
$$\vec{I} = \vec{F}_m\,\Delta t \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), segue que:

$$\vec{F}_m\,\Delta t = m\,\Delta\vec{v} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{m\,\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Em módulo:

$$|\vec{F}_m| = \frac{m\,|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Com base no diagrama vetorial abaixo, determinamos $|\Delta\vec{v}|$:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$

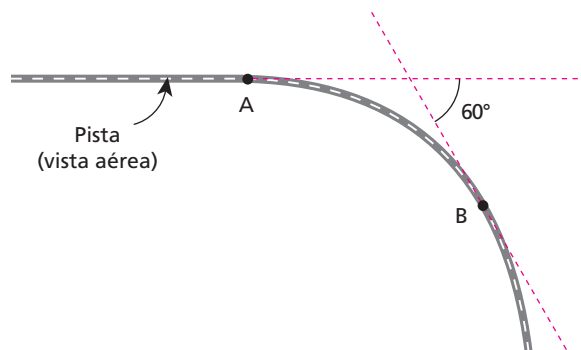
O triângulo formado pelos vetores é equilátero, o que permite escrever:

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = V$$

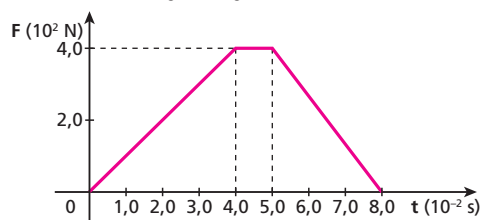
Assim, finalmente, calculamos $|\vec{F}_m|$:

$$\boxed{|\vec{F}_m| = \frac{mV}{\Delta t}}$$

18. Considere um carro de massa igual a $8{,}0 \cdot 10^2$ kg que entra em uma curva com velocidade $\vec{v}_1$ de intensidade 54 km/h e sai dessa mesma curva com velocidade $\vec{v}_2$ de intensidade 72 km/h. Sabendo que $\vec{v}_2$ é perpendicular a $\vec{v}_1$, calcule a intensidade do impulso total (da força resultante) comunicado ao carro.

19. Um carro de massa igual a 1,0 tonelada percorre uma pista como a esquematizada na figura, deslocando-se do ponto **A** ao ponto **B** em movimento uniforme, com velocidade de intensidade igual a 90 km/h.

Sabendo que o comprimento do trecho **AB** é igual a 500 m, calcule:

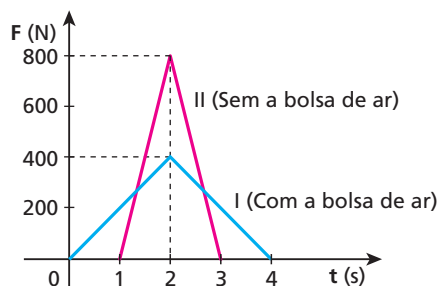
a) o intervalo de tempo gasto pelo carro no percurso de **A** até **B**;
b) a intensidade da força capaz de provocar a variação de quantidade de movimento sofrida pelo carro de **A** até **B**.

20. Ao cobrar uma falta, um jogador de futebol chuta uma bola de massa igual a $4,5 \cdot 10^2$ g. No lance, seu pé comunica à bola uma força resultante de direção constante, cuja intensidade varia com o tempo, conforme o seguinte gráfico:

Em $t_0 = 0$ (início do chute) a bola estava em repouso. Calcule:

a) o módulo da quantidade de movimento da bola no instante $t_1 = 8,0 \cdot 10^{-2}$ s (fim do chute);

b) o trabalho da força que o pé do jogador exerce na bola.

21. (UFRN) Alguns automóveis dispõem de um eficiente sistema de proteção para o motorista, que consiste de uma bolsa inflável de ar. Essa bolsa é automaticamente inflada, do centro do volante, quando o automóvel sofre uma desaceleração súbita, de modo que a cabeça e o tórax do motorista, em vez de colidirem com o volante, colidem com ela.

A figura a seguir mostra dois gráficos da variação temporal da intensidade da força que age sobre a cabeça de um boneco que foi colocado no lugar do motorista. Os dois gráficos foram registrados em duas colisões de testes de segurança. A única diferença entre essas colisões é que, na colisão I, se usou a bolsa e, na colisão II, ela não foi usada.

Da análise desses gráficos, indique a alternativa que melhor conclui a explicação para o sucesso da bolsa como equipamento de proteção:

a) A bolsa diminui o intervalo de tempo da desaceleração da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.

b) A bolsa aumenta o intervalo de tempo da desaceleração da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.

c) A bolsa diminui o módulo do impulso total transferido para a cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força máxima que atua sobre a cabeça.

d) A bolsa diminui a variação total do momento linear da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.

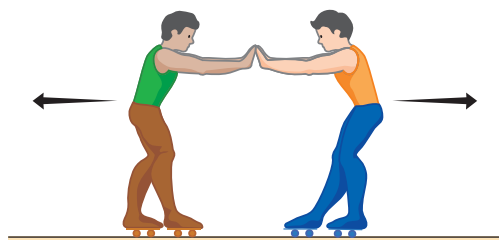
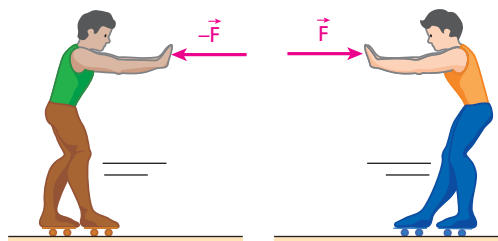
e) A bolsa aumenta a variação total do momento linear da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.

Bloco 2

5. Sistema mecânico isolado

Um sistema mecânico é denominado **isolado de forças externas** quando a resultante das forças externas atuantes sobre ele for nula.

Uma partícula em equilíbrio é o caso mais elementar de sistema mecânico isolado. Estando em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, a resultante das forças que agem sobre ela é nula.

Vejamos outro exemplo: admita que dois patinadores, inicialmente em repouso sobre uma plataforma plana e horizontal, se empurrem mutuamente, conforme sugere a figura.

Desprezando os atritos e a influência do ar, os dois patinadores constituem um sistema mecânico isolado, pois a resultante das forças externas atuantes no conjunto é nula. De fato, as únicas forças externas que agem em cada patinador são a força da gravidade (peso) e a força de sustentação da plataforma (normal), que se equilibram.

Entretanto, uma pergunta surge naturalmente: as forças trocadas entre eles no ato do empurrão não seriam resultantes, uma vez que cada patinador, pela ação da força recebida, tem seu corpo acelerado a partir do repouso? E a resposta é simples: sim, essas forças (ação e reação) são as resultantes que aceleram **cada corpo**, porém são **forças internas** ao sistema, não devendo ser consideradas no estudo do sistema como um todo.

De fato, a soma dos impulsos das forças internas $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ (forças de ação e reação trocadas pelos patinadores no ato do mútuo empurrão) é **nula** e, por isso, essas forças não participam da composição do impulso total externo exercido sobre o sistema.

6. O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

As leis mais importantes e gerais da Física são os **princípios de conservação**, dentre os quais destacamos o da conservação da energia, o da conservação da quantidade de movimento (ou momento linear), o da conservação do momento angular e o da conservação da carga elétrica.

Veremos, agora, o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, mas, antes da apresentação formal de seu enunciado, analisemos a situação a seguir.

Consideremos um pequeno bote em repouso nas águas tranquilas de um lago. Admitamos que no local não haja correnteza nem ventos. Um homem está parado na proa da embarcação. Você pode concluir então que, nessa situação, a quantidade de movimento total do sistema homem-bote é nula. De repente, o homem lança-se horizontalmente, mergulhando diretamente na água. O que ocorre com o bote? Tomando-se por base uma série de ocorrências similares de nosso dia a dia, a resposta imediata seria: a embarcação é impulsionada para trás, em sentido oposto ao da velocidade do homem.

Nesse contexto, desprezando-se a resistência da água ao movimento do bote, houve a conservação da quantidade de movimento total do sistema homem-bote, que permaneceu nula do início ao final do episódio. Se somarmos vetorialmente as quantidades de movimento do homem e do bote em qualquer instante, desde o momento imediatamente anterior ao mergulho até a situação imediatamente posterior, a soma será nula.

Isso ocorre porque estamos diante de um sistema isolado de forças externas, como foi descrito na seção anterior, e, em casos assim, deve ocorrer a conservação da quantidade de movimento total do sistema.

A conservação da quantidade de movimento também pode ser notada no mundo atômico, como acontece no decaimento radioativo alfa, em que o núcleo de um dos isótopos radioativos do urânio (U^{232}), inicialmente em repouso, se divide em um núcleo de tório e uma partícula alfa (núcleo de hélio), que adquirem movimento em sentidos opostos de modo que a quantidade de movimento total do sistema se mantém igual a zero.

A validade desse princípio fundamental ainda pode ser verificada nas imensidões cósmicas, por ocasião das explosões estelares ou das colisões entre asteroides e astros maiores, como planetas e satélites.

Se fosse possível ouvir sons no espaço, este teria sido um grande estrondo...

REUTERS/Latinstock

No dia 4 de julho de 2005 ocorreu uma espetacular trombada sideral, a cerca de 132 milhões de quilômetros da Terra. Um veículo-projétil (Impactor) do tamanho de uma máquina de lavar roupas, com massa de 130 kg e feito predominantemente de cobre, disparado da sonda norte-americana Deep Impact (Impacto Profundo) atingiu em cheio, a 37 mil km/h, o núcleo do cometa Temple I (raio próximo de 3 km), abrindo uma cratera do tamanho de um campo de futebol. Uma imensa nuvem de fragmentos brilhantes espalhou-se pelos arredores, o que foi fotografado em alta definição pelas câmeras acopladas a dois telescópios instalados na nave mãe, que permaneceu à distância segura de 500 mil quilômetros do local do choque.

A análise dessas imagens trará preciosas informações sobre a constituição dos cometas, que sabidamente carregam gases, poeira, gelo e compostos orgânicos. Será estudado também se um processo como esse é capaz de desviar um asteroide eventualmente em rota de colisão com a Terra.

No breve intervalo de tempo da colisão, o sistema constituído pelo cometa e pelo veículo-projétil é isolado de forças externas, aplicando-se a ele um dos mais importantes conceitos físicos: o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento.

Enuncia-se que:

Em um sistema mecânico isolado de forças externas, conserva-se a quantidade de movimento total.

$$\Delta\vec{Q} = \vec{0}, \text{ ou}$$

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Façamos a verificação desse enunciado. Segundo o Teorema do Impulso, temos:

$$\vec{I}_{total} = \Delta\vec{Q}$$

Entretanto, em um sistema mecânico isolado, a resultante das forças externas é nula, o que permite dizer que o impulso total (da força resultante externa) também é nulo. Então:

$$\vec{I}_{total} = \vec{0}$$

Assim, temos:

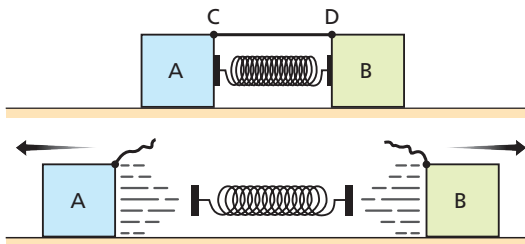
$$\Delta\vec{Q} = \vec{0}$$

Ou, de modo equivalente:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Vejamos alguns exemplos típicos em que se aplica o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento.

Exemplo 1:

Considere o esquema seguinte, em que dois blocos, **A** e **B**, amarrados pelo fio **CD**, repousam sobre uma superfície horizontal e sem atrito. Os blocos estão inicialmente separados por uma mola ideal, que se encontra comprimida.

Admita que, em determinado instante, o fio **CD** seja cortado. O que ocorre? A mola distende-se bruscamente, impulsionando um bloco para cada lado.

Desprezando a influência do ar, temos, nesse caso, um sistema isolado de forças externas (as forças que os blocos recebem da mola são internas ao sistema), o que possibilita dizer que, nele, a quantidade de movimento total permanece constante.

Assim:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Como os blocos estavam inicialmente em repouso, temos $\vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$.

Logo:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$$

Ou: $\vec{Q}_A = -\vec{Q}_B$ (movimentos em sentidos opostos).

Em módulo, temos:

$$Q_A = Q_B$$

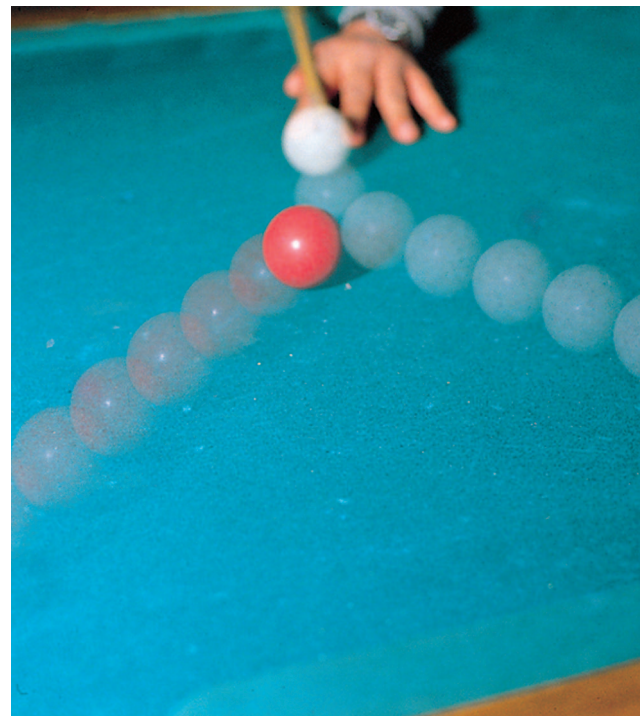
Sendo m_A e v_A, m_B e v_B, respectivamente, a massa e o módulo da velocidade de **A** e **B**, vem:

$$m_A\, v_A = m_B\, v_B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

Observe que se $m_B > m_A$, teremos $v_B < v_A$. Na situação estudada, as velocidades e as respectivas massas são inversamente proporcionais.

Exemplo 2:

Na fotografia seguinte, duas bolas de bilhar realizam uma colisão mecânica.

Thales Trigo

Fotografia mostrando bolas de bilhar ao realizarem uma colisão mecânica.

Por causa da breve duração da interação (da ordem de 10^{-2} s), os impulsos de eventuais forças externas – atritos, por exemplo – sobre cada bola são desprezíveis. Assim, essas forças não alteram de modo significativo a quantidade de movimento total do sistema, que permanece praticamente constante desde imediatamente antes da colisão até imediatamente após sua ocorrência.

Portanto, é correto afirmar que, nessa colisão, o sistema é isolado de forças externas, valendo o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

De modo geral, os corpos que participam de uma colisão mecânica podem ser considerados um sistema isolado de forças externas, o que possibilita aplicar o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento.

Exemplo 3:

Outra situação importante em que podemos aplicar o Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento é a de uma explosão.

Também nesse caso, em razão da breve duração do fenômeno, os impulsos de eventuais forças externas são desprezíveis, não alterando de modo significativo a quantidade de movimento total do sistema, que se conserva, obedecendo à equação:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Na explosão de uma bomba, a soma vetorial das quantidades de movimento dos fragmentos imediatamente após o evento deve ser igual à quantidade de movimento inicial do artefato.

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + ... = \vec{Q}_{inicial}$$

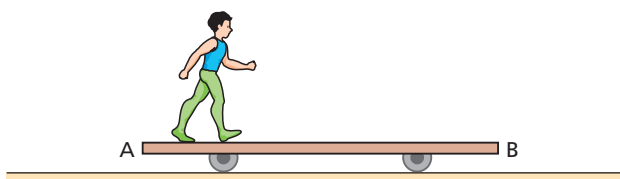
Getty Images/Purestock

Fotografia mostrando a explosão de uma bomba.

Notas:

- Nos exemplos vistos, em virtude da existência de forças internas aos sistemas, as quantidades de movimento de suas partes variam e apenas a quantidade de movimento total (soma vetorial das quantidades de movimento parciais) permanece constante.
- Não se deve confundir **sistema isolado** com **sistema conservativo**. Observe que nem todo sistema isolado é conservativo e nem todo sistema conservativo é isolado.
- O Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento é muito amplo, porém, aplicado a um sistema de duas partículas isoladas de forças externas, conduz a resultados equivalentes àqueles obtidos pela aplicação da 3ª e da 2ª leis de Newton, o Princípio da Ação e Reação e o Princípio Fundamental da Dinâmica, respectivamente.

Exercícios — nível 1

22. Considere o esquema a seguir, em que, inicialmente, tanto o homem quanto o carrinho estão em repouso em relação ao solo. No local não há ventos e a influência do ar é desprezível. O carrinho é livre para se mover para a esquerda ou para a direita sobre trilhos horizontais, sem atrito.

Em determinado instante, o homem sai do ponto **A** e dirige-se para o ponto **B**, movendo-se na direção do eixo longitudinal do carrinho. Admitindo que, ao chegar a **B**, o homem para em relação ao carrinho, analise as seguintes proposições:

(01) A quantidade de movimento total do sistema constituído pelo homem e pelo carrinho é nula em qualquer instante.

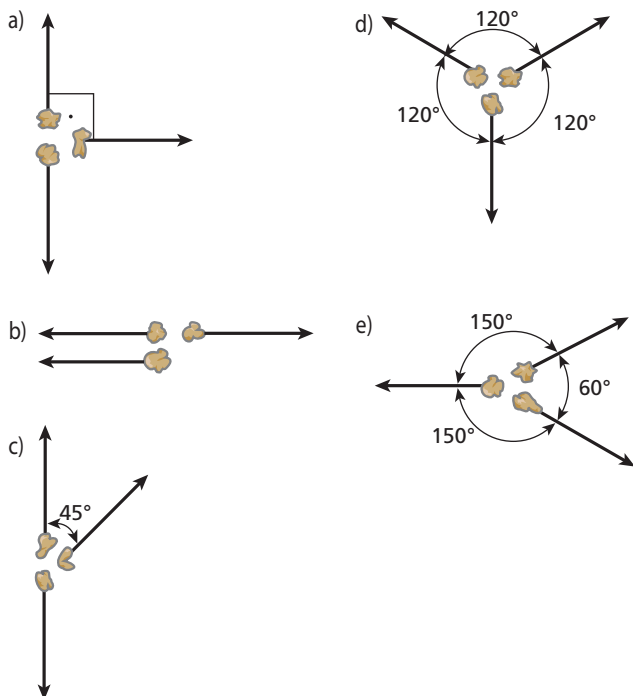
(02) Enquanto o homem dirige-se do ponto **A** para o ponto **B**, sua quantidade de movimento é não nula e oposta à do carrinho.

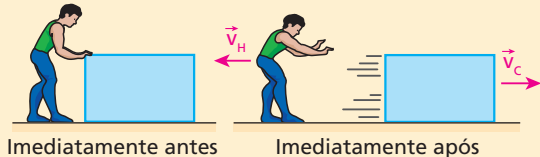
(04) Enquanto o homem dirige-se do ponto **A** para o ponto **B**, sua velocidade é não nula e oposta à do carrinho.

(08) Ao atingir o ponto **B**, o homem para em relação ao carrinho e este, por sua vez, para em relação ao solo.

(16) Após a chegada do homem a **B**, o sistema prossegue em movimento retilíneo e uniforme, por inércia.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

23. Uma bomba, inicialmente em repouso, explode, fragmentando-se em três partes que adquirem quantidades de movimento coplanares de intensidades iguais. Qual das alternativas a seguir melhor representa a situação das partes da bomba imediatamente após a explosão?

24. E.R. Sobre um plano horizontal e perfeitamente liso, repousam, frente a frente, um homem e uma caixa de massas respectivamente iguais a 80 kg e 40 kg. Em dado instante, o homem empurra a caixa, que se desloca com velocidade de módulo 10 m/s. Desprezando a influência do ar, calcule o módulo da velocidade do homem após o empurrão.

Resolução:

Nos elementos componentes do sistema (homem e caixa), a resultante das forças externas é nula. Por isso, o sistema é **isolado**, o que permite aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Como $\vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$ (o sistema estava inicialmente em repouso), temos que:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}$$

Daí, vem:

$$\vec{Q}_H + \vec{Q}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_H = -\vec{Q}_C$$

Considerando apenas os módulos das quantidades de movimento, pode-se escrever:

$$Q_H = Q_C \Rightarrow m_H\, v_H = m_C\, v_C$$

Então:

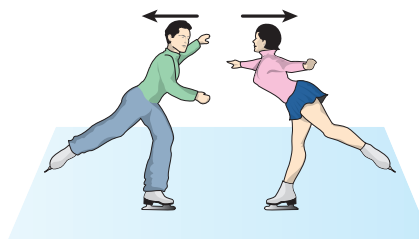
$$\frac{v_H}{v_C} = \frac{m_C}{m_H}$$

Sendo $v_C = 10$ m/s, $m_C = 40$ kg e $m_H = 80$ kg, calculemos v_H:

$$\frac{v_H}{10} = \frac{40}{80} \Rightarrow \boxed{v_H = 5{,}0 \text{ m/s}}$$

Nota:

- Nesse caso e em situações similares, as velocidades adquiridas pelos corpos têm intensidades inversamente proporcionais às respectivas massas.

25. (UFPE) Um casal participa de uma competição de patinação sobre o gelo. Em dado instante, o rapaz, de massa igual a 60 kg, e a garota, de massa igual a 40 kg, estão parados e abraçados frente a frente. Subitamente, o rapaz dá um empurrão na garota, que sai patinando para trás com uma velocidade de módulo igual a 0,60 m/s. Qual o módulo da velocidade do rapaz ao recuar, como consequência desse empurrão? Despreze o atrito com o chão e o efeito do ar.

26. (Uema) No dia 04/07/2010, uma emissora de TV apresentou uma matéria sobre uma sacola que foi encontrada na rodoviária de São Paulo, com suspeita de conter uma bomba em seu interior. A polícia foi acionada e a equipe do GATE (Grupo de Ações Táticas Especiais) usou um robozinho para retirar a sacola do local e, em seguida, fazer os procedimentos de desativação do artefato. Ao ser detonado, supõe-se que 3/5 de massa do artefato foi expelida com uma velocidade de módulo 40 m/s, e a outra parte foi expelida com uma velocidade de módulo:

a) 40 m/s
b) 30 m/s
c) 20 m/s
d) 60 m/s
e) 120 m/s

27. Um astronauta de massa 70 kg encontra-se em repouso numa região do espaço em que as ações gravitacionais são desprezíveis. Ele está fora de sua nave, a 120 m dela, mas consegue mover-se com o auxílio de uma pistola que dispara projéteis de massa 100 g, os quais são expelidos com velocidade de $5{,}6 \cdot 10^2$ m/s. Dando um único tiro, qual o menor intervalo de tempo que o astronauta leva para atingir sua nave, suposta em repouso?

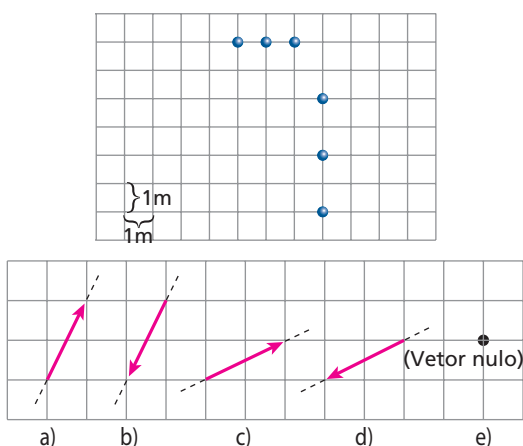
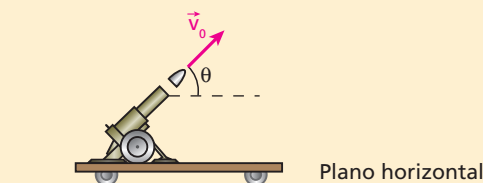
28. (Acafe-SC) Num ringue de patinação, dois patinadores, João, com massa de 84 kg, e Maria, com massa 56 kg, estão abraçados e em repouso sobre a superfície do gelo, ligados por um fio inextensível de 10,0 m de comprimento. Desprezando-se o atrito entre os patinadores e a superfície do gelo, é correto afirmar que, se eles se empurrarem, passando a descrever movimentos retilíneos uniformes em sentidos opostos, a distância, em metros, percorrida por Maria, antes de o fio se romper, é:

a) 4,0
b) 5,0
c) 6,0
d) 8,0
e) 10,0

29. (UFPE) Uma menina de 40 kg é transportada na garupa de uma bicicleta de 10 kg, a uma velocidade constante de módulo 2,0 m/s, por seu irmão de 50 kg. Em dado instante, a menina salta para trás com velocidade de módulo 2,5 m/s em relação ao solo. Após o salto, o irmão continua na bicicleta, afastando-se da menina. Qual o módulo da velocidade da bicicleta, em relação ao solo, imediatamente após o salto? Admita que durante o salto o sistema formado pelos irmãos e pela bicicleta seja isolado de forças externas.

a) 3,0 m/s
b) 3,5 m/s
c) 4,0 m/s
d) 4,5 m/s
e) 5,0 m/s

Exercícios nível 2

30. (FMABC-SP) Duas esferas idênticas, que deslizam sem atrito sobre uma superfície plana e horizontal, estão prestes a se chocar. A figura representa, para cada esfera, as posições ocupadas nos instantes 3, 2 e 1 segundos que antecedem ao choque. Admitindo-se que o choque entre elas seja perfeitamente elástico e que o movimento seja uniforme antes e depois do choque, qual dos vetores seguintes melhor representa a direção e o sentido do vetor quantidade de movimento total do sistema formado pelas esferas após o choque?

31. E.R. Um canhão, juntamente com o carrinho que lhe serve de suporte, tem massa **M**. Com o conjunto em repouso, dispara-se obliquamente um projétil de massa **m**, que, em relação ao solo, desliga-se do canhão com uma velocidade de módulo v_0, inclinada de um ângulo θ com a horizontal. A figura abaixo retrata o evento:

Desprezando os atritos, determine o módulo da velocidade de recuo do conjunto canhão-carrinho.

Resolução:

Segundo a direção horizontal, o sistema é isolado de forças externas, o que permite aplicar a essa direção o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

mas $\vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$ (o conjunto estava inicialmente em repouso), logo:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_C + \vec{Q}_P = \vec{0}$$

Daí:

$\vec{Q}_C = -\vec{Q}_P$ (movimentos horizontais em sentidos opostos)

Em módulo:

$$Q_C = Q_P \Rightarrow M\,v_C = m\,v_{0_h}$$

Na última equação, v_{0_h} é o módulo da componente horizontal de $\vec{v}_0$.

Sendo $v_{0_h} = v_0 \cos\theta$, vem:

$$M\,v_C = m\,v_0 \cos\theta \Rightarrow \boxed{v_C = \frac{m}{M}\,v_0 \cos\theta}$$

Nota:

- Na direção vertical, o sistema canhão-projétil **não é isolado** de forças externas. Isso ocorre devido à **força impulsiva** exercida pelo solo no ato do disparo. Essa força, que atua apenas durante o curtíssimo intervalo de tempo da explosão, tem intensidade significativa, produzindo um impulso considerável que modifica a quantidade de movimento nessa direção.

32. Um garoto de massa 48 kg está de pé sobre um *skate* de massa 2,0 kg, inicialmente em repouso sobre o solo plano e horizontal. Em determinado instante, ele lança horizontalmente uma pedra de massa 5,0 kg, que adquire uma velocidade de afastamento (relativa ao garoto) de módulo 11 m/s. Sendo v_G e v_P, respectivamente, os módulos da velocidade do garoto e da pedra em relação ao solo imediatamente após o lançamento, calcule v_G e v_P.

33. (Unicamp-SP) Imagine a seguinte situação: um dálmata corre e pula para dentro de um pequeno trenó, até então parado, caindo nos braços de sua dona. Em consequência, o trenó começa a se movimentar.

Considere os seguintes dados:

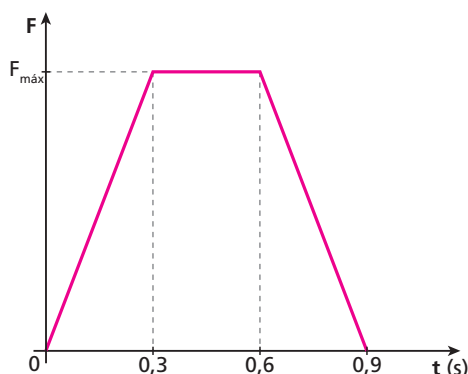
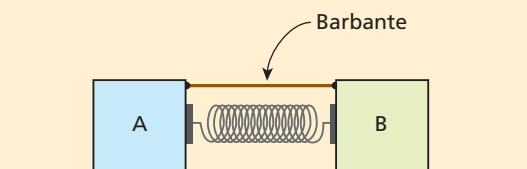
I. A massa do cachorro é de 10 kg;
II. A massa do conjunto trenó + moça é de 90 kg;
III. A velocidade horizontal do cachorro imediatamente antes de ser agarrado por sua dona é de 18 km/h.

a) Desprezando-se o atrito entre o trenó e o gelo, bem como a influência do ar, determine a velocidade horizontal do sistema trenó + moça + cachorro imediatamente após o cachorro ter caído nos braços de sua dona.
b) Determine a variação da energia cinética do sistema no processo.

34. (Unicamp-SP) O lixo espacial é composto de partes de naves espaciais e satélites fora de operação abandonados em órbita ao redor da Terra. Esses objetos podem colidir com satélites, além de pôr em risco astronautas em atividades extraveiculares.

Considere que, durante um reparo na estação espacial, um astronauta substitui um painel solar, de massa $m_P = 80$ kg, cuja estrutura foi danificada. O astronauta estava inicialmente em repouso em relação à estação e ao abandonar o painel no espaço,lança-o com uma velocidade de módulo $v_P = 0,15$ m/s.

a) Sabendo-se que a massa do astronauta é $m_a = 60$ kg, calcule o módulo de sua velocidade de recuo.

b) O gráfico abaixo mostra, de forma simplificada, o módulo da força aplicada pelo astronauta sobre o painel em função do tempo durante o lançamento. Sabendo-se que a variação de momento linear é igual ao impulso, cujo módulo pode ser obtido pela área do gráfico, calcule a intensidade da força máxima $F_{máx}$.

35. E.R. Dois blocos **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 4,0 kg, encontram-se em repouso sobre um plano horizontal perfeitamente polido. Entre os blocos, há uma mola de massa desprezível, comprimida, que está impedida de expandir-se devido a um barbante que conecta os blocos.

Em determinado instante, queima-se o barbante e a mola se expande, impulsionando os blocos. Sabendo que o bloco **B** adquire velocidade de intensidade 3,0 m/s e que a influência do ar é desprezível, determine:

a) a intensidade da velocidade adquirida pelo bloco **A**;

b) a energia potencial elástica armazenada na mola antes da queima do barbante.

Resolução:

a) O sistema é isolado de forças externas, o que permite aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento:**

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Com o sistema inicialmente em repouso, porém, temos:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$$

Logo: $\vec{Q}_{final} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_A + \vec{Q}_B = \vec{0}$

Assim: $\vec{Q}_A = -\vec{Q}_B$ (movimentos em sentidos opostos)

Em módulo: $Q_A = Q_B \Rightarrow m_A v_A = m_B v_B$

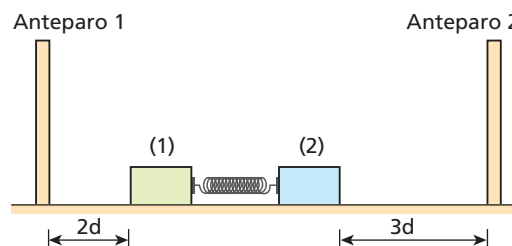
Sendo $m_A = 2,0$ kg, $m_B = 4,0$ kg e $v_B = 3,0$ m/s, calculemos v_A:

$$2,0\, v_A = 4,0 \cdot 3,0 \Rightarrow \boxed{v_A = 6,0 \text{ m/s}}$$

b) A energia elástica armazenada inicialmente na mola pode ser calculada somando-se as energias cinéticas adquiridas pelos blocos:

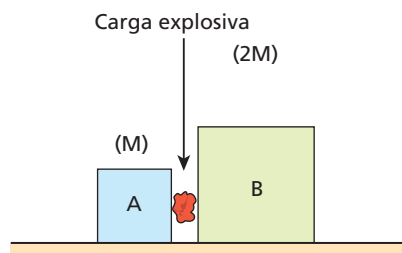
$$E_e = E_{c_A} + E_{c_B} \Rightarrow E_e = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2}$$

$$E_e = \frac{2,0 \cdot (6,0)^2}{2} + \frac{4,0 \cdot (3,0)^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_e = 54 \text{ J}}$$

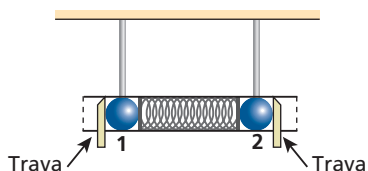
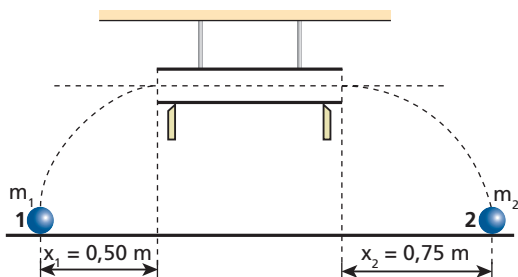
36. Na figura, os blocos 1 e 2 têm massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 4,0 kg e acham-se inicialmente em repouso sobre um plano horizontal e liso. Entre os blocos, existe uma mola leve de constante elástica igual a $1,5 \cdot 10^2$ N/m, comprimida de 20 cm e impedida de distender-se devido a uma trava:

Em dado instante, a trava é liberada e a mola, ao se distender bruscamente, impulsiona os blocos, que, depois de percorrerem as distâncias indicadas, colidem com os anteparos. Não considerando o efeito do ar, determine:

a) a relação entre os intervalos de tempo gastos pelos blocos 1 e 2 para atingirem os respectivos anteparos;

b) as energias cinéticas dos blocos depois de perderem o contato com a mola.

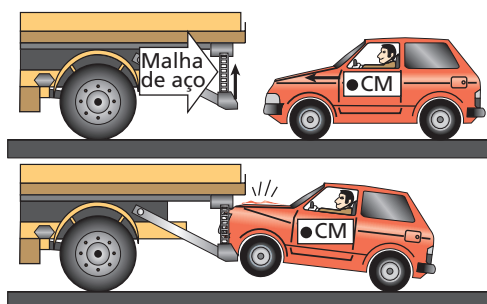
37. (UFV-MG) Dois blocos, **A** e **B**, feitos de materiais idênticos, um com massa **M** e o outro com massa **2M**, encontram-se inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e com atrito, separados por uma carga explosiva de massa desprezível. A situação inicial do sistema está ilustrada na figura abaixo.

Após a explosão da carga, o bloco **A** percorre uma distância **L**, deslizando pela superfície até parar. É **correto** afirmar que a distância percorrida pelo bloco **B** será:

a) 4L. b) 2L. c) L. d) $\frac{L}{2}$. e) $\frac{L}{4}$.

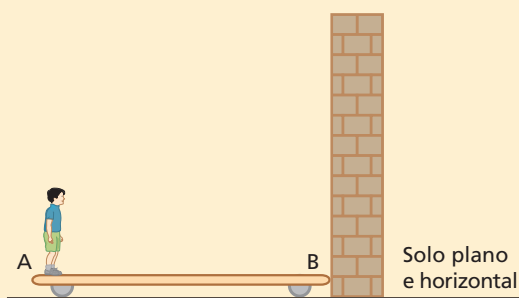
38. (Unesp-SP) A figura representa duas esferas, **1** e **2**, de massas m_1 e m_2, respectivamente, comprimindo uma mola e sendo mantidas por duas travas dentro de um tubo horizontal.

Quando as travas são retiradas simultaneamente, as esferas **1** e **2** são ejetadas do tubo, com velocidades de módulos v_1 e v_2, respectivamente, e caem sob a ação da gravidade. A esfera 1 atinge o solo num ponto situado à distância $x_1 = 0{,}50$ m, t_1 segundos depois de abandonar o tubo, e a esfera **2**, à distância $x_2 = 0{,}75$ m, t_2 segundos depois de abandonar o tubo, conforme indicado na figura seguinte.

Desprezando a massa da mola e quaisquer atritos, determine:

a) as razões $\frac{t_2}{t_1}$ e $\frac{v_2}{v_1}$;

b) a razão $\frac{m_2}{m_1}$.

39. (Unicamp-SP) O chamado "para-choque alicate" foi projetado e desenvolvido na Unicamp com o objetivo de minimizar alguns problemas com acidentes. No caso de uma colisão de um carro contra a traseira de um caminhão, a malha de aço de um para-choque alicate instalado no caminhão prende o carro e o ergue do chão pela plataforma, evitando, assim, o chamado "efeito guilhotina". Imagine a seguinte situação: um caminhão de 6000 kg está a 54,0 km/h e o automóvel que o segue, de massa igual a 2000 kg, está a 72,0 km/h. O automóvel colide contra a malha, subindo na rampa. Após o impacto, os veículos permanecem engatados um ao outro.

a) Qual o módulo da velocidade dos veículos imediatamente após o impacto?

b) Qual a fração da energia cinética inicial do automóvel que foi transformada em energia potencial gravitacional, sabendo-se que o centro de massa do veículo subiu 50 cm? Adote $g = 10$ m/s^2.

40. E.R. Na situação esquematizada na figura, um garoto de massa 40 kg está posicionado na extremidade **A** de uma prancha de madeira, de massa 120 kg, dotada de rodas, que tem sua extremidade **B** em contato com um muro vertical. O comprimento **AB** da prancha é igual a 6,0 m.

Em determinado instante, o garoto começa a caminhar de **A** para **B** com velocidade de módulo 1,2 m/s em relação à prancha.

Admitindo que o sistema garoto-prancha seja isolado de forças externas e que o garoto pare de caminhar ao atingir a extremidade **B**, calcule:

a) o módulo da velocidade da prancha em relação ao solo enquanto o garoto caminha de **A** para **B**;

b) a distância **x** entre a extremidade **B** da prancha e o muro no instante em que o garoto atinge a extremidade **B**.

Resolução:

a) Sendo o sistema garoto-prancha isolado de forças externas, aplica-se o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**.

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{Q}_{final}$$

Com o sistema inicialmente em repouso, porém, temos:

$$\vec{Q}_{inicial} = \vec{0}$$

Logo: $\vec{Q}_{final} = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q}_G + \vec{Q}_P = \vec{0}$

$\vec{Q}_G = -\vec{Q}_P$ (movimentos em sentidos opostos)

Em módulo: $Q_G = Q_P \Rightarrow m_G v_G = m_P v_P$

Sendo $m_G = 40$ kg e $m_P = 120$ kg, vem:

$$40\, v_G = 120\, v_P \Rightarrow \boxed{v_G = 3\, v_P} \quad \text{(I)}$$

Mas: $v_G + v_P = 1{,}2$ (II)

(I) em (II): $3\,v_P + v_P = 1{,}2 \Rightarrow v_P = 0{,}30$ m/s

ou $v_P = 30$ cm/s

b)

No esquema, **x** e **y** caracterizam, respectivamente, as distâncias percorridas pela prancha e pelo garoto em relação ao solo.

$$x + y = 6{,}0 \quad \text{(III)}$$

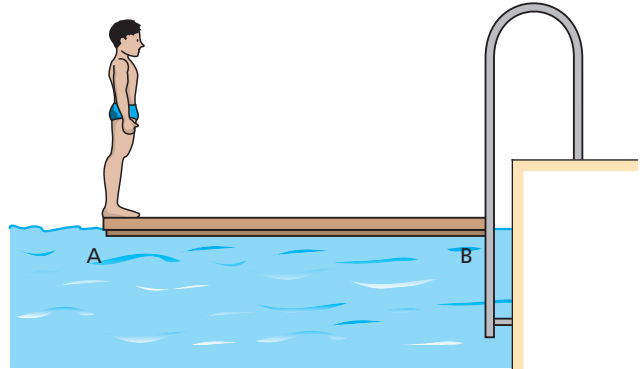
$$Q_G = Q_P \Rightarrow m_G\,v_G = m_P\,v_P$$

Como as velocidades do garoto e da prancha são constantes, temos:

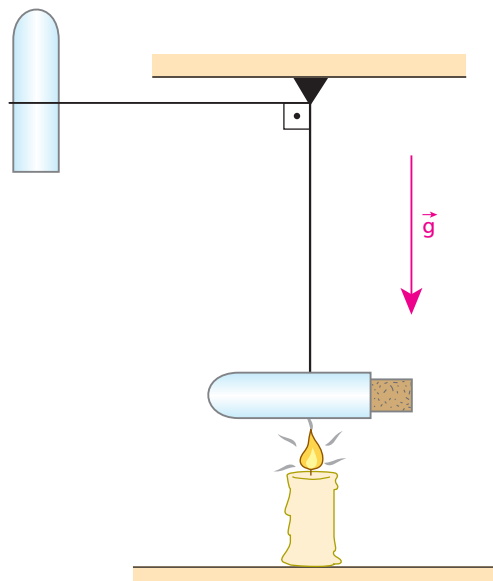
$$40\,\frac{y}{\Delta t} = 120\,\frac{x}{\Delta t} \Rightarrow y = 3x \quad \text{(IV)}$$

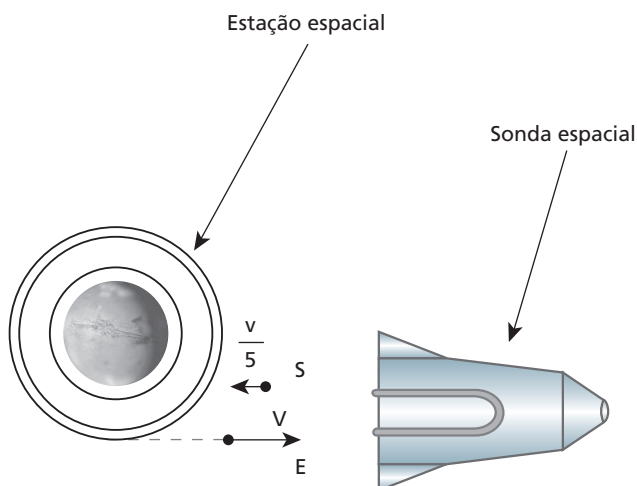
Substituindo (IV) em (III), vem:

$$x + 3x = 6{,}0 \Rightarrow x = 1{,}5 \text{ m}$$

41. A figura abaixo representa um homem de massa 60 kg, de pé sobre uma prancha de madeira, de massa 120 kg, em repouso na água de uma piscina. Inicialmente, o homem ocupa o ponto **A**, oposto de **B**, onde a prancha está em contato com a escada.

Em determinado instante, o homem começa a andar, objetivando alcançar a escada. Não levando em conta os atritos entre a prancha e a água, ventos ou correntezas, e considerando para a prancha comprimento de 1,5 m, calcule:

a) a relação entre os módulos das quantidades de movimento do homem e da prancha, enquanto o homem não alcança o ponto **B**;
b) a distância **x** do homem à escada, depois de ter atingido o ponto **B**;
c) o módulo da velocidade escalar média do homem em relação à escada e em relação à prancha, se, ao se deslocar de **A** até **B**, ele gasta 2,0 s.

42. (Vunesp-SP) Um tubo de massa **M** contendo uma gota de éter de massa desprezível é suspenso por meio de um fio leve, de comprimento **L**, conforme ilustrado na figura. No local, despreza-se a influência do ar sobre os movimentos e adota-se para o módulo da aceleração da gravidade o valor **g**. Calcule o módulo da velocidade horizontal mínima com que a rolha de massa **m** deve sair do tubo aquecido para que ele atinja a altura do seu ponto de suspensão.

43. (UnB-DF) Novos sistemas de propulsão de foguetes e de sondas espaciais estão sempre sendo estudados pela Nasa. Um dos projetos utiliza o princípio de atirar e receber bolas de metal para ganhar impulso. O sistema funcionaria da seguinte forma: em uma estação espacial, um disco, girando, atiraria bolas metálicas, a uma velocidade de 7 200 km/h. Uma sonda espacial as receberia e as mandaria de volta ao disco da estação. Segundo pesquisadores, esse sistema de receber e atirar bolas de metal poderia ser usado para dar o impulso inicial a naves ou sondas espaciais que já estivessem em órbita.

(Adaptado de: Jornal *Folha de S.Paulo*.)

Considere uma sonda espacial com massa de 1 tonelada, em repouso em relação a uma estação espacial, conforme ilustra a figura acima. Suponha que a sonda receba, pela entrada **E**, uma bola de 10 kg, atirada a 7 200 km/h pelo disco da estação, e a devolva, pela saída **S**, com um quinto do módulo da velocidade inicial. Calcule, em m/s, o módulo da velocidade da sonda em relação à estação no instante em que a bola é devolvida.

44. Um barco de massa **M**, pilotado por um homem de massa **m**, atravessa um lago de águas tranquilas com velocidade constante $\vec{v}_0$. Em dado instante, pressentindo perigo, o homem atira-se à água, desligando-se do barco com velocidade $-2\vec{v}_0$, medida em relação às margens do lago. Nessas condições, a velocidade do barco imediatamente após o homem ter-se atirado à água é mais bem expressada por:

a) $\frac{2m}{M}\vec{v}_0$

b) $\frac{m}{M}\vec{v}_0$

c) $\frac{(M + 3m)}{M}\vec{v}_0$

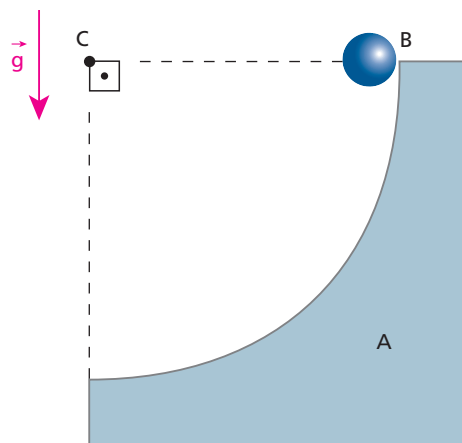
d) $\frac{(M - m)}{M}\vec{v}_0$

e) $\frac{(M + 2m)}{M}\vec{v}_0$

45. Considere uma espaçonave em movimento retilíneo, com velocidade escalar de $2,0 \cdot 10^3$ m/s numa região de influências gravitacionais desprezíveis. Em determinado instante, ocorre uma explosão e a espaçonave se fragmenta em duas partes, **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a **M** e **2M**. Se a parte **A** adquire velocidade escalar de $8,0 \cdot 10^3$ m/s, qual a velocidade escalar adquirida pela parte **B**?

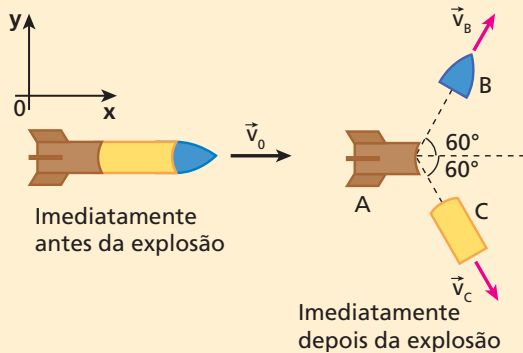
46. Uma bomba, em queda vertical nas proximidades da superfície terrestre, explode no instante em que a intensidade de sua velocidade é 20 m/s. A bomba fragmenta-se em dois pedaços, **A** e **B**, de massas respectivamente iguais a 2,0 kg e 1,0 kg. Sabendo que, imediatamente após a explosão, o pedaço **A** se move para baixo, com velocidade de intensidade 32 m/s, determine:

a) a intensidade e o sentido da velocidade do pedaço **B** imediatamente depois da explosão;
b) o aumento da energia mecânica do sistema devido à explosão.

47. Na figura, o bloco **A** (massa **4M**) e a esfera **B** (massa **M**) encontram-se inicialmente em repouso, com **A** apoiado em um plano horizontal:

Largando-se a esfera **B** na posição indicada, ela desce, descrevendo uma trajetória circular ($\frac{1}{4}$ de circunferência) de 1,0 m de raio e centro em **C**. Desprezando todos os atritos, bem como a influência do ar, e adotando $|\vec{g}| = 10$ m/s², determine os módulos das velocidades de **A** e de **B** no instante em que a esfera perde o contato com o bloco.

48. Uma caixa de massa $1,0 \cdot 10^2$ kg, inicialmente vazia, desloca-se horizontalmente sobre rodas num plano liso, com velocidade constante de 4,0 m/s. Em dado instante, começa a chover e as gotas, que caem verticalmente, vão-se depositando na caixa, que é aberta.

a) Qual a velocidade da caixa depois de ter alojado $3,0 \cdot 10^2$ kg de água?
b) Se no instante em que a caixa contém $3,0 \cdot 10^2$ kg parar de chover e for aberto um orifício no seu fundo, por onde a água possa escoar, qual será a velocidade final da caixa depois do escoamento de toda a água?

49. E.R. Na situação do esquema seguinte, um míssil move-se no sentido do eixo **Ox** com velocidade $\vec{v}_0$, de módulo 40 m/s. Em dado instante, ele explode, fragmentando-se em três partes **A**, **B** e **C** de massas **M**, **2M** e **2M**, respectivamente:

Sabendo que, imediatamente após a explosão, as velocidades das partes **B** e **C** valem $v_B = v_C = 110$ m/s, determine as características da velocidade vetorial da parte **A**, levando em conta o referencial **Oxy**.

Resolução:

Como a explosão do míssil constitui um **sistema isolado de forças externas**, podemos aplicar o Princípio da **Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Segundo a direção Oy, podemos escrever:

$$\vec{Q}'_{y_A} + \vec{Q}'_{y_B} + \vec{Q}'_{y_C} = \vec{Q}_{y_A} + \vec{Q}_{y_B} + \vec{Q}_{y_C}$$

$$M\,v'_{y_A} + 2M\,v \cdot \text{sen } 60° - 2M\,v \cdot \text{sen } 60° = 0$$

$$M\,v'_{y_A} = 0 \Rightarrow v'_{y_A} = 0$$

O último resultado leva-nos a concluir que, segundo a direção Oy, a velocidade vetorial do fragmento **A** não apresenta componente imediatamente após a explosão.

Segundo a direção Ox, podemos escrever:

$$\vec{Q}'_{x_A} + \vec{Q}'_{x_B} + \vec{Q}'_{x_C} = \vec{Q}_{x_A} + \vec{Q}_{x_B} + \vec{Q}_{x_C}$$

$$M\,v'_{x_A} + 2M\,v \cdot \cos 60° + 2M\,v \cdot \cos 60° = 5M\,v_0$$

$$v'_{x_A} + 4v \cdot \cos 60° = 5v_0$$

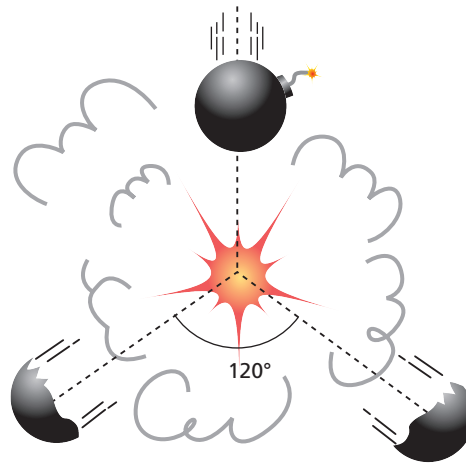
$$v'_{x_A} + 4v\,\frac{1}{2} = 5v_0 \Rightarrow v'_{x_A} = 5v_0 - 2v$$

Sendo $v_0 = 40$ m/s e $v = 110$ m/s, calculemos v'_{x_A}, que é a componente, segundo Ox, da velocidade vetorial do fragmento **A** imediatamente após a explosão:

$$v'_{x_A} = 5 \cdot 40 - 2 \cdot 110 \Rightarrow \boxed{v'_{x_A} = -20 \text{ m/s}}$$

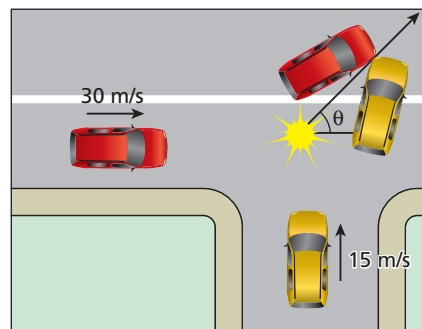
Tendo em vista os valores obtidos para v'_{y_A} e v'_{x_A}, devemos responder:

Imediatamente após a explosão, o fragmento **A** tem velocidade na direção do eixo Ox, sentido oposto ao do referido eixo e módulo de 20 m/s.

50. (PUC-SP) O rojão representado na figura tem, inicialmente, ao cair, velocidade vertical de módulo 20 m/s. Ao explodir, divide-se em dois fragmentos de massas iguais, cujas velocidades têm módulos iguais e direções que formam entre si um ângulo de 120°.
Dados: sen 30° = cos 60° = 0,50; cos 30° = sen 60° ≅ 0,87.

O módulo da velocidade, em m/s, de cada fragmento, imediatamente após a explosão, será:

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

51. (Unisa-SP) Um navio que se encontra inicialmente em repouso explode em três pedaços. Dois dos pedaços, de massas iguais, partem em direções perpendiculares entre si, com velocidades de módulo 100 km/h. Supondo que a massa do terceiro pedaço seja o triplo da massa de um dos outros dois, qual o valor aproximado do módulo de sua velocidade imediatamente após a explosão?

52. (UEPB) Em um cruzamento da cidade de Campina Grande, durante uma manhã de muita chuva, um automóvel compacto com massa de 1 600 kg que se deslocava de Oeste para Leste, com uma velocidade de módulo 30 m/s, colidiu com uma picape (camionete) com massa de 2 400 kg que se deslocava do Sul para o Norte, avançando o sinal vermelho, com uma velocidade de módulo 15 m/s, conforme a figura abaixo. Felizmente, todas as pessoas, nesses veículos, usavam cintos de segurança e ninguém se feriu. Porém, os dois veículos se engavetaram e passaram a se mover, após a colisão, como um único corpo, numa direção entre Leste e Norte. Desprezando-se o atrito entre os veículos e a pista, o módulo da velocidade dos carros unidos após a colisão, em m/s, foi de:

a) 15
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

Bloco 2

7. Introdução ao estudo das colisões mecânicas

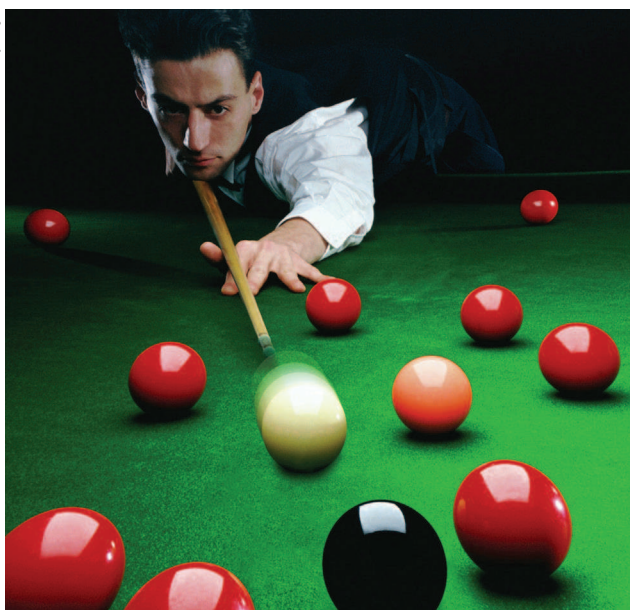
Um jogo de sinuca é um excelente cenário para observarmos um bom número de colisões mecânicas. As bolas, lançadas umas contra as outras, interagem, alterando as características de seus movimentos iniciais.

As colisões mecânicas têm, em geral, breve duração. Quando batemos um prego usando um martelo, por exemplo, o intervalo de tempo médio de contato entre o martelo e o prego em cada impacto é da ordem de 10^{-2} s.

Duas fases podem ser distinguidas em uma colisão mecânica: a de **deformação** e a de **restituição**. A primeira tem início no instante em que os corpos entram em contato, passando a se deformar mutuamente, e termina quando um corpo para **em relação ao outro**. Nesse instante começa a segunda fase, que tem seu fim no momento em que os corpos se separam. A fase de restituição, entretanto, não ocorre em todas as colisões. Em uma batida entre dois automóveis que não se separam após o choque, por exemplo, praticamente não há restituição.

Dizemos que uma colisão mecânica é **unidimensional** (ou **frontal**) quando os centros de massa dos corpos se situam sobre uma mesma reta antes e depois do choque. Em nosso estudo, trataremos preferencialmente das colisões unidimensionais.

Taxi/Getty Images

Em um jogo de sinuca, o domínio de um jogador sobre as colisões que ocorrem entre as bolas pode levá-lo à vitória.

8. Quantidade de movimento e energia mecânica nas colisões

Conforme comentamos na seção 6 deste capítulo, os corpos que participam de qualquer tipo de colisão mecânica podem ser considerados um **sistema isolado de forças externas**.

De fato, recordemos que, em razão da breve duração da interação, os impulsos das eventuais forças externas sobre o sistema são praticamente desprezíveis, não modificando de modo sensível a quantidade de movimento total.

Portanto, para qualquer colisão, podemos aplicar o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, que significa o seguinte:

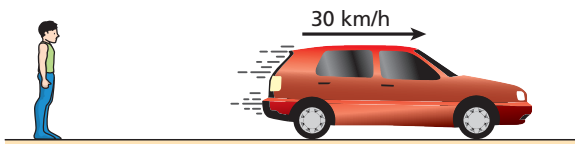
> Em qualquer tipo de colisão mecânica, a quantidade de movimento total do sistema mantém-se constante. A quantidade de movimento imediatamente após a interação é igual à quantidade de movimento imediatamente antes:
>
> $$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

É importante observar, entretanto, que, embora a quantidade de movimento total se conserve nas colisões, o mesmo não ocorre, necessariamente, com a energia mecânica (cinética) total do sistema. Quando dois corpos colidem, há, geralmente, degradação de energia mecânica (cinética) em energia térmica, acústica e trabalho de deformação permanente, dentre outras dissipações. Por isso, na maior parte das situações, os corpos que participam de uma colisão mecânica constituem um **sistema dissipativo**.

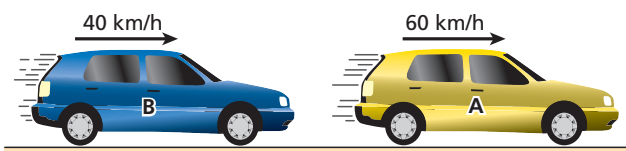
Excepcionalmente, porém, no caso de as perdas de energia mecânica serem desprezíveis — e somente nesse caso —, os corpos que participam da colisão constituem um **sistema conservativo**.

Ratificando, pois, frisemos que os corpos que participam de colisões mecânicas constituem normalmente sistemas isolados, sendo sistemas conservativos apenas excepcionalmente.

9. Velocidade escalar relativa entre duas partículas que percorrem uma mesma reta

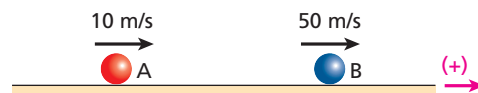
Considere a figura a seguir, em que um carro trafega em uma rua, tendo seu velocímetro indicando permanentemente 30 km/h.

A velocidade acusada pelo velocímetro do veículo é referente ao solo, ou seja, é dada, por exemplo, em relação a uma pessoa que, parada na calçada, observa o carro passar.

Movimentos no mesmo sentido

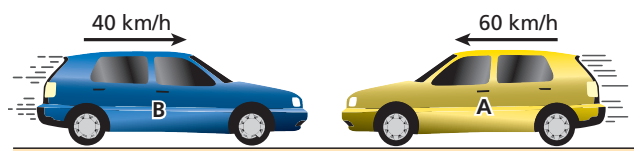
Considere, agora, o caso em que dois carros, **A** e **B**, trafegam por uma mesma avenida retilínea, no mesmo sentido. Admita que os módulos das velocidades escalares de **A** e **B** em relação ao solo sejam, respectivamente, 60 km/h e 40 km/h, com **A** à frente de **B**.

Se o motorista do carro **B** observar o carro da frente, verá este afastar-se dele com uma velocidade escalar de módulo 20 km/h, tudo se passando como se ele próprio estivesse parado e apenas o carro **A** se movesse a 20 km/h. Diz-se então que, no caso, a velocidade escalar relativa entre os dois carros tem módulo 20 km/h.

Podemos, assim, afirmar que:

> Se duas partículas percorrem uma mesma reta no mesmo sentido, o módulo da velocidade escalar relativa entre elas é dado pelo módulo da diferença entre as velocidades escalares das duas, medidas em relação ao solo.

Exemplo 1:

Exemplo 2:

Movimentos em sentidos opostos

Imagine agora uma outra situação, em que os carros **A** e **B** trafegam por uma mesma estrada retilínea, em sentidos opostos. Sejam 60 km/h e 40 km/h, respectivamente, os módulos das velocidades escalares de **A** e de **B** em relação ao solo.

Se o motorista do carro **B** observar o carro **A**, verá este aproximar-se dele com uma velocidade escalar de módulo 100 km/h, tudo se passando como se ele próprio estivesse parado e apenas o carro **A** se movesse ao seu encontro a 100 km/h. Diz-se, então, que, no caso, a velocidade escalar relativa entre os dois carros tem módulo 100 km/h.

Dessa forma, podemos afirmar que:

Se duas partículas percorrem uma mesma reta em sentidos opostos, o módulo da velocidade escalar relativa entre elas é dado pela soma dos módulos das velocidades escalares das duas, medidas em relação ao solo.

Exemplo 3:

$$|v_{r_{A,B}}| = |v_A| + |v_B|$$

$$|v_{r_{A,B}}| = |10| + |-50| \Rightarrow |v_{r_{A,B}}| = 60 \text{ m/s}$$

Exemplo 4:

$$|v_{r_{A,B}}| = |v_A| + |v_B|$$

$$|v_{r_{A,B}}| = |-10| + |50| \Rightarrow |v_{r_{A,B}}| = 60 \text{ m/s}$$

Nota:

- Os critérios apresentados para o cálculo da velocidade escalar relativa são aplicáveis somente aos casos em que as partículas têm velocidades muito menores que a da luz no vácuo ($c \cong 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s). Para partículas dotadas de grandes velocidades, os efeitos relativísticos não podem ser desprezados e os critérios de cálculo sofrem alterações, como se estuda em **Física Moderna**.

10. Coeficiente de restituição ou de elasticidade (e)

Sejam $|v_{r_{af}}|$ e $|v_{r_{ap}}|$, respectivamente, os módulos das velocidades escalares relativas de **afastamento** (após a colisão) e de **aproximação** (antes da colisão) de duas partículas que realizam uma colisão unidimensional. O **coeficiente de restituição ou de elasticidade** (**e**) para a referida colisão é definido pelo quociente:

$$e = \frac{v_{r_{af}}}{v_{r_{ap}}}$$

Notas:

- O coeficiente de restituição (**e**) não depende da massa, mas dos materiais dos corpos que participam da colisão.
- O coeficiente de restituição (**e**) é adimensional por ser calculado pelo quociente de duas grandezas medidas nas mesmas unidades.
- Pode-se demonstrar que:

$$0 \leqslant e \leqslant 1$$

11. Classificação das colisões quanto ao valor de *e*

De acordo com o valor assumido pelo coeficiente de restituição **e**, as colisões mecânicas unidimensionais classificam-se em duas categorias: **elásticas** e **inelásticas**.

Colisões elásticas (ou perfeitamente elásticas)

Constituem uma situação ideal em que o coeficiente de restituição é máximo, isto é:

$$e = 1$$

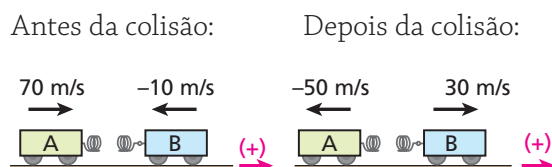
Sendo $e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|}$, decorre que:

$$1 = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} \Rightarrow |v_{r_{af}}| = |v_{r_{ap}}|$$

Em uma colisão elástica, as partículas aproximam-se (antes da colisão) e afastam-se (depois da colisão) com a mesma velocidade escalar relativa, em módulo.

Exemplo 1:

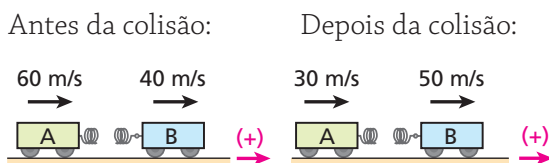
Antes da colisão: 70 m/s (A), –10 m/s (B), (+)

Depois da colisão: –50 m/s (A), 30 m/s (B), (+)

$$|v_{r_{ap}}| = 70 + 10 \qquad |v_{r_{ap}}| = 50 + 30$$

$$|v_{r_{ap}}| = 80 \text{ m/s} \qquad |v_{r_{ap}}| = 80 \text{ m/s}$$

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} = \frac{80}{80} \Rightarrow e = 1$$

Exemplo 2:

Antes da colisão: Depois da colisão:

$$|v_{r_{ap}}| = 60 - 40 \qquad |v_{r_{af}}| = 50 - 30$$

$$|v_{r_{ap}}| = 20 \text{ m/s} \qquad |v_{r_{af}}| = 20 \text{ m/s}$$

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} = \frac{20}{20} \Rightarrow \boxed{e = 1}$$

Nas colisões elásticas, o sistema, além de isolado, também é conservativo. A energia mecânica (cinética) total do sistema, imediatamente após a interação, é igual à energia mecânica (cinética) total do sistema imediatamente antes da interação.

Colisão elástica $\Rightarrow$ Sistema conservativo

$$E_{c_{final}} = E_{c_{inicial}}$$

Nas colisões elásticas, não há degradação de energia mecânica do sistema. Durante a fase de deformação há transformação de energia cinética em energia potencial elástica. Durante a fase de restituição ocorre o processo inverso, isto é, a energia potencial elástica armazenada é totalmente reconvertida em energia cinética.

Colisões inelásticas

(A) Colisões totalmente inelásticas

São aquelas em que o coeficiente de restituição é nulo:

$$\boxed{e = 0}$$

Sendo $e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|}$, decorre que:

$$0 = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} \Rightarrow \boxed{|v_{r_{af}}| = 0}$$

Nas colisões totalmente inelásticas, como a velocidade escalar relativa de afastamento tem módulo nulo, concluímos que, após a interação, os corpos envolvidos **não se separam.**

Exemplo 3:

Antes da colisão:

$$|v_{r_{ap}}| = 80 + 60$$

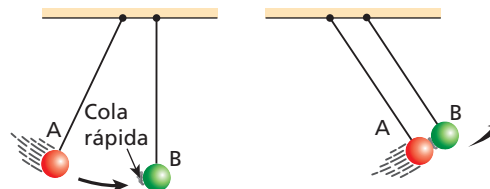
$$|v_{r_{ap}}| = 140 \text{ km/h}$$

Depois da colisão:

$$|v_{r_{af}}| = 0$$

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} = \frac{0}{140} \Rightarrow \boxed{e = 0}$$

Exemplo 4:

Pelo fato de os corpos permanecerem unidos (juntos) após uma colisão totalmente inelástica, inexiste a fase de restituição, ocorrendo apenas a fase de deformação.

Como não há separação entre as partículas após a colisão, temos $|v_{r_{af}}| = 0$ e $e = 0$.

Os corpos que participam de colisões totalmente inelásticas constituem sistemas dissipativos. A energia mecânica (cinética) total imediatamente após a interação é menor que a energia mecânica (cinética) total imediatamente antes da interação.

Colisão totalmente inelástica $\Rightarrow$ Sistema dissipativo

$$E_{c_{final}} < E_{c_{inicial}}$$

Destaquemos que, nas colisões totalmente inelásticas, a dissipação de energia mecânica é relativamente grande. Há casos, como o esquematizado no exemplo 3, em que toda a energia mecânica se degrada, transformando-se em calor, ruído e trabalho de deformação permanente, dentre outras formas de energia, havendo, portanto, dissipação total.

(B) Colisões parcialmente elásticas

São aquelas em que o coeficiente de restituição se situa entre zero e um:

$$0 < e < 1$$

Sendo $e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|}$, decorre que:

$$0 < \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} < 1 \Rightarrow 0 < |v_{r_{af}}| < |v_{r_{ap}}|$$

Nas colisões parcialmente elásticas, os corpos envolvidos separam-se após a interação, existindo, assim, a fase de restituição. Os corpos afastam-se, entretanto, com velocidade escalar relativa de módulo menor que o da aproximação.

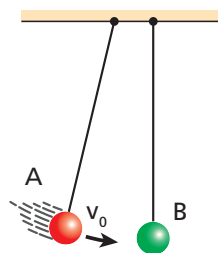
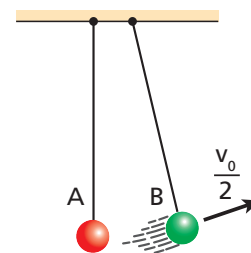
Exemplo 5:

$$|v_{r_{ap}}| = 60 - 10 \qquad |v_{r_{ap}}| = 32 + 8{,}0$$

$$|v_{r_{ap}}| = 50 \text{ m/s} \qquad |v_{r_{ap}}| = 40 \text{ m/s}$$

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} = \frac{40}{50} \Rightarrow e = 0{,}8$$

Exemplo 6:

Imediatamente antes da colisão:

Imediatamente após a colisão:

$$|v_{r_{ap}}| = v_0 \qquad |v_{r_{af}}| = \frac{v_0}{2}$$

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} = \frac{\frac{v_0}{2}}{v_0} \Rightarrow e = 0{,}5$$

Os corpos que participam de colisões parcialmente elásticas também constituem sistemas dissipativos. A energia mecânica (cinética) total imediatamente após a interação é menor que a energia mecânica (cinética) total imediatamente antes da interação.

$$\text{Colisão parcialmente elástica} \Rightarrow \text{Sistema dissipativo}$$

$$E_{c_{final}} < E_{c_{inicial}}$$

Colisões elásticas?

Thinkstock/Getty Images

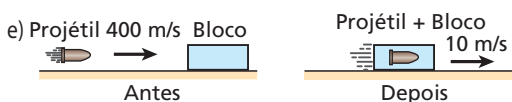
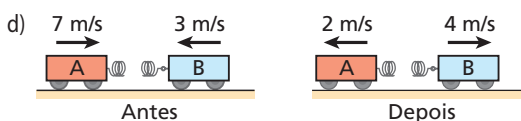
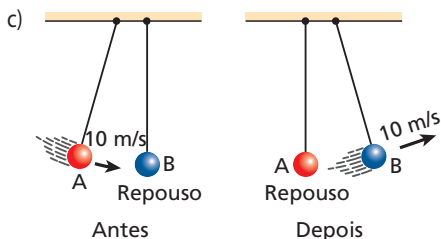
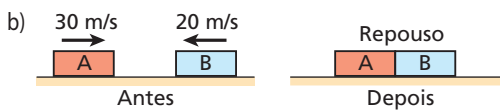
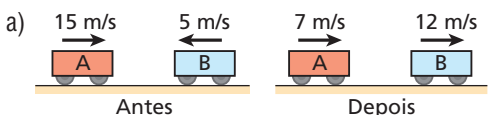
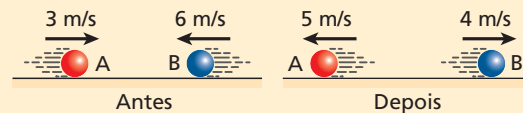
Nesta fotografia, seis esferas de massas praticamente iguais pendem de fios leves e inextensíveis. Por meio do fornecimento de energia mecânica (potencial) à esfera da esquerda, ela é elevada até certa altura. Soltando-a em seguida, ela desce, ocorrendo conversão de energia potencial em energia cinética. Ao atingir o nível inferior, essa esfera colide com sua vizinha em repouso e para. O impacto se transmite para as quatro esferas subsequentes, propagando-se, por meio delas, até manifestar-se na esfera da direita. Esta, por sua vez, se eleva e retorna, colidindo com a fileira das cinco esferas em repouso, fazendo a esfera da esquerda subir. Verifica-se, com o passar do tempo, que as subidas das esferas das extremidades vão-se repetindo, porém, atingindo, em cada caso, uma altura máxima cada vez menor. Nota-se, finalmente, a imobilidade total das esferas, que ocorre quando o acréscimo de energia mecânica dado inicialmente para o sistema operar se degrada completamente em outras formas de energia (energia térmica e ruído, por exemplo). Na hipótese ideal de as colisões serem perfeitamente elásticas e a resistência do ar desprezível, o sistema permaneceria oscilando indefinidamente, com as esferas das extremidades atingindo sempre a mesma altura máxima após receber o impacto da esfera ao seu lado. Haveria, nesse caso, conservação da quantidade de movimento do sistema (em cada sucessão de cinco colisões em um mesmo sentido) e também da energia mecânica total.

Exercícios

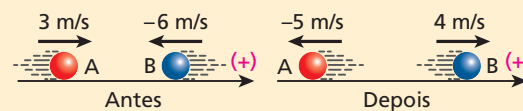
nível 1

53. (Cesgranrio-RJ) Duas bolas de gude idênticas, de massa **m**, movimentam-se em sentidos opostos (veja a figura) com velocidades de módulo **v**:

Indique a opção que pode representar as velocidades das bolas imediatamente depois da colisão:

54. Nas situações representadas nas figuras seguintes, as partículas realizam colisões unidimensionais. Os módulos de suas velocidades escalares estão indicados. Determine, em cada caso, o coeficiente de restituição da colisão, dizendo, ainda, se a interação ocorrida foi elástica, totalmente inelástica ou parcialmente elástica.

55. E.R. No esquema seguinte, estão representadas as situações imediatamente anterior e imediatamente posterior à colisão unidimensional ocorrida entre duas partículas **A** e **B**:

Sendo conhecidos os módulos das velocidades escalares das partículas, calcule a relação m_A/m_B entre suas massas.

Resolução:

Qualquer colisão mecânica constitui um sistema isolado de forças externas, o que permite a aplicação do **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

$$\vec{Q}_{f_A} + \vec{Q}_{f_B} = \vec{Q}_{i_A} + \vec{Q}_{i_B}$$

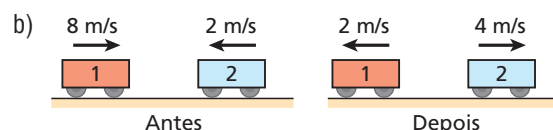
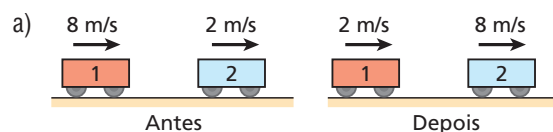
Como a colisão é unidimensional, levando em conta a orientação atribuída à trajetória, raciocinemos em termos escalares:

$$Q_{f_A} + Q_{f_B} = Q_{i_A} + Q_{i_B}$$

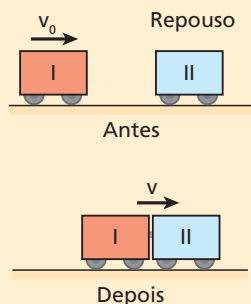
$$m_A\, v_{f_A} + m_B\, v_{f_B} = m_A\, v_{i_A} + m_B\, v_{i_B}$$

$$m_A\,(-5) + m_B\,(4) = m_A\,(3) + m_B\,(-6)$$

$$8\, m_A = 10\, m_B \Rightarrow \boxed{\frac{m_A}{m_B} = \frac{5}{4}}$$

56. Os carrinhos representados nas figuras a seguir, ao percorrer trilhos retilíneos, colidem frontalmente. Os módulos de suas velocidades escalares antes e depois das interações estão indicados nos esquemas. Calcule, para as situações dos itens **a** e **b**, a relação m_1/m_2 entre as massas dos carrinhos (1) e (2).

57. E.R. Um vagão (I) de massa **M**, movendo-se sobre trilhos retos e horizontais com velocidade de intensidade v_0, colide com um vagão (II) de massa **m**, inicialmente em repouso. Se o vagão (I) fica acoplado ao vagão (II), determine a intensidade da velocidade do conjunto imediatamente após a colisão.

Resolução:

Os esquemas seguintes representam as situações imediatamente anterior e imediatamente posterior à colisão:

Aplicando o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, temos:

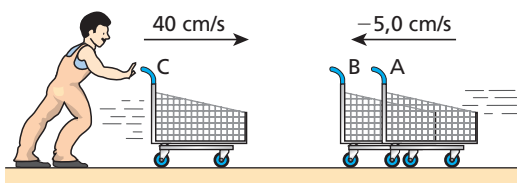
$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

$$(M + m)\, v = M\, v_0 \Rightarrow \boxed{v = \frac{M}{M + m}\, v_0}$$

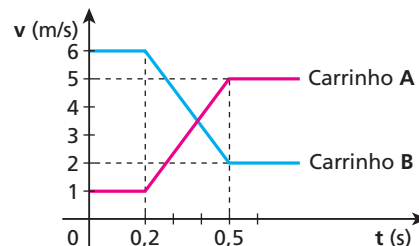
Destaquemos que a colisão é totalmente inelástica e que $v < v_0$.

58. Uma locomotiva de massa 200 t movendo-se sobre trilhos retos e horizontais com velocidade de intensidade 18,0 km/h colide com um vagão de massa 50 t inicialmente em repouso. Se o vagão fica acoplado à locomotiva, determine a intensidade da velocidade do conjunto imediatamente após a colisão.

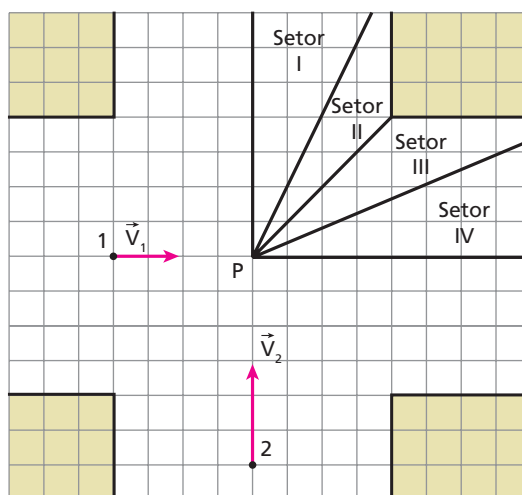
59. (Fuvest-SP) Dois patinadores de massas iguais deslocam-se numa mesma trajetória retilínea, com velocidades escalares respectivamente iguais a 1,5 m/s e 3,5 m/s. O patinador mais rápido persegue o outro. Ao alcançá-lo, salta verticalmente e agarra-se às suas costas, passando os dois a deslocarem-se com velocidade escalar **v**. Desprezando o atrito, calcule o valor de **v**.

60. A perceber que dois carrinhos vazios **A** e **B** se deslocam acoplados ao seu encontro com uma velocidade escalar de −5,0 cm/s, o funcionário de um supermercado lança contra eles um terceiro carrinho, **C**, também vazio, com velocidade escalar de 40 cm/s, como representa a figura a seguir.

Ao colidir com o conjunto **A**-**B**, **C** nele se encaixa e os três carrinhos seguem unidos com velocidade escalar **V**. Admitindo que os carrinhos sejam iguais e que se movimentem ao longo de uma mesma reta horizontal sem a ação de atritos nos eixos das rodas, tanto antes como depois da interação, pede-se determinar:

a) o valor de **V**;
b) a intensidade do impulso que **C** exerce no conjunto **A**-**B** no ato da colisão. Considere que cada carrinho tenha massa igual a 15 kg.

61. (UFPB) A figura a seguir apresenta os gráficos da velocidade *versus* tempo para a colisão unidimensional ocorrida entre dois carrinhos **A** e **B**:

Supondo que não existam forças externas resultantes e que a massa do carrinho **A** valha 0,2 kg, calcule:

a) o coeficiente de restituição da colisão;
b) a massa do carrinho **B**.

62. (UFRN) A figura a seguir mostra dois pequenos veículos, **1** e **2**, de massas iguais, que estão prestes a colidir no ponto **P**, que é o ponto central do cruzamento de duas ruas perpendiculares entre si. Toda região em torno do cruzamento é plana e horizontal. Imediatamente antes da colisão, as velocidades dos veículos têm as direções representadas na figura, tendo o veículo **2** uma velocidade que é 1,5 vez maior que a do veículo **1**.

Após a colisão, os veículos vão deslizar juntos pela pista molhada, praticamente sem atrito.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que o setor ao longo do qual os veículos vão deslizar juntos é o:

a) Setor I.
b) Setor II.
c) Setor III.
d) Setor IV.

Exercícios

nível 2

63. A fotografia mostrada abaixo expõe a reconstituição de um acidente, resultado de uma imprudência. Um carro de massa igual a 1t, ao tentar ultrapassar de maneira incorreta um caminhão, acabou batendo de frente em outro carro, de massa 800 kg, que estava parado no acostamento. Em virtude de a estrada estar muito lisa por causa de uma chuva ocorrida momentos antes da colisão, os carros se moveram juntos em linha reta, com uma velocidade de intensidade 54 km/h, após o impacto.

Admitindo-se que a força que deformou os veículos agiu durante 0,10 s, são feitas as seguintes afirmações para a situação descrita:

I. O choque foi totalmente inelástico e, por isso, não houve conservação da quantidade de movimento total do sistema.

II. A intensidade da velocidade do carro de 1 t antes da batida era de 97,2 km/h.

III. A intensidade do impulso em cada carro no ato da colisão foi de $1{,}2 \cdot 10^4$ N·s.

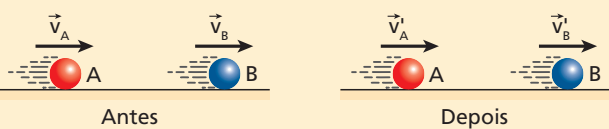
IV. A intensidade da força média que deformou os veículos foi de $1{,}2 \cdot 10^3$ N.

Estão corretas somente:

a) I e II
b) II e III
c) III e IV
d) I, II e III
e) II, III e IV

64. E.R. Duas pequenas esferas de massas iguais realizam um choque unidimensional e perfeitamente elástico sobre uma mesa do laboratório. No esquema abaixo, mostra-se a situação imediatamente anterior e a imediatamente posterior ao evento:

Antes

Depois

Supondo conhecidos os módulos de $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ (v_A e v_B), determine os módulos de $\vec{v}'_A$ e $\vec{v}'_B$ (v'_A e v'_B).

Resolução:

Aplicando ao choque o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**, vem:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

$$\vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

Escalarmente:

$$Q'_A + Q'_B = Q_A + Q_B$$

$$m\,v'_A + m\,v'_B = m\,v_A + m\,v_B$$

Logo:

$$v'_A + v'_B = v_A + v_B \qquad \text{(I)}$$

Sabemos também que:

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

Sendo o choque perfeitamente elástico, temos e = 1, decorrendo que:

$$1 = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \Rightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B \qquad \text{(II)}$$

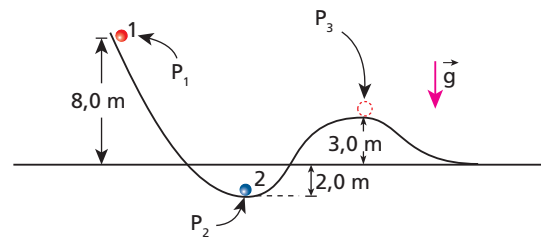
Resolvendo o sistema constituído pelas equações (I) e (II), obtemos:

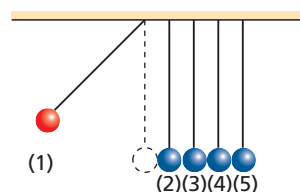
$$\boxed{v'_A = v_B} \quad \text{e} \quad \boxed{v'_B = v_A}$$

Cabe aqui uma observação importante:

> Num choque unidimensional e perfeitamente elástico entre partículas de massas iguais, estas **trocam suas velocidades**.

65. Duas bolas de boliche **A** e **B**, de massas iguais, percorrem uma mesma canaleta retilínea onde realizam um choque perfeitamente elástico. Se as velocidades escalares de **A** e **B** imediatamente antes da colisão valem $v_A = 2{,}0$ m/s e $v_B = -1{,}0$ m/s, quais as velocidades escalares v'_A e v'_B de **A** e **B** imediatamente depois da colisão?

66. (UFPI) A figura representa duas partículas idênticas, **1** e **2**, ambas de massa igual a **m**, e ambas em repouso nas posições indicadas, P_1 e P_2. O módulo da aceleração da gravidade no local é $g = 10$ m/s². A partícula **1** é então abandonada em sua posição inicial, indo colidir elasticamente com a partícula **2**.

Na ausência de qualquer atrito, qual a intensidade da velocidade da partícula **2** ao atingir a posição P_3?

67. Considere a montagem experimental representada a seguir, em que a esfera **1** tem massa **2M** e as demais (**2**, **3**, **4** e **5**) têm massa **M**:

Abandonando-se a esfera **1** na posição indicada, ela desce, chegando ao ponto mais baixo de sua trajetória com velocidade $\vec{v}_0$. Supondo que todas as possíveis colisões sejam perfeitamente elásticas, podemos afirmar que, após a interação:

a) a esfera **5** sai com velocidade $2\,\vec{v}_0$.

b) as esferas **2**, **3**, **4** e **5** saem com velocidade $\frac{\vec{v}_0}{2}$.

c) as esferas **4** e **5** saem com velocidade $\vec{v}_0$.

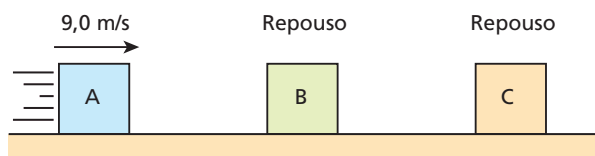
d) as esferas **2**, **3**, **4** e **5** saem com velocidade $\vec{v}_0$.

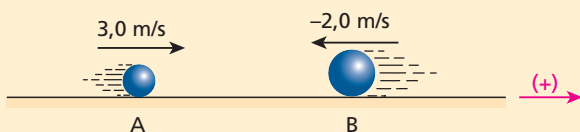
e) todas as esferas permanecem em repouso.

68. (Mack-SP) Na figura, representamos uma mesa perfeitamente lisa e duas esferas **A** e **B** que vão realizar uma colisão unidimensional e perfeitamente elástica.
A esfera **A** tem massa **m** e, antes da colisão, se desloca com velocidade constante de 60 m/s.
A esfera **B** tem massa **2m** e, antes da colisão, está em repouso.

Não considere a rotação das esferas.
Sejam E_A a energia cinética de **A** antes da colisão e E_B a energia cinética de **B** após a colisão. Indique a opção correta:

a) $E_B = \frac{4}{9}E_A$
b) $E_B = \frac{8}{9}E_A$
c) $E_B = E_A$
d) $E_B = \frac{9}{8}E_A$
e) $E_B = 2E_A$

69. Três blocos, **A**, **B** e **C**, de dimensões idênticas e massas respectivamente iguais a **2M**, **M** e **M**, estão inicialmente em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito, alinhados num ambiente em que a influência do ar é desprezível. O bloco **A** é então lançado contra o bloco **B** com velocidade escalar de 9,0 m/s, conforme indica a figura.

Admitindo-se que as colisões entre **A**, **B** e **C** sejam unidimensionais e perfeitamente elásticas, determine as velocidades escalares desses blocos depois de ocorridas todas as colisões possíveis entre eles.

70. E.R. A figura representa a situação imediatamente anterior à colisão unidimensional entre duas partículas **A** e **B**:

Sabendo que a massa de **B** é o dobro da de **A** e que o coeficiente de restituição da colisão vale 0,8, calcule as velocidades escalares de **A** e **B** imediatamente após o choque.

Resolução:

Aplicando o Princípio da **Conservação da Quantidade de Movimento**, temos:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

$$\vec{Q}'_A + \vec{Q}'_B = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B$$

$$m\,\vec{v}'_A + 2m\,\vec{v}'_B = m\,\vec{v}_A + 2m\,\vec{v}_B$$

Escalarmente:

$$v'_A + 2v'_B = 3{,}0 + 2\,(-2,\,0)$$

$$\boxed{v'_A + 2v'_B = -1{,}0} \quad \text{(I)}$$

Sendo e = 0,8, vem:

$$e = \frac{|v_{r_{af}}|}{|v_{r_{ap}}|} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{v'_B - v'_A}{3{,}0 + 2{,}0}$$

$$\boxed{v'_B - v'_A = 4{,}0} \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) + (II), calculamos v'_B:

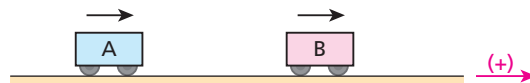
$$3v'_B = 3{,}0 \Rightarrow \boxed{v'_B = 1{,}0\ \text{m/s}}$$

Substituindo em (I), obtemos v'_A:

$$v'_A + 2\,(1{,}0) = -1{,}0$$

$$\boxed{v'_A = -3{,}0\ \text{m/s}}$$

Observe que, imediatamente depois da colisão, **A** se moverá para a esquerda e **B**, para a direita.

71. A figura seguinte representa dois carrinhos **A** e **B** de massas **m** e **3m**, respectivamente, que percorrem um mesmo trilho retilíneo com velocidades escalares v_A = 15 m/s e v_B = 5,0 m/s:

Se o choque mecânico que ocorre entre eles tem coeficiente de restituição 0,2, quais as velocidades escalares após a interação? Despreze os atritos.

72. Duas partículas **1** e **2**, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg e 2,0 kg, percorrem uma mesma reta orientada com velocidades escalares v_1 = 2,0 m/s e v_2 = –8,0 m/s. Supondo que essas partículas colidam e que o coeficiente de restituição do impacto seja 0,5, determine:

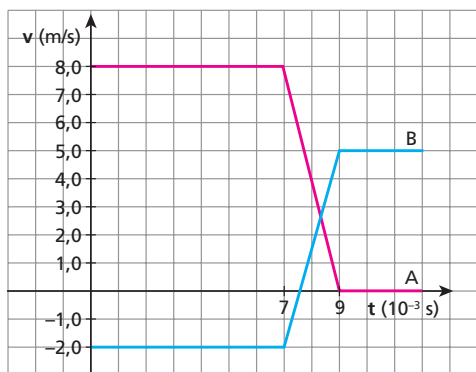
a) as velocidades escalares de **1** e de **2** imediatamente após o impacto;

b) a relação entre as energias cinéticas do sistema (partículas **1** e **2**) imediatamente após e imediatamente antes do impacto.

73. Uma esfera **A**, de massa 200 g, colidiu frontalmente com uma outra, **B**, de massa 300 g, inicialmente em repouso. Sabendo que **A** atingiu **B** com velocidade escalar de 5,0 cm/s e que esta

última adquiriu, imediatamente após a colisão, velocidade escalar de 3,0 cm/s, determine:

a) o coeficiente de restituição para a colisão ocorrida;
b) o percentual de energia cinética dissipada por efeito do impacto.

74. No diagrama seguinte, estão representadas as variações das velocidades escalares de duas partículas **A** e **B**, que realizam um choque unidimensional sobre uma mesa horizontal e sem atrito: Com base no gráfico:

a) classifique o choque como elástico, totalmente inelástico ou parcialmente elástico;
b) calcule a massa de **B**, se a de **A** vale 7,0 kg;
c) determine a intensidade média da força trocada pelas partículas por ocasião do choque.

75. (Unicamp-SP) Um objeto de massa $m_1 = 4{,}0$ kg e velocidade escalar $v_1 = 3{,}0$ m/s choca-se com um objeto em repouso, de massa $m_2 = 2{,}0$ kg. A colisão ocorre de modo que a perda de energia cinética é máxima, mas consistente com o Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento.

a) Quais as velocidades escalares dos objetos imediatamente após a colisão?
b) Qual a variação da energia cinética do sistema?

76. Existe um brinquedo infantil que consiste em três pêndulos idênticos, **X**, **Y** e **Z**. Com **Y** e **Z** em repouso, dispostos verticalmente, abandona-se o pêndulo **X** a partir do repouso de uma altura **H** em relação à linha horizontal que contém as massas de **Y** e **Z**, conforme representa a Figura 1.

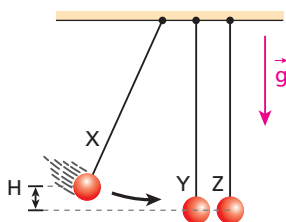



Figura 1

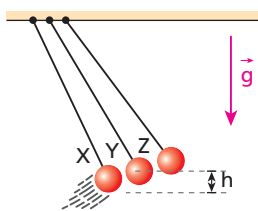
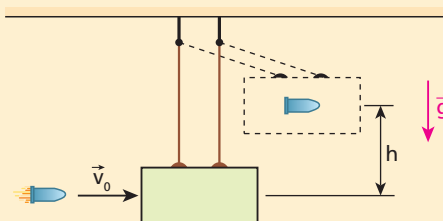



Figura 2

Com a colisão totalmente inelástica verificada entre todos os pêndulos, o conjunto se eleva até uma altura máxima **h**, como indica a Figura 2. Desprezando-se as massas dos fios e a resistência do ar, pede-se determinar o valor de **h** em função de **H**.

77. (UFBA) Um bloco **A**, de massa 2,0 kg, deslocando-se sem atrito sobre uma superfície horizontal plana, com velocidade de módulo igual a **v**, atinge em uma colisão frontal um bloco **B**, de massa 3,0 kg, inicialmente em repouso. Após a colisão, **A** e **B** deslocam-se unidos, com velocidade de módulo igual a 6,0 m/s. Admita agora que a colisão ocorra, nas mesmas condições da colisão anterior, entre o bloco **A** e uma mola ideal. A mola tem constante elástica igual a $5{,}0 \cdot 10^5$ N/m e foi colocada no lugar de **B**, com uma das extremidades fixa.
Determine a deformação máxima da mola, em unidades do **SI** e em notação científica. Despreze qualquer perda de energia mecânica na interação entre o bloco **A** e a mola.

78. E.R. O dispositivo representado na figura a seguir denomina-se **pêndulo balístico** e pode ser utilizado para a determinação da intensidade da velocidade de projéteis:

Considere desprezíveis os pesos das hastes e o efeito do ar. Um projétil de massa **m** é disparado horizontalmente com velocidade $\vec{v}_0$ contra o bloco de massa **M**, inicialmente em repouso. O projétil fica incrustado no bloco e o conjunto eleva-se a uma altura máxima **h**. Sendo **g** o módulo da aceleração da gravidade, determine, em função de **M**, **m**, **g** e **h**, a intensidade de $\vec{v}_0$.

Resolução:

Se o projétil fica incrustado no bloco, a colisão é totalmente inelástica. Calculemos o módulo v da velocidade do conjunto bloco-projétil, imediatamente após o impacto. Para tanto, apliquemos à colisão o **Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento**:

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial} \Rightarrow (M + m)\, v = m\, v_0$$

Daí:

$$v = \frac{m}{M + m}\, v_0 \qquad (I)$$

Devido às condições ideais, imediatamente após a colisão, o sistema torna-se conservativo, valendo a partir daí o **Princípio da Conservação da Energia Mecânica**.
Adotemos o plano horizontal de referência passando pela posição inicial do centro de massa do conjunto bloco-projétil. Assim, imediatamente após o impacto, a energia mecânica do conjunto será puramente cinética e, no ponto de altura máxima, puramente potencial de gravidade.

$$E_{m_{final}} = E_{m_{inicial}} \Rightarrow E_p = E_c$$

$$(M + m)\, g\, h = \frac{(M + m)\, v^2}{2} \Rightarrow g\, h = \frac{v^2}{2} \qquad (II)$$

Substituindo (I) em (II), vem:

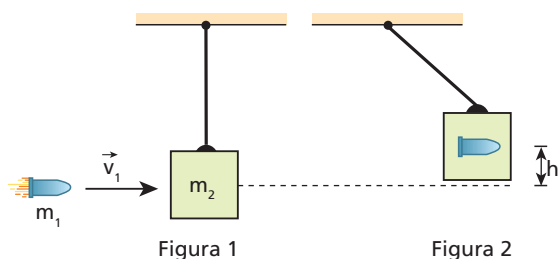
$$g\, h = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M + m}\right)^2 v_0^2$$

Logo:

$$\boxed{v_0 = \frac{M + m}{m}\sqrt{2g\,h}}$$

Nota:
Embora imediatamente após o impacto o sistema seja conservativo, analisado do início ao fim do fenômeno, ele assim não pode ser considerado, pois, devido à colisão totalmente inelástica ocorrida, uma fração da energia mecânica total é dissipada.

79. (UFJF-MG) A figura **1** a seguir ilustra um projétil de massa $m_1 = 20$ g disparado horizontalmente com velocidade de módulo $v_1 = 200$ m/s contra um bloco de massa $m_2 = 1{,}98$ kg, em repouso, suspenso na vertical por um fio de massa desprezível. Após sofrerem uma colisão perfeitamente inelástica, o projétil fica incrustado no bloco e o sistema projétil-bloco atinge uma altura máxima **h**, conforme representado na figura **2**.

Figura 1 Figura 2

Desprezando-se a força de resistência do ar e adotando-se $g = 10$ m/s^2, resolva os itens abaixo.

a) Calcule o módulo da velocidade que o sistema projétil-bloco adquire imediatamente após a colisão.
b) Aplicando-se o Princípio da Conservação da Energia Mecânica, calcule o valor da altura máxima **h** atingida pelo sistema projétil-bloco após a colisão.

80. Uma bola é abandonada, a partir do repouso, de um ponto situado a uma altura **H** em relação ao solo, admitido plano e horizontal. A bola cai livremente e, após chocar-se contra o solo, consegue atingir uma altura máxima **h**.

a) Calcule o coeficiente de restituição do choque em função de **H** e de **h**.
b) Classifique o choque como elástico, totalmente inelástico ou parcialmente elástico, nos seguintes casos: $h = H$, $0 < h < H$ e $h = 0$.

Descubra mais

1. Admita que você esteja em repouso sobre a superfície horizontal e perfeitamente lisa de um grande lago congelado. Devido à inexistência de atritos é, portanto, impossível caminhar. Você tem em suas mãos um pesado bloco de gelo. Que procedimento você adotaria para atingir uma determinada borda do lago com maior rapidez?

2. O **momento linear** (ou quantidade de movimento), definido pelo produto da massa pela velocidade vetorial, é uma grandeza física de grande importância, essencial no estudo de explosões e colisões. O que vem a ser **momento angular**?

3. Suponha que você esteja sentado em uma cadeira giratória realizando rotações em torno de um eixo vertical. Você está de braços cruzados e, neste caso, sua velocidade angular é igual a ω_0. Se você abrir os braços posicionando-os horizontalmente, haverá uma alteração em sua velocidade angular que adquirirá um novo valor $\omega < \omega_0$. A explicação para essa variação na velocidade angular é fundamentada em que princípio físico?

4. Imaginemos que a Terra sofra, por alguma razão, um significativo "encolhimento" (redução de raio), sendo mantidas, porém, sua massa e sua forma esférica. Isso provocaria alguma alteração no período de rotação do planeta? Os dias terrestres ficariam mais curtos, mais longos ou manteriam a duração atual de 24 h?

Exercícios nível 3

81. (Vunesp-SP) João estava dentro de um carro que colidiu frontalmente com uma árvore e, devido à existência do *air bag*, a colisão de sua cabeça com o para-brisa demorou um intervalo de tempo de 0,5 s. Se considerarmos que, sem o uso do *air bag*, a colisão da cabeça com o para-brisa teria durado um intervalo de tempo igual a 0,05 s, é correto afirmar que a intensidade da força média, exercida sobre a cabeça de João, na situação com *air bag*, é:

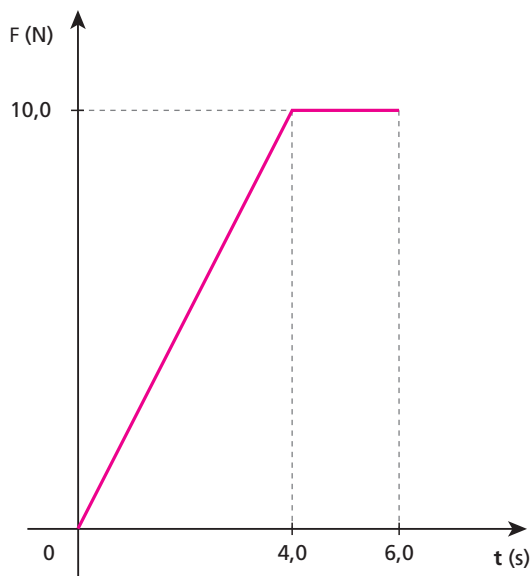
a) um décimo da intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
b) um vigésimo da intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
c) 10 vezes a intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
d) 20 vezes a intensidade da força média exercida sobre sua cabeça sem *air bag*.
e) a mesma que sem o *air bag*.

TF1-353_395_P2T8.indd 383 16/08/12 17:27

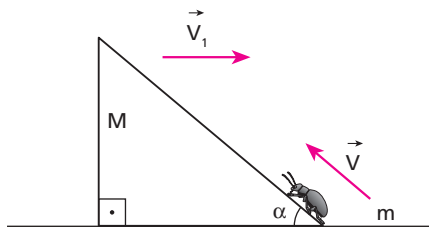
82. (Fuvest-SP) Num espetáculo de circo, um homem deita-se no chão do picadeiro e sobre seu peito é colocada uma tábua, de 30 cm × 30 cm, na qual foram cravados 400 pregos, de mesmo tamanho, que atravessam a tábua. No clímax do espetáculo, um saco com 20 kg de areia é solto, a partir do repouso, de 5,0 m de altura em relação à tábua, e cai sobre ela. Suponha que as pontas de todos os pregos estejam igualmente em contato com o peito do homem. Determine:

a) O módulo da velocidade do saco de areia ao tocar a tábua de pregos.
b) A intensidade da força média total aplicada no peito do homem se o saco de areia parar $5,0 \cdot 10^{-2}$ s após seu contato com a tábua.
c) A pressão, em N/cm², exercida no peito do homem por cada prego, cuja ponta tem 4,0 mm² de área.

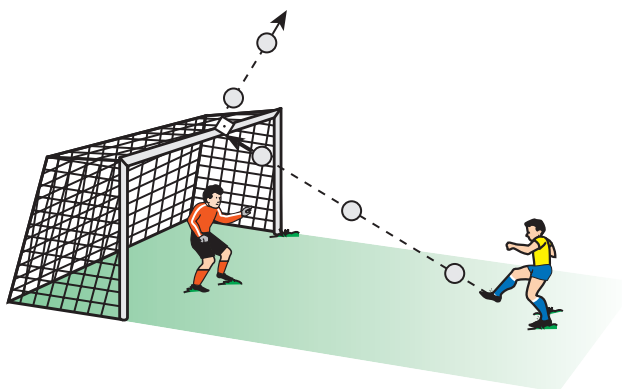
> **Note e adote:**
> Módulo da aceleração da gravidade no local: $g = 10$ m/s²
> Despreze o peso da tábua com os pregos.
> Não tente reproduzir esse número de circo!

83. (UFU-MG) Um corpo de 10,0 kg desloca-se em uma trajetória retilínea e horizontal, com uma velocidade de módulo 3,0 m/s, quando passa a atuar sobre ele uma força resultante $\vec{F}$, cujo módulo varia de acordo com o gráfico abaixo, formando um ângulo reto com a direção inicial do movimento. Se $\vec{F}$ é a única força que atua sobre o corpo e se sua direção e sentido permanecem constantes, analise as seguintes afirmações e responda de acordo com o código que se segue.

I. A energia cinética do corpo no instante $t = 6,0$ s é de 125 J.
II. O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ no intervalo entre $t = 0$ e $t = 6,0$ s vale 80,0 J.
III. A quantidade de movimento do corpo no instante $t = 6,0$ s tem módulo igual a 70,0 kg m/s.

a) Apenas I e II são corretas.
b) Apenas I é correta.
c) Apenas II e III são corretas.
d) Apenas I e III são corretas.
e) I, II e III são corretas.

84. (UFLA-MG) Um plano inclinado de um ângulo α e massa **M** está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Um besouro de massa **m**, inicialmente em repouso, passa a subir o plano inclinado com velocidade constante de módulo **V** (relativa ao plano), de forma a deslocar o plano inclinado para a direita com velocidade de módulo $\mathbf{V_1}$ (figura abaixo).

É correto afirmar que o módulo $\mathbf{V_1}$ da velocidade do plano inclinado é dado por:

a) $V \dfrac{m \cos \alpha}{M + m \operatorname{sen} \alpha}$
b) $V \dfrac{m \cos \alpha}{M + m \cos \alpha}$
c) $\dfrac{m}{M + m} V \cos \alpha$
d) $V \dfrac{m}{M} \operatorname{tg} \alpha$

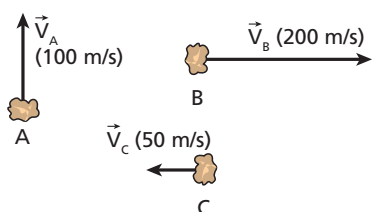
85. Numa importante final futebolística, um jogador cobra um pênalti e a bola, depois de chocar-se contra o travessão, sai numa direção perpendicular à do movimento inicial.

A bola, que tem 0,50 kg de massa, incide no travessão com velocidade de módulo 80 m/s e recebe deste uma força de intensidade média $5,0 \cdot 10^{3}$ N. Sabendo que o impacto da bola no travessão dura $1,0 \cdot 10^{-2}$ s, calcule:

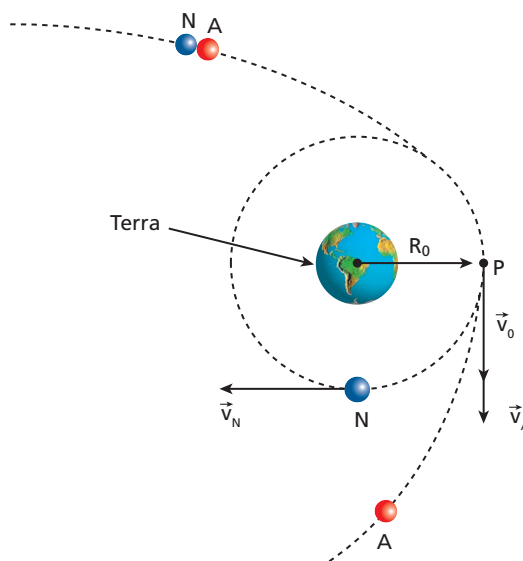
a) o módulo da velocidade da bola imediatamente após o impacto;
b) a energia mecânica dissipada no ato do impacto.

86. Um barco de massa $M = 160$ kg encontra-se em repouso na superfície das águas de um lago, no qual não há correntezas. Dentro do barco está um homem de massa $m = 80$ kg, que em dado instante salta, deixando o barco com velocidade de módulo 2,0 m/s, paralela às águas e medida em relação às margens do lago. Desprezando os atritos e o efeito do ar, determine:

a) o módulo da velocidade do barco após o salto do homem;
b) o trabalho da força que o homem exerce no barco, por ocasião do seu salto.

87. (Cesesp-PE) Um avião voando horizontalmente atira um projétil de massa 8,0 kg, que sai com velocidade de $5,0 \cdot 10^2$ m/s relativa ao solo. O projétil é disparado na mesma direção e no mesmo sentido em que voa o avião. Sabendo que a massa do avião sem o projétil vale 12 toneladas, calcule, em km/h, o decréscimo na velocidade da aeronave em consequência do tiro.

88. Um artefato explosivo, inicialmente em repouso, é detonado, fragmentando-se em quatro partes, **A**, **B**, **C** e **D**, de massas respectivamente iguais a 3,0 kg, 2,5 kg, 2,0 kg e 4,0 kg. Despreze a perda de massa do sistema no ato da explosão e admita que os quatro fragmentos sejam lançados com velocidades contidas em um mesmo plano. No esquema a seguir, são fornecidas as características das velocidades vetoriais adquiridas por **A**, **B** e **C**.

Aponte a alternativa que melhor traduz as características da velocidade vetorial adquirida por **D**:

89. (Fuvest-SP) Alienígenas desejam observar o nosso planeta. Para tanto, enviam à Terra uma nave **N**, inicialmente ligada a uma nave auxiliar **A**, ambas de mesma massa. Quando o conjunto de naves se encontra muito distante da Terra, sua energia cinética e sua energia potencial gravitacional são muito pequenas, de forma que a energia mecânica total do conjunto pode ser considerada nula. Enquanto o conjunto é acelerado pelo campo gravitacional da Terra, sua energia cinética aumenta e sua energia potencial fica cada vez mais negativa, conservando a energia total nula. Quando o conjunto N-A atinge, com velocidade $\mathbf{V_0}$ (a ser determinada), o ponto **P** de máxima aproximação da Terra, a uma distância $\mathbf{R_0}$ do centro do planeta, um explosivo é acionado, separando **N** de **A**. A nave **N** passa a percorrer, em torno da Terra, uma órbita circular de raio $\mathbf{R_0}$, com velocidade $\mathbf{V_N}$ (a ser determinada). A nave auxiliar **A** adquire uma velocidade $\mathbf{V_A}$ (a ser determinada). Suponha que a Terra esteja isolada no espaço e em repouso.

> **Note e adote:**
>
> 1) A força de atração gravitacional **F**, entre um corpo de massa **m** e o planeta Terra, de massa **M**, tem intensidade dada por
> $$F = \frac{G\,M\,m}{R^2} = m\,g_R.$$
> 2) A energia potencial gravitacional $\mathbf{E_P}$ do sistema formado pelo corpo e pelo planeta Terra, com referencial de potencial zero no infinito, é dada por: $E_P = \frac{-\,G\,M\,m}{R}$.
>
> **G**: constante universal da gravitação.
> **R**: distância do corpo ao centro da Terra.
> $\mathbf{g_R}$: módulo da aceleração da gravidade à distância **R** do centro da Terra.

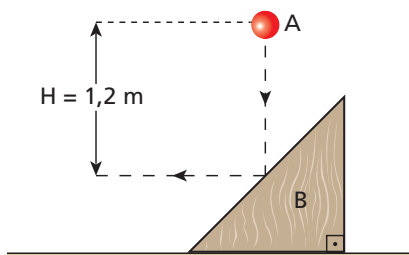
Determine, em função de **M**, **G** e $\mathbf{R_0}$:

a) o módulo da velocidade $\mathbf{V_0}$ com que o conjunto atinge o ponto P;
b) o módulo da velocidade $\mathbf{V_N}$, quando **N** percorre sua órbita circular;
c) o módulo da velocidade $\mathbf{V_A}$, logo após **A** se separar de **N**.

90. (UFBA) As leis de conservação da energia e da quantidade de movimento são gerais e valem para qualquer situação.
Um caso simples é o de um decaimento radioativo alfa. Um núcleo-pai, em repouso, divide-se, gerando dois fragmentos, um núcleo-filho e uma partícula alfa. Os fragmentos adquirem energia cinética, que é denominada energia de desintegração. Isso ocorre, porque uma parte da massa do núcleo-pai se transforma em energia cinética desses fragmentos, segundo a lei de equivalência entre massa e energia, proposta por Einstein.
Um exemplo do decaimento é o de um dos isótopos radioativos do urânio, que se transforma em tório, emitindo uma partícula alfa, um núcleo de hélio, ou seja:

$$_{92}U^{232} \rightarrow {}_{90}Th^{228} + {}_{2}He^{4}$$

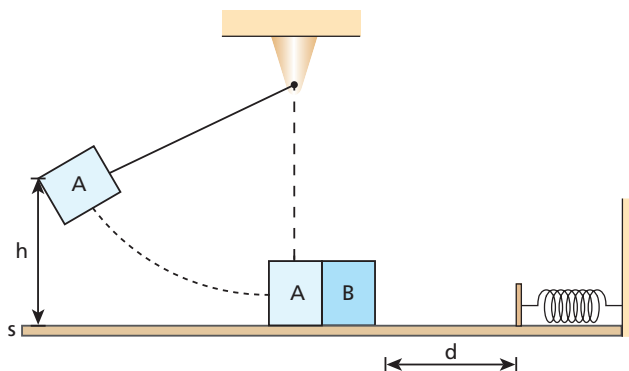
Na notação empregada, o número inferior refere-se à carga nuclear, e o superior, à massa aproximada do núcleo respectivo.
Sabe-se que o núcleo de urânio está em repouso, e a energia de desintegração é E = 5,40 MeV.
Considerando-se as leis de consevação e o fato de a mecânica newtoniana permitir, com boa aproximação, o cálculo das energias cinéticas, determine a energia cinética da partícula alfa.

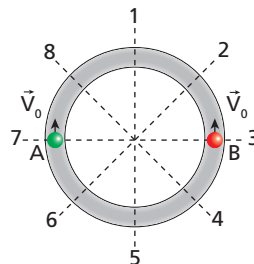
91. (Unip-SP) Na figura, temos um plano horizontal sem atrito e um bloco **B**, em repouso, com o formato de um prisma. Uma pequena esfera **A** é abandonada do repouso, da posição indicada na figura, e, após uma queda livre, colide elasticamente com o prisma. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Sabe-se que, imediatamente após a colisão, a esfera **A** tem velocidade horizontal. A massa do prisma **B** é o dobro da massa da esfera **A**. A velocidade adquirida pelo prisma **B**, após a colisão, tem módulo igual a:

a) 2,0 m/s.
b) 4,0 m/s.
c) 8,0 m/s.
d) 16 m/s.
e) 1,0 m/s.

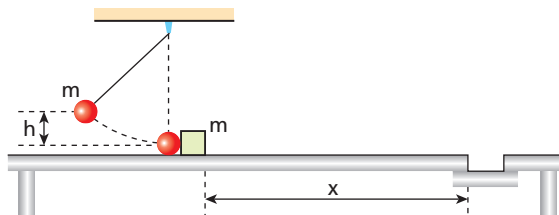
92. (EN-RJ) Uma partícula de massa 2,0 kg, que se desloca para a direita com velocidade de 9,0 m/s, colide de modo totalmente inelástico com outra partícula de massa 4,0 kg, que se desloca para a esquerda com velocidade de 6,0 m/s. O módulo do impulso, em unidades do **SI**, aplicado à partícula de 2,0 kg durante a colisão é:

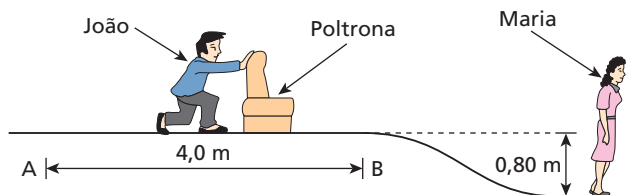
a) 12. b) 16. c) 18. d) 20. e) 24.

93. (UFJF-MG) A figura a seguir mostra um sistema composto de dois blocos de massas idênticas $m_A = m_B = 3,0$ kg e uma mola de constante elástica $k = 4,0$ N/m. O bloco **A** está preso a um fio de massa desprezível e suspenso de uma altura $h = 0,80$ m em relação à superfície **S**, onde está posicionado o bloco **B**. Sabendo-se que a distância entre o bloco **B** e a mola é $d = 3,0$ m e que a colisão entre os blocos **A** e **B** é elástica, faça o que se pede nos itens seguintes. Adote $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ e despreze o efeito do ar.

a) Usando a lei de conservação da quantidade de movimento (momento linear), calcule o módulo da velocidade do bloco **B** imediatamente após a colisão com o bloco **A**.
b) Calcule a compressão máxima sofrida pela mola se o atrito entre o bloco **B** e o solo for desprezível.
c) Calcule a distância percorrida pelo bloco **B** rumo à mola, se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco **B** e o solo for igual a $\mu_C = 0,40$. Nesse caso, a mola será comprimida pelo bloco **B**? Justifique.

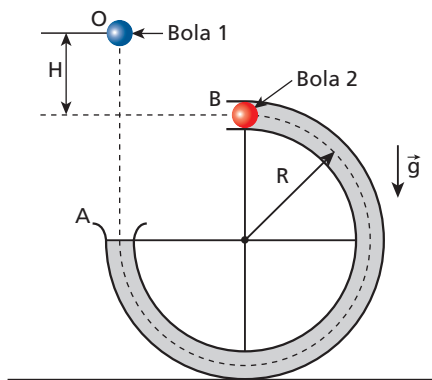
94. (Fuvest-SP) Em uma canaleta circular, plana e horizontal, podem deslizar duas pequenas bolas, **A** e **B**, com massas $M_A = 3\,M_B$, que são lançadas uma contra a outra, com igual velocidade $\vec{V}_0$, a partir das posições indicadas. Após o primeiro choque entre elas (em 1), que não é elástico, as duas passam a movimentar-se no sentido horário, sendo que a bola **B** mantém o módulo de sua velocidade $\vec{V}_0$.

Desprezando-se os atritos, pode-se concluir que o próximo choque entre elas ocorrerá nas vizinhanças da posição:

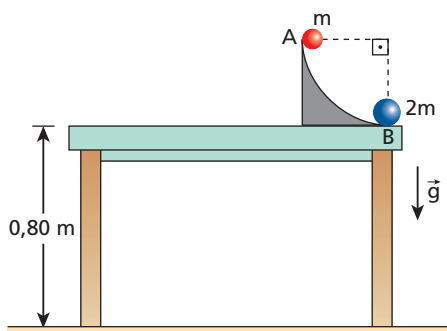
a) 3 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

95. (UFF-RJ) No brinquedo ilustrado na figura, o bloco de massa **m** encontra-se em repouso sobre uma superfície horizontal e deve ser impulsionado para tentar atingir a caçapa, situada a uma distância $x = 1,5$ m do bloco. Para impulsioná-lo, utiliza-se um pêndulo de mesma massa **m**. O pêndulo é abandonado de uma altura $h = 20$ cm em relação à sua posição de equilíbrio e colide elasticamente com o bloco no instante em que passa pela posição vertical. Considerando-se a aceleração da gravidade com módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule:

a) a intensidade da velocidade da esfera do pêndulo imediatamente antes da colisão;
b) a intensidade da velocidade do bloco imediatamente após a colisão;
c) a distância percorrida pelo bloco sobre a superfície horizontal, supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e essa superfície seja $\mu = 0,20$. Verifique se o bloco atinge a caçapa.

96. (UFU-MG) João, num ato de gentileza, empurra horizontalmente uma poltrona (massa igual a 10 kg) para Maria (massa igual a 50 kg), que a espera em repouso num segundo plano horizontal 0,80 m abaixo do plano em que se desloca João, conforme indica a figura.

A poltrona é empurrada a partir do repouso de **A** até **B**, ao longo de 4,0 m, por uma força constante $\vec{F}$ de intensidade 25 N. Em **B**, ela é solta, descendo uma pequena rampa e atingindo Maria com velocidade de intensidade **V**, que se senta rapidamente. Com isso, o sistema poltrona-Maria passa a se deslocar com velocidade de intensidade **V'**. Desprezando-se os efeitos do ar e também os atritos sobre a poltrona e considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

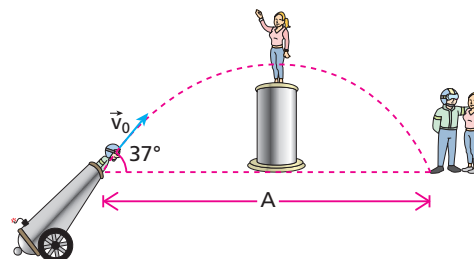
a) o trabalho da força aplicada por João sobre a poltrona no percurso de **A** até **B**;
b) o valor de **V**;
c) o valor de **V'**.

97. (Fuvest-SP) Um brinquedo é constituído por um cano (tubo) em forma de $\frac{3}{4}$ de circunferência, de raio médio **R**, posicionado em um plano vertical, como mostra a figura. O desafio é fazer com que a bola **1**, ao ser abandonada de certa altura **H** acima da extremidade **B**, entre pelo cano em **A**, bata na bola **2** que se encontra parada em **B**, ficando nela grudada, e ambas atinjam juntas a extremidade **A**. As massas das bolas **1** e **2** são M_1 e M_2, respectivamente. Despreze os efeitos do ar e das forças de atrito.

a) Determine a velocidade **v** com que as duas bolas grudadas devem sair da extremidade **B** do tubo para atingir a extremidade **A**.
b) Determine o valor de **H** para que o desafio seja vencido.

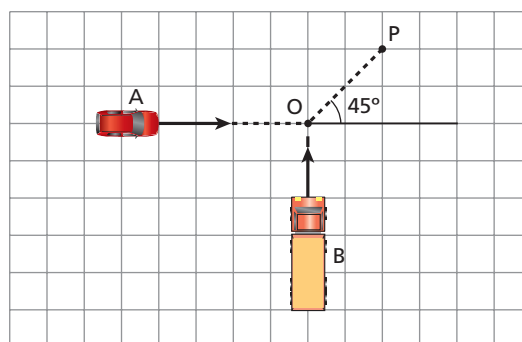
98. (UFU-MG) Sobre uma mesa fixa, de altura 0,80 m, está conectada uma rampa perfeitamente polida em forma de quadrante de circunferência de raio 45 cm, conforme representa a figura. Do ponto **A** da rampa, abandona-se uma partícula de massa **m**, que vai chocar-se de modo perfeitamente elástico com outra partícula de massa **2m**, em repouso no ponto **B**, o mais baixo da rampa.

Sabendo que no local a influência do ar é desprezível e que $g = 10\ m/s^2$, determine:
a) a intensidade da velocidade da partícula de massa **2m** ao atingir o solo;
b) a altura, acima do tampo da mesa, atingida pela partícula de massa **m** após a colisão com a partícula de massa **2m**;
c) a distância entre os pontos de impacto das partículas com o solo.

99. (Unifesp-SP) Uma pequena esfera maciça é lançada de uma altura de 0,6 m na direção horizontal, com velocidade inicial de módulo 2,0 m/s. Ao chegar ao chão, somente pela ação da gravidade, colide elasticamente com o piso e é lançada novamente para o alto. Considerando-se $g = 10\ m/s^2$, o módulo da velocidade e o ângulo de lançamento da esfera, a partir do solo, em relação à direção horizontal, imediatamente após a colisão, são, respectivamente, dados por:

a) 4,0 m/s e 30°.
b) 3,0 m/s e 30°.
c) 4,0 m/s e 60°.
d) 6,0 m/s e 45°.
e) 6,0 m/s e 60°.

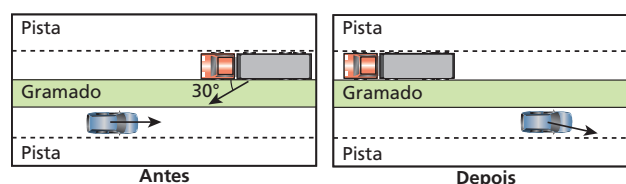
100. (AFA-SP) Num circo, um homem-bala de massa 60 kg é disparado por um canhão com velocidade $\vec{v}_0$ de módulo 25 m/s, sob um ângulo de 37° com a horizontal. Sua parceira, cuja massa é 40 kg, está em repouso numa plataforma localizada no topo da trajetória. Ao passar pela plataforma, o homem-bala e a parceira se agarram e vão cair em uma rede de segurança, na mesma altura que o canhão. Veja a figura fora de escala a seguir.

Desprezando-se a resistência do ar e considerando-se sen 37° = 0,60, cos 37° = 0,80 e $g = 10\ m/s^2$, pode-se afirmar que o alcance **A** atingido pelo homem é:

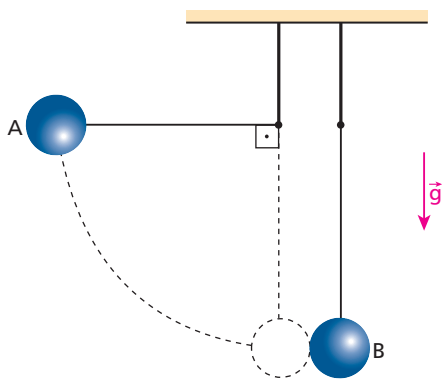
a) 60 m.
b) 48 m.
c) 36 m.
d) 24 m.

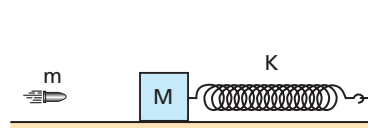
101. Um automóvel (**A**) e um caminhão (**B**) colidem no ponto **O** indicado, após o que prosseguem unidos, deslocando-se na direção OP. A massa do caminhão é quatro vezes a do carro e sua velocidade, imediatamente antes da batida, valia 30,0 km/h.

Ao narrar a colisão à Polícia Rodoviária, o motorista do carro argumentou que, antes do choque, a velocidade de seu veículo era inferior à máxima permitida (80,0 km/h).
a) Verifique, justificando, se a afirmação do motorista do carro é falsa ou verdadeira.
b) Calcule a velocidade do conjunto carro-caminhão imediatamente após a batida.

102. (Unicamp-SP) Em uma autoestrada, por causa da quebra de uma ponta de eixo, a roda de um caminhão desprende-se e vai em direção à outra pista, atingindo um carro que vem em sentido oposto. A roda é lançada com uma velocidade de 72 km/h, formando um ângulo de 30° com a pista, como indicado na figura a seguir. A velocidade do carro antes da colisão é de 90 km/h; a massa do carro é igual a 900 kg e a massa da roda do caminhão é igual a 100 kg. A roda fica presa ao carro após a colisão.

Antes

Depois

a) Imediatamente após a colisão, qual é a componente da velocidade do carro na direção transversal à pista?
b) Qual é a energia cinética do conjunto carro-roda imediatamente após a colisão?
Se for necessário, use: sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,87.

103. Na figura a seguir, há dois pêndulos idênticos, cujos fios inextensíveis e de pesos desprezíveis têm 3,2 m de comprimento. No local, reina o vácuo e a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2.

Em determinado instante, a esfera **A** é abandonada da posição indicada, descendo e chocando-se frontalmente com a esfera **B**, inicialmente em repouso. Sabendo que o coeficiente de restituição do choque vale $\frac{1}{4}$ calcule:
a) os módulos das velocidades de **A** e de **B** imediatamente após o choque;
b) a relação h_A/h_B entre as alturas máximas atingidas por **A** e por **B** após o choque;
c) a relação entre as energias cinéticas do sistema imediatamente após o choque e imediatamente antes dele.

104. (ITA-SP) Na figura a seguir, temos uma massa M = 132 gramas, inicialmente em repouso, presa a uma mola de constante elástica K = 1,6 · 10^4 N/m, podendo deslocar-se sem atrito sobre a mesa em que se encontra. Atira-se um projétil de massa m = 12 gramas, que encontra o bloco horizontalmente, com velocidade v_0 = 200 m/s, incrustando-se nele.

Qual é a máxima deformação que a mola experimenta?

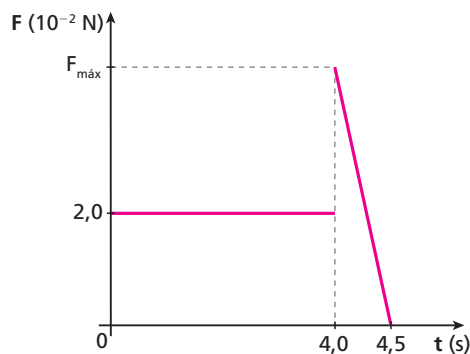
105. (Fuvest-SP) Sobre a parte horizontal da superfície representada na figura, encontra-se parado um corpo **B** de massa **M**, no qual está presa uma mola ideal de constante elástica **K**. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o corpo **B** e o plano são iguais e valem μ. Um outro corpo **A**, também de massa **M**, é abandonado na parte inclinada. O atrito entre o corpo **A** e a superfície é desprezível. A aceleração da gravidade local é constante e tem módulo igual a **g**.

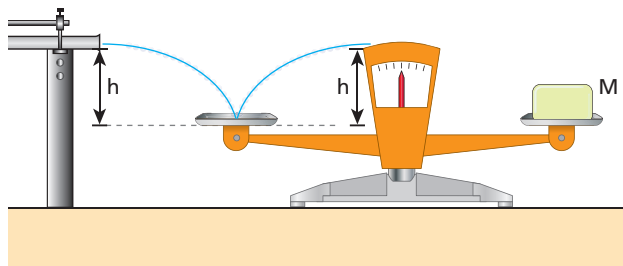
Determine:
a) a máxima altura h_0 da qual o corpo **A** pode ser abandonado para que, após colidir com o corpo **B**, retorne até a altura original h_0;
b) o valor da deformação **x** da mola, durante a colisão, no instante em que os corpos **A** e **B** têm mesma velocidade, na situação em que o corpo **A** é abandonado de uma altura H > h_0. (Despreze o trabalho realizado pelo atrito durante a colisão.)

Para raciocinar um pouco mais

106. Os gafanhotos são insetos pertencentes à subordem *Caelifera*, da ordem *Orthoptera*. Caracterizam-se por terem patas posteriores longas e fortes, o que lhes permite deslocar-se aos saltos. Algumas espécies formam enormes enxames que podem devastar grandes plantações.

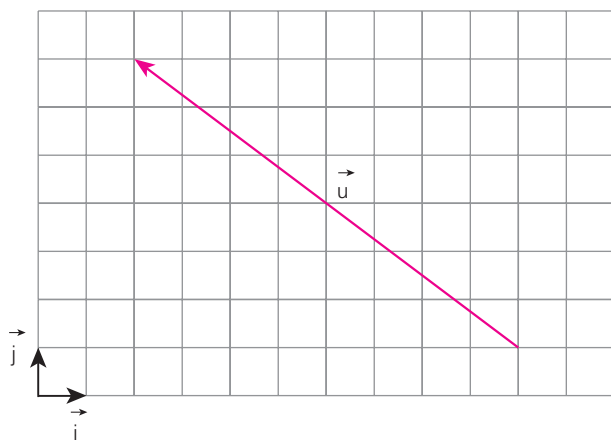
Alamy/Other Images

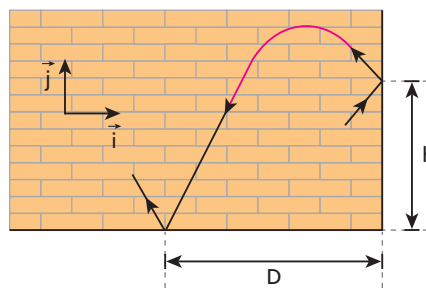
Considere o gráfico a seguir, que mostra o comportamento da intensidade da força vertical que uma superfície plana e horizontal exerce sobre um gafanhoto. No intervalo em que **F** é constante, o inseto encontra-se em repouso sobre a superfície e, no intervalo em que **F** é variável, ele está realizando um salto vertical, com perda de contato com a superfície no instante t = 4,5 s.

Desprezando-se a influência do ar, adotando-se para a intensidade da aceleração da gravidade o valor 10 m/s^2 e sabendo-se que a altura máxima atingida no salto é de 20 cm, determine:
a) A massa do gafanhoto, em gramas;
b) O valor de $\mathbf{F_{máx}}$ indicado no gráfico.

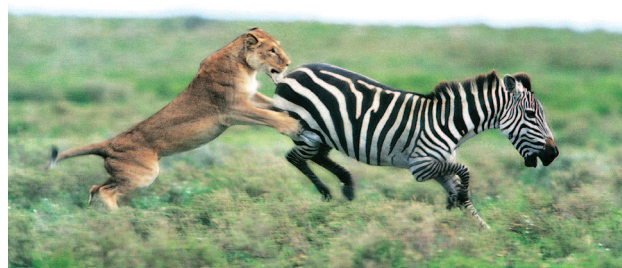
107. Um dispositivo lança horizontalmente em regime permanente 200 pequenas esferas por segundo sobre o prato esquerdo de uma balança de travessão de braços iguais. As esferas colidem com esse prato e se elevam a uma altura máxima h = 0,20 m, igual à da boca do dispositivo lançador, conforme ilustra a figura.

Para manter o travessão em equilíbrio na horizontal, coloca-se sobre o prato direito da balança um bloco de massa **M**. Supondo-se que cada esfera tenha massa m = 0,50 g, que a aceleração da gravidade tenha módulo 10 m/s² e que todos os atritos e a resistência do ar sejam desprezíveis, determine:

a) O módulo da variação da quantidade de movimento de cada esfera, em $g \cdot \frac{m}{s}$, em virtude da colisão com o prato da balança;

b) O valor da massa **M**, em gramas.

108. *Versores* são vetores de módulo unitário utilizados na expressão de outros vetores. Consideremos os versores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ indicados abaixo, respectivamente, vetores de referência das direções horizontal e vertical, e, como exemplo, um vetor $\vec{u}$, também representado.

Em termos de $\vec{i}$ e $\vec{j}$, o vetor $\vec{u}$ fica determinado por $\vec{u} = -8{,}0\vec{i} + 6{,}0\vec{j}$. Isso significa que esse vetor tem uma componente horizontal para a esquerda de módulo 8,0 unidades e uma componente vertical para cima de módulo 6,0 unidades. Pelo Teorema de Pitágoras, pode-se também inferir que o módulo de $\vec{u}$ é igual a 10,0 unidades.

Uma bola de massa m = 1,5 kg é lançada contra uma parede vertical. Imediatamente antes de colidir com a parede, a bola tem velocidade dada por $\vec{V} = 4{,}0\vec{i} + 3{,}0\vec{j}$, em m/s, em que $\vec{i}$ e $\vec{j}$ são os versores das direções horizontal e vertical, respectivamente. A colisão ocorre a uma altura h = 2,0 m do solo, como indica a figura, e, depois dela, a bola descreve a trajetória esboçada, atingindo o chão pela primeira vez a uma distância horizontal **D** da parede.

No local, a influência do ar é desprezível e adota-se g = 10 m/s². Sabendo-se que o impulso que a parede exerce na bola no ato da colisão é $\vec{I} = -9{,}0\vec{i}$ em N.s, calcule a distância **D**.

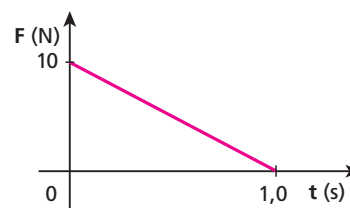
109. Nas estepes africanas, os leões situam-se no topo da cadeia alimentar. A tarefa de caçar é desincumbida pelas fêmeas, que, geralmente, andam em grupos, sorrateiras, em busca de uma presa que, uma vez abatida, serve de banquete para toda a alcateia.

Tom Brakefield/Digital Vision/Getty Images

Admita que num instante $t_0 = 0$ uma leoa, de massa $m_L = 120$ kg, correndo em linha reta com velocidade constante de intensidade $V_L = 8{,}0$ m/s, está em procedimento de ataque a uma zebra, de massa $m_z = 200$ kg, inicialmente em repouso. Nesse instante, a distância entre os dois animais é 20 m, quando a zebra inicia uma fuga desesperada, acelerando com intensidade constante de 2,0 m/s² ao longo da mesma reta percorrida pela leoa.

a) A leoa consegue êxito em seu ataque, isto é, consegue alcançar a zebra?

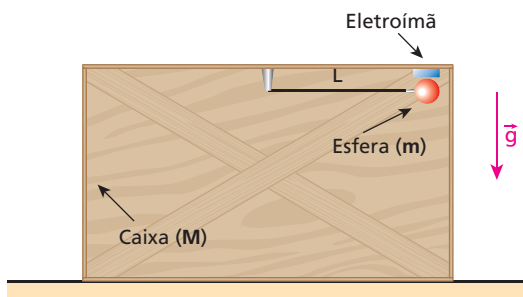
b) Qual a distância mínima verificada entre os dois animais, admitidos pontos materiais?

c) Qual a intensidade da quantidade de movimento da zebra em relação à leoa no instante em que a distância entre os dois animais for mínima?

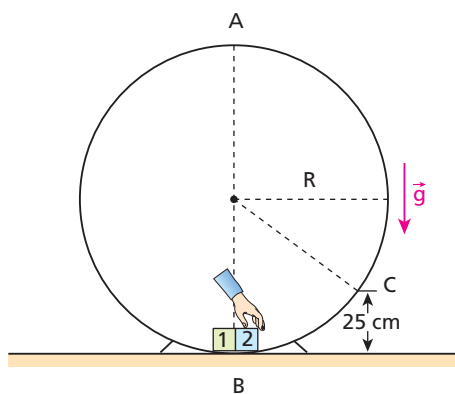
110. Um índio lança uma flecha de massa igual a 200 g verticalmente para cima num local em que g = 10 m/s². O gráfico abaixo mostra a variação da intensidade da força total do arco sobre a flecha durante o lançamento, que teve início no instante $t_0 = 0$ e término no instante $t_1 = 1{,}0$ s:

Desprezando o efeito do ar, determine:

a) o instante em que a velocidade da flecha tem intensidade máxima;

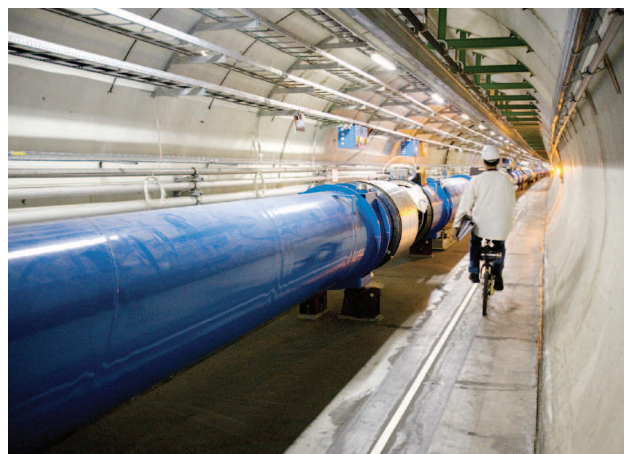
b) a intensidade da velocidade da flecha no instante $t_1 = 1{,}0$ s.

111. Na situação esquematizada a seguir, uma caixa de massa **M** está em repouso sobre um plano horizontal sem atrito. Uma esfera metálica de massa **m**, ligada ao centro da parede superior da caixa por um fio leve e inextensível de comprimento **L**, também está em repouso presa magneticamente por um eletroímã.

Em certo instante, o eletroímã é desligado e o sistema entra em movimento sem sofrer efeitos do ar. Sendo **g** a intensidade da aceleração da gravidade, pede-se determinar a intensidade da máxima velocidade horizontal da esfera em relação às paredes verticais da caixa.

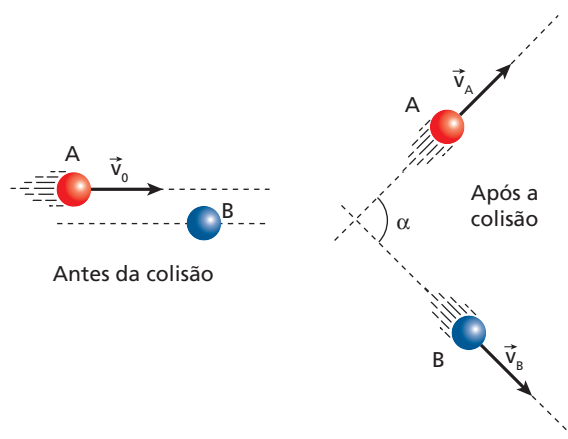
112. Uma bola de tênis é abandonada de uma altura **H**, acima do solo plano e horizontal. A bola cai verticalmente, choca-se com o solo e, depois do impacto, sobe também verticalmente, até parar. Depois da parada instantânea, a bola torna a cair, colidindo novamente com o solo. Supondo que seja **e** o coeficiente de restituição, calcule a altura máxima atingida pela bola depois de **n** choques sucessivos.

113. Na situação representada na figura a seguir, dois pequenos blocos **1** e **2** de massas iguais a 2,0 kg encontram-se em repouso no ponto **B** de uma calha circular de raio **R**, perfeitamente lisa, contida em um plano vertical. No local, a influência do ar é desprezível e adota-se $g = 10{,}0 \text{ m/s}^2$.

Em determinado instante, o bloco **2** é lançado para a direita, sendo-lhe comunicada uma velocidade de intensidade 10,0 m/s. Esse bloco realiza então um *loop* ao longo da parte interna da calha e em seguida se choca frontalmente com o bloco **1**, parado no ponto **B**. Sabendo-se que após a colisão os blocos permanecem unidos e que ao passarem no ponto **A** eles não trocam forças com a calha, pede-se calcular:

a) o valor de **R** em centímetros;
b) a intensidade da força de contato trocada entre o bloco **2** e a calha na sua primeira passagem no ponto **C**.

114. O *Large Hadron Collider*, ou simplesmente, LHC, do CERN, é o maior acelerador de partículas e o de maior energia existente do mundo. Seu principal objetivo é obter dados sobre colisões de feixes de partículas, tanto de prótons, a uma energia de 7,0 TeV (1,12 microjoules) por partícula, como de núcleos de chumbo, a uma energia de 574 TeV (92,0 microjoules) por núcleo. O laboratório localiza-se em um túnel de 27 km de circunferência, a 175 metros abaixo do nível do solo, na fronteira franco-suíça próximo a Genebra, Suíça.

SPL/Latinstock

Considere duas partículas com cargas elétricas de mesmo sinal em rota de colisão dentro de um acelerador semelhante ao LHC. A partícula **1** tem massa **2 m** e a partícula **2** é um próton, de massa **m**. Quando a distância entre elas é muito grande, suas velocidades têm a mesma direção e sentidos opostos, mas intensidades iguais a $6{,}0 \cdot 10^4$ m/s. Desprezando-se os efeitos relativísticos, determine os módulos das velocidades das partículas **1** e **2** imediatamente após a colisão perfeitamente elástica que se verifica entre elas.

115. Na figura a seguir, vemos duas bolas de boliche **A** e **B** iguais, livres para se moverem num plano horizontal liso. A bola **A**, dotada inicialmente de velocidade de módulo v_0, colide elástica e obliquamente com a bola **B**, inicialmente em repouso.

Após a colisão, **A** e **B** adquirem, respectivamente, velocidades iguais a $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, que formam entre si um ângulo α. Ignore o movimento de rotação das bolas.

a) Calcule o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$.
b) No caso em que $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ têm mesmo módulo **v**, calcule **v**.

Apêndice

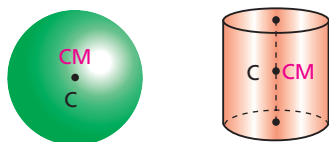
Centro de massa

Este é um conceito que foi invocado diversas vezes ao longo deste livro sem que ainda tivesse sido fornecida sua definição formal. Tentamos, dessa maneira, apelar a seu raciocínio abstrato contando apenas com a força da expressão: **centro de massa**.

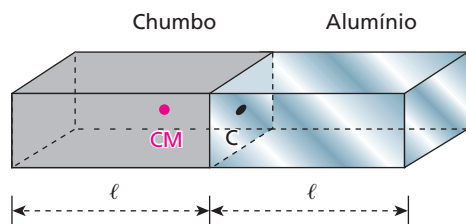
É chegado, agora, o momento que julgamos oportuno para a apresentação da referida noção e aproveitaremos para falar do centro de massa de sistemas contínuos (corpos extensos), e também do centro de massa de sistemas de partículas.

Conceito

Chama-se **centro de massa** de um sistema físico o ponto onde se admite concentrada, para efeito de cálculos, toda a sua massa.

Se o sistema físico for um corpo rígido constituído de material homogêneo, como uma esfera ou um cilindro, por exemplo, o centro de massa (**CM**) coincidirá com o centro geométrico (**C**).

Em cada um dos corpos acima, supostos homogêneos, o centro de massa coincide com o centro geométrico.

Entretanto, se o corpo em estudo não for constituído de material homogêneo, o centro de massa ficará deslocado para a região em que houver maior concentração de massa.

É o que ocorre com a barra bimetálica maciça representada na figura a seguir. A metade esquerda da barra é constituída de chumbo e a metade direita de alumínio.

Nessa situação, como o chumbo é mais denso do que o alumínio, o centro de massa da barra fica deslocado para o lado do chumbo, não coincidindo com o centro geométrico.

O centro de massa nem sempre é um ponto pertencente ao corpo, como ocorre, por exemplo, com um anel circular, homogêneo e de espessura uniforme, cujo centro de massa se situa no ponto de interseção de dois de seus diâmetros.

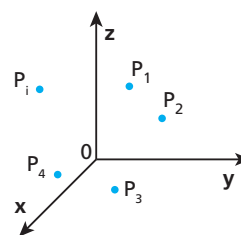
Posição do centro de massa de um sistema de partículas

Considere as partículas $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ..., $\mathbf{P_i}$, posicionadas em relação a um sistema cartesiano Oxyz, como ilustra o esquema a seguir. A cada partícula, associemos uma abscissa **x**, uma ordenada **y**, uma cota **z** e uma massa **m**:

$P_1 \equiv m_1\ (x_1; y_1; z_1)$

$P_2 \equiv m_2\ (x_2; y_2; z_2)$

$\vdots \quad \vdots$

$P_i \equiv m_i\ (x_i; y_i; z_i)$

Sejam $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$, respectivamente, a abscissa, a ordenada e a cota do centro de massa do sistema em relação ao mesmo referencial Oxyz.

Pode-se demonstrar que as coordenadas $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ são calculadas pelas seguintes médias ponderadas:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_ix_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_iy_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$$\bar{z} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_iz_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

Se todas as partículas estiverem dispostas em um mesmo plano Oxy, por exemplo, bastarão as coordenadas $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ para o posicionamento do centro de massa do sistema.

No caso de as partículas estarem alinhadas segundo uma mesma reta Ox bastará uma coordenada $\bar{\mathbf{x}}$ para o posicionamento do centro de massa do sistema.

Velocidade do centro de massa de um sistema de partículas

Seja um sistema de partículas $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ..., $\mathbf{P_i}$, que tem massas e velocidades respectivamente iguais a $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, ..., $\mathbf{m_i}$ e $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{v}}_i$.

A velocidade do centro de massa do sistema é dada pela seguinte expressão vetorial:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_i\vec{v}_i}{m_1 + m_2 + ... + m_i}$$

Os produtos $m_1\,\vec{v}_1$, $m_2\,\vec{v}_2$, ..., $m_i\,\vec{v}_i$, entretanto, correspondem, respectivamente, às quantidades de movimento $\vec{\mathbf{Q}}_1$, $\vec{\mathbf{Q}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{Q}}_i$ das partículas que compõem o sistema. Assim:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + ... + \vec{Q}_i}{m_1 + m_2 + ... + m_i},$$

mas $\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + ... + \vec{Q}_i = \vec{Q}_{total}$
e $m_1 + m_2 + ... + m_i = m_{total}$.

Disso, concluímos que:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{Q}_{total}}{m_{total}}$$

No caso de um sistema isolado, temos $\vec{Q}_{total}$ constante (Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento). Como m_{total} é constante, o mesmo deve acontecer com $\vec{v}_{CM}$. Diante disso, podemos enunciar que:

O centro de massa de um sistema isolado tem **velocidade vetorial constante**, permanecendo em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Aceleração do centro de massa de um sistema de partículas

Retomemos o sistema de partículas definido na seção anterior. Sendo $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{a}}_i$ as acelerações das partículas, concluímos que a aceleração do centro de massa do sistema é dada por:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... + m_i\vec{a}_i}{m_1 + m_2 + ... + m_i}$$

Os produtos $m_1\,\vec{a}_1$, $m_2\,\vec{a}_2$, ..., $m_i\,\vec{a}_i$, entretanto, correspondem, respectivamente, às forças resultantes $\vec{\mathbf{F}}_1$, $\vec{\mathbf{F}}_2$, ..., $\vec{\mathbf{F}}_i$ sobre cada partícula componente do sistema.

Diante disso, temos:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i}{m_1 + m_2 + ... + m_i},$$

mas $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_i = \vec{F}_{externa}$
e $m_1 + m_2 + ... + m_i = m_{total}$.

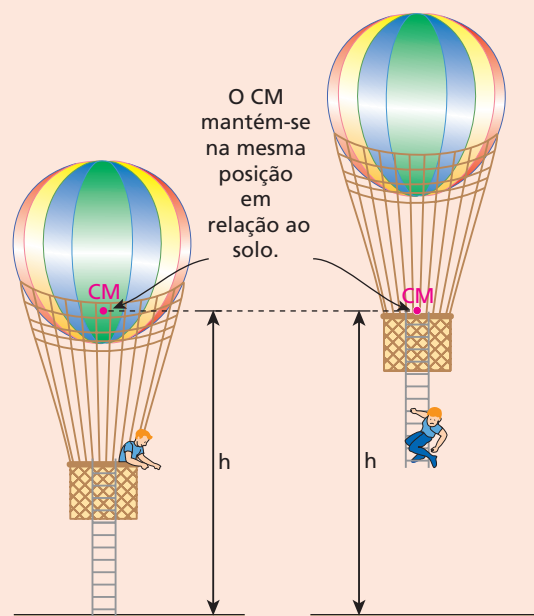
Portanto:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{externa}}{m_{total}}$$

O balão teimoso

Na figura ao lado, está esquematizado um balão tripulado, inicialmente em repouso em relação ao solo, em um local em que não há correntes de ar. Do cesto do balão pende uma escada de corda, que tangencia o chão. Nessas condições, o centro de massa (**CM**) do sistema balão-homem está a uma altura **h** em relação ao solo.

Admita que o homem resolva descer a escada na tentativa de abandonar o balão. Sua pretensão ficará frustrada, pois, ao atingir a extremidade inferior da escada, ele notará que esta já não mais tangenciará o chão como antes, tendo se elevado em relação ao solo.

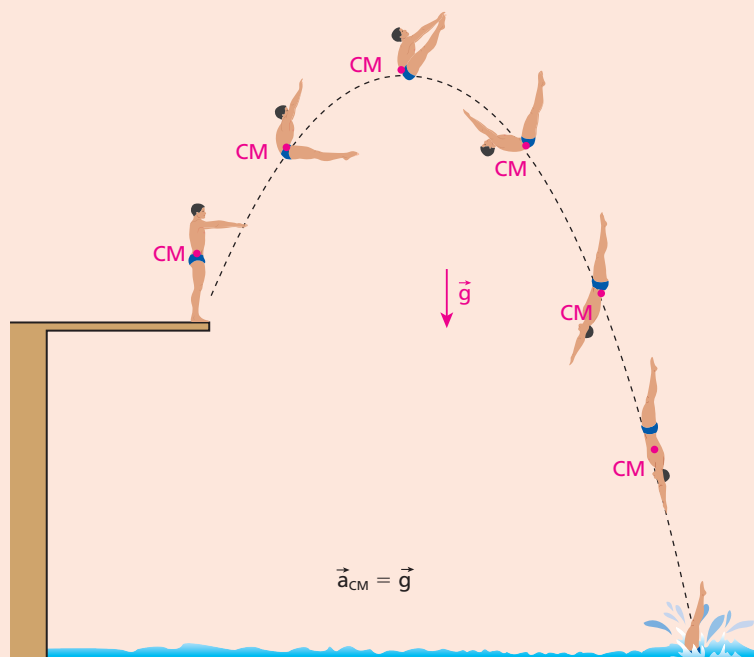
A explicação para o ocorrido é a seguinte: o sistema balão-homem é isolado de forças externas $(\vec{F}_{externa} = \vec{0})$ e, por isso, a velocidade do seu centro de massa deve permanecer constante.

Como o centro de massa estava inicialmente em repouso, assim deverá permanecer durante todo o tempo. Com a descida do homem há um deslocamento de massa para as partes mais baixas do balão, o que tenderia a rebaixar o centro de massa do sistema. Entretanto, a altura do centro de massa se mantém igual a **h**, uma vez que à medida que o homem desce, o balão sobe.

Ao retornar ao cesto do balão, o homem perceberá que, novamente, a extremidade inferior da escada estará tangenciando o chão.

Trajetória do centro de massa

Vimos que a aceleração do centro de massa de um sistema é dada pelo quociente da força externa resultante pela massa total.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{externa}}{m_{total}}$$

Observe a figura ao lado, em que um atleta realiza um salto ornamental.

Desprezando a influência do ar, podemos dizer que a resultante das forças externas no corpo do atleta é a força da gravidade (peso), que pode ser considerada **constante** durante o salto. Como a massa não varia, concluímos que a aceleração do centro de massa do corpo do atleta também não varia, mantendo-se **constante** e igual a $\vec{g}$. Por isso, esse ponto descreve uma **trajetória parabólica**, independentemente de o atleta realizar manobras com suas pernas e com seus braços e/ou contorções durante o voo.

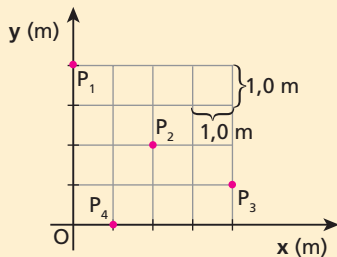
Já um espetáculo sempre encantador é o da queima de fogos de artifício, que deve ser sempre realizado por técnicos especializados, utilizando artefatos confiáveis e profissionais de segurança. Rojões, morteiros e foguetes são lançados no céu noturno, explodindo depois de descreverem trajetórias aproximadamente parabólicas. Após a explosão, as partes de cada artefato são lançadas em diversas direções e também descrevem trajetórias aproximadamente parabólicas, porém diferentes da trajetória inicial.

Como seria, no entanto, a trajetória do centro de massa do sistema depois da explosão se pudéssemos desprezar a influência do ar? Enquanto nenhum fragmento tocasse o solo, o centro de massa do sistema continuaria descrevendo a **mesma parábola inicial**. Isso ocorreria porque a força externa resultante no sistema não se alteraria (peso total), fazendo com que a aceleração do centro de massa se mantivesse constante e igual a $\vec{g}$.

Thinkstock/Getty Images

Queima de fogos: um belo *show* pirotécnico.

Exercícios nível 1

116. E.R. Quatro partículas, P_1, P_2, P_3 e P_4, de massas respectivamente iguais a 1,0 kg, 2,0 kg, 3,0 kg e 4,0 kg, encontram-se sobre um mesmo plano, posicionadas em relação a um referencial Oxy, conforme a figura abaixo:

Determine as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa do sistema.

Resolução:

A abscissa $\bar{x}$ do centro de massa do sistema é calculada por:

$$\bar{x} = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + m_3\,y_3 + m_4\,x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$\bar{x} = \frac{1,0 \cdot 0 + 2,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 4,0 + 4,0 \cdot 1,0}{1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0} = \frac{20}{10}\,(m)$$

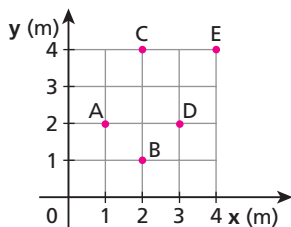
$$\boxed{\bar{x} = 2,0 m}$$

A ordenada $\bar{y}$ do centro de massa do sistema é calculada por:

$$\bar{y} = \frac{m_1\,y_1 + m_2\,y_2 + m_3\,y_3 + m_4\,y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

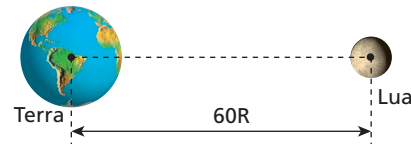
$$\bar{y} = \frac{1,0 \cdot 4,0 + 2,0 \cdot 2,0 + 3,0 \cdot 1,0 + 4,0 \cdot 0}{1,0 + 2,0 + 3,0 + 4,0} = \frac{11}{10}\,(m)$$

$$\boxed{\bar{y} = 1,1\ m}$$

117. Três pontos materiais, P_1, P_2 e P_3, encontram-se em repouso sobre um mesmo plano. Suas características estão dadas a seguir, sendo expressas por m (x, y), em que **m** é a massa em kg e o par **x**, **y**, as coordenadas cartesianas em metros:

$$P_1 \equiv 2(0, -1);\ P_2 \equiv 1(1, 0);\ P_3 \equiv 2(2, 6)$$

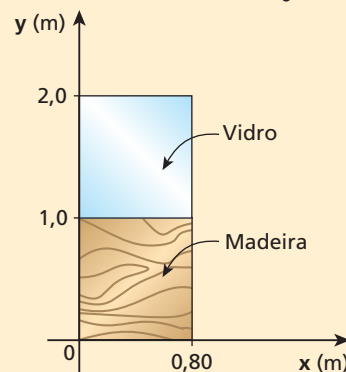
O centro de massa do sistema é dado no diagrama acima, pelo ponto:

a) A b) B c) C d) D e) E

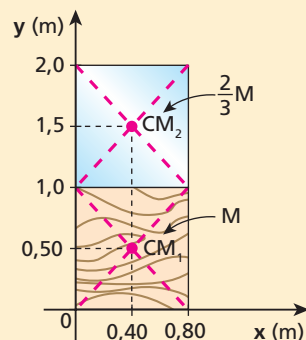
118. Suponha a Terra e a Lua esféricas e com massas uniformemente distribuídas. A distância entre os centros da Terra e da Lua é de aproximadamente 60R, em que **R** representa o raio terrestre. No esquema a seguir os dois astros estão representados fora de escala e em cores-fantasia.

Sendo a massa da Terra aproximadamente igual a 80 vezes a massa da Lua:

a) determine a posição do centro de massa do sistema Terra-Lua em relação ao centro da Terra;

b) diga se o centro de massa do sistema é um ponto interno ou externo à esfera terrestre. Justifique a resposta.

119. E.R. Uma porta que tem a sua metade inferior feita de madeira e sua metade superior feita de vidro tem espessura constante e as dimensões indicadas na figura.

Sabendo que a massa da parte de vidro é $\frac{2}{3}$ da massa da parte de madeira, determine as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa da porta, dadas pelo referencial Oxy.

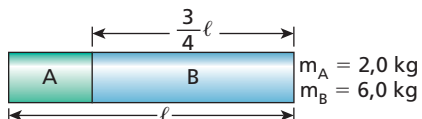
Resolução:

Localizemos, inicialmente, os centros de massa da parte de madeira e da parte de vidro. Para isso, tracemos as diagonais das respectivas regiões retangulares, como está mostrado na figura abaixo.

Como CM_1 e CM_2 pertencem à mesma vertical, a abscissa do centro de massa da porta ($\bar{x}$) fica determinada diretamente.

$$\boxed{\bar{x} = 0{,}40\ \text{m}}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1\, y_1 + m_2\, y_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{M\,0{,}50 + \frac{2}{3}M\,1{,}5}{M + \frac{2}{3}M}$$

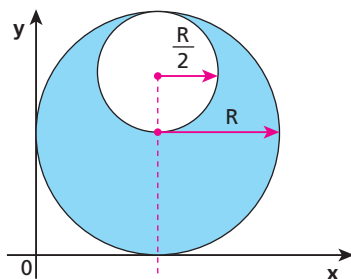
$$\boxed{\bar{y} = 0{,}90\ \text{m}}$$

120. Uma barra metálica é constituída pela junção de dois cilindros **A** e **B**, coaxiais e de materiais diferentes:

Supondo que os dois cilindros tenham secções transversais constantes e iguais e admitindo uniforme a distribuição de massas em cada um deles, determine a posição do centro de massa da barra.

121. (Uerj) A forma de uma raquete de tênis pode ser esquematizada por um aro circular homogêneo de raio **R** e massa m_1, preso a um cabo cilíndrico homogêneo de comprimento **L** e massa m_2.

Quando $R = \frac{L}{4}$ e $m_1 = m_2$, a distância do centro de massa da raquete ao centro do aro circular vale:

a) $\frac{R}{2}$ b) R   c) $\frac{3R}{2}$ d) 2R

122. Um artista plástico elaborou uma escultura que consiste de um disco metálico homogêneo de espessura constante e raio **R** dotado de um furo circular de raio $= \frac{R}{2}$, conforme representa a figura. Levando-se em conta o referencial 0xy indicado, determine as coordenadas do centro de massa da peça.

123. E.R. O esquema seguinte representa dois carrinhos **A** e **B**, que percorrem uma reta orientada com as velocidades indicadas:

Sabendo que as massas de **A** e de **B** valem, respectivamente, 4,0 kg e 6,0 kg, calcule a velocidade do centro de massa do sistema.

Resolução:

A velocidade do centro de massa do sistema é dada por:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B}{m_A + m_B}$$

Como os movimentos têm a mesma direção, podemos raciocinar em termos escalares:

$$v_{CM} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

Sendo $m_A = 4{,}0$ kg, $v_A = +20$ m/s, $m_B = 6{,}0$ kg e $v_B = +10$ m/s, calculemos v_{CM}:

$$v_{CM} = \frac{4{,}0 \cdot 20 + 6{,}0 \cdot 10}{4{,}0 + 6{,}0} = \frac{140}{10}\ (\text{m/s})$$

$$\boxed{v_{CM} = 14\ \text{m/s}}$$

124. Dois navios, $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$, de massas respectivamente iguais a 250 t e 150 t, partem de um mesmo ponto e adquirem movimentos retilíneos perpendiculares entre si. Sabendo que as velocidades de $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$ têm módulos $v_1 = 32$ nós e $v_2 = 40$ nós, podemos afirmar que o centro de massa do sistema terá velocidade de módulo:

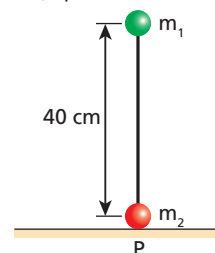
a) 35 nós.   c) 20 nós.   e) zero.
b) 25 nós.   d) 5 nós.

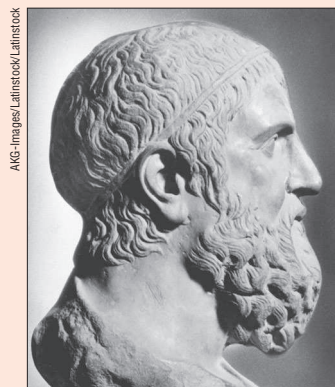
125. (UFC-CE) Um conjunto de três partículas, todas de igual massa **m**, está situado na origem de um sistema de coordenadas xy. Em dado instante, uma delas é atirada na direção **x**, com velocidade constante $v_x = 9{,}0$ m/s, e outra é atirada, simultaneamente, na direção **y**, com velocidade constante $v_y = 12$ m/s, ficando a terceira em repouso na origem. Determine o módulo da velocidade do centro de massa do conjunto.

126. Na situação da figura abaixo, não há atritos nem resistência do ar; a corda que os garotos **A** e **B** seguram é leve e o plano em que apoiam seus carrinhos é horizontal. As massas de **A** e **B** adicionadas às de seus respectivos carrinhos valem, nesta ordem, 150 kg e 100 kg.

Estando inicialmente em repouso, os garotos começam a puxar a corda, objetivando provocar uma colisão entre os carrinhos. Durante o movimento mútuo de **A** e **B**, qual a velocidade do centro de massa do sistema?

127. (ITA-SP) As massas $m_1 = 3{,}0$ kg e $m_2 = 1{,}0$ kg foram fixadas nas extremidades de uma haste homogênea, de massa desprezível e 40 cm de comprimento. Esse sistema foi colocado verticalmente sobre uma superfície plana, perfeitamente lisa, conforme mostra a figura, e abandonado. A massa m_1 colidirá com a superfície a uma distância **x** do ponto **P** dada por:

a) x = 0 (no ponto **P**).
b) x = 10 cm.
c) x = 20 cm.
d) x = 30 cm.
e) x = 40 cm.

Parte III

Marcos Welsh/agefotostock/Grupo

Estática

AKG-Images/Latinstock

Arquimedes
(287-212 a.C.)

Tópico 1

Estática dos sólidos

Bloco 1

1. Introdução

A Estática dos sólidos é um dos ramos da Mecânica que mais desenvolveram alcance prático.

Aqui, estudaremos o **equilíbrio estático** dos sólidos, isto é, situações em que eles não apresentam nenhum tipo de movimento macroscópico em relação a um dado referencial, que, bastante frequentemente, é o solo.

Muitas são as estruturas em que o equilíbrio estático tem de ser garantido a fim de que sejam evitados acidentes. Essa preocupação é constante, por exemplo, durante a construção de edifícios, pontes, navios e aviões.

Thinkstock/Getty Images

Conhecimentos de Estática foram necessários para garantir as condições de equilíbrio dessa ponte.

A Estática também propiciou o desenvolvimento de muitas máquinas elementares extremamente úteis, como alavancas, parafusos e cunhas, todas quase sempre destinadas à multiplicação das forças.

Além de ser empregada em todas essas utilidades práticas, a Estática também permite entender algumas situações de equilíbrio muito curiosas.

Cristina Xavier

A Estática está presente até mesmo na simples tarefa de abrir uma garrafa: o abridor é um tipo de alavanca.

Cristina Xavier

O joão-teimoso é um boneco que se levanta sempre que é tombado. O segredo desse comportamento está na posição do seu centro de gravidade.

Cristina Xavier

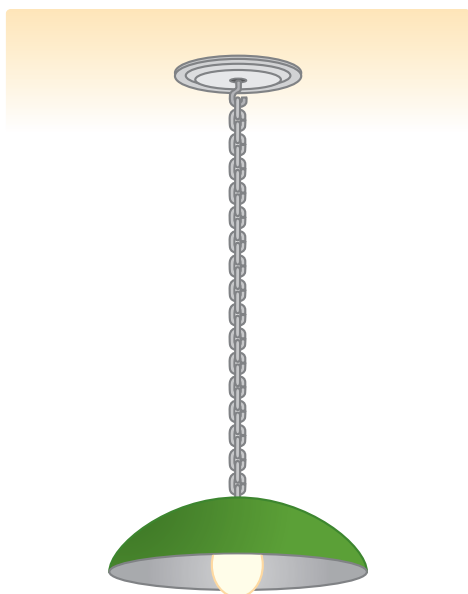
A Estática também justifica a vantagem do uso de uma chave de fenda para apertar ou desapertar parafusos.

Cristina Xavier

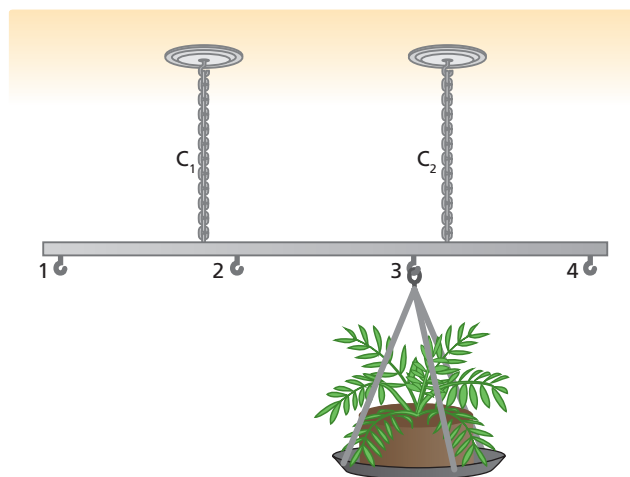
O sistema encontra-se em equilíbrio, apoiado na borda da boca da garrafa. Também nesse caso o segredo do equilíbrio está na posição do centro de gravidade do sistema.

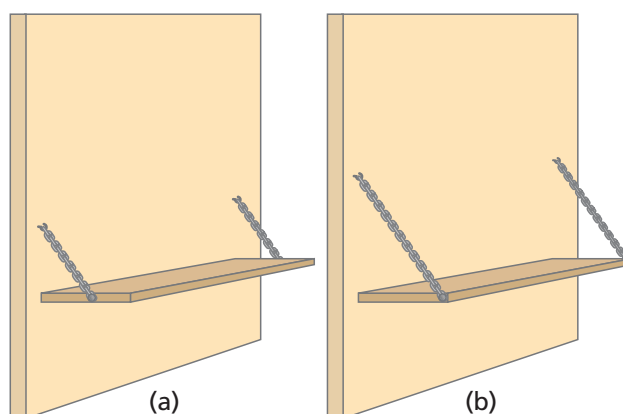
Na história do desenvolvimento da Estática, teve grande destaque o grego **Arquimedes** (287 a.C.-212 a.C.). Nascido em Siracusa, ele é considerado o pai da Mecânica. Em um de seus livros, Arquimedes expôs os princípios de funcionamento das alavancas e descreveu a determinação do centro de gravidade de um corpo qualquer, postulando as bases de toda a Estática.

2. Estática do ponto material e estática do corpo extenso

O sistema abaixo é formado por um lustre em repouso, suspenso no teto de uma sala por meio de uma corrente.

Quando esse sistema foi fixado no teto, certamente ninguém teve a preocupação de que seu equilíbrio pudesse ser comprometido por uma possível rotação. De fato, a possibilidade de rotação não é um fator relevante nessa situação, pois, para o equilíbrio acontecer, basta que a corrente suporte a tração exercida pelo lustre sem se romper, e que a fixação no teto seja bem-feita. Nesse caso, o lustre pode ser considerado uma partícula suspensa na extremidade da corrente.

A situação descrita acima se enquadra no que chamamos de **estática do ponto material** ou **estática da partícula**.

Considere agora a situação de repouso ilustrada na figura a seguir, em que uma barra com ganchos para pendurar vasos está suspensa no teto por meio de duas correntes C_1 e C_2.

Nesse caso, dependendo do gancho em que um mesmo vaso é dependurado, temos situações diferentes. Quando o vaso está no gancho 3, por exemplo, a corrente C_2 suporta mais carga que a C_1. Suspenso, no gancho 2, porém, a corrente C_1 passa a ser mais tracionada que a C_2. Observe que, nesse caso, a possibilidade de rotação da barra passa a ter importância, pois ela poderá ocorrer quando o vaso for colocado no gancho 1 (possível rotação em torno do ponto de suspensão da corrente C_1) ou no gancho 4 (possível rotação em torno do ponto de suspensão da corrente C_2).

O equilíbrio da barra representada na figura anterior se enquadra na **estática do corpo extenso**, porque os efeitos produzidos por uma mesma carga dependem da posição em que ela é colocada. Além disso, é importante destacar a possibilidade de ocorrer rotação em torno de um ponto. Por tudo isso, a barra não pode ser encarada apenas como um ponto material.

Nessa ilustração, temos outra situação que se enquadra na estática do corpo extenso. Uma mesma prateleira fixa numa parede pode suportar maior carga em (**b**) que em (**a**). Aqui, a escolha dos pontos de fixação das correntes na prateleira é muito importante.

Neste Bloco, estudaremos a estática do ponto material e, nos seguintes, a estática do corpo extenso.

TF1-396_435_P3T1.indd 398 16/08/12 17:22

Equilíbrio do ponto material

Como foi visto em Dinâmica, um ponto material está em equilíbrio em relação a um referencial quando se encontra em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme em relação a esse referencial. O repouso corresponde ao equilíbrio estático, enquanto o movimento retilíneo e uniforme corresponde ao equilíbrio dinâmico.

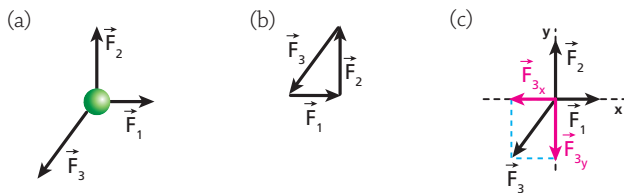
Recorde que:

> A condição para um ponto material estar em equilíbrio em relação a um referencial é que a resultante das forças que nele atuam seja nula.

As figuras a seguir representam uma partícula em equilíbrio e as forças atuantes.

(a)

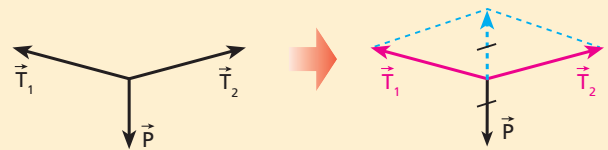
(b)

(c)

Em (**a**), a partícula está sob a ação exclusiva de três forças no plano do papel.

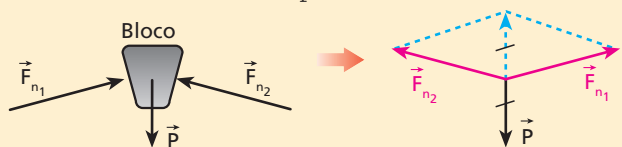
Em (**b**), as três forças são somadas pela regra do polígono, obtendo-se uma linha poligonal fechada, razão pela qual a força resultante é nula e a partícula encontra-se em equilíbrio.

Em (**c**), analisamos a força resultante por meio da decomposição das forças segundo duas retas perpendiculares **x** e **y**: $\vec{F}_{3_x}$ equilibra $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_{3_y}$ equilibra $\vec{F}_2$.

Pessoa suspensa em cabo de aço

Em uma pessoa suspensa em um cabo de aço, as forças que nela atuam são seu peso e as trações do cabo de aço. Se a pessoa estiver em equilíbrio, a resultante dessas forças será nula.

Note que a soma das trações $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$, obtida aqui pela regra do paralelogramo, equilibra o peso $\vec{P}$.

Os belos arcos nas construções da Roma Antiga: sem cimento!

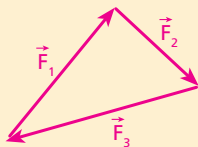
Na Roma Antiga, os arcos eram construídos com blocos de pedra simplesmente justapostos, sem nenhum material que ligasse um bloco a outro. Isso era possível porque cada bloco é equilibrado pelas forças que recebe dos blocos adjacentes. Ao se considerar a não solicitação de atrito, as forças que cada bloco recebe são normais de compressão:

Observe que a soma de $\vec{F}_{n1}$ com $\vec{F}_{n2}$, obtida novamente pela regra do paralelogramo, equilibra o peso $\vec{P}$.

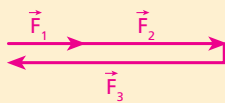
Exercícios nível 1

1. Uma partícula encontra-se em equilíbrio, submetida a apenas duas forças. O que se pode concluir a respeito delas?

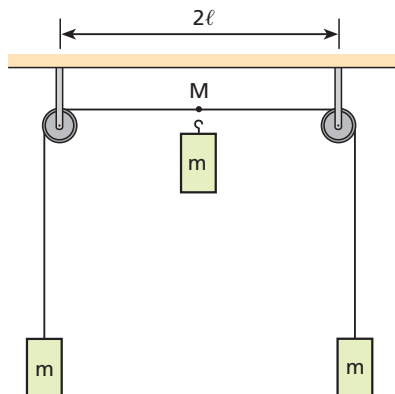
2. E.R. Um ponto material está em equilíbrio, submetido a apenas três forças. Qual é a condição que as intensidades dessas forças devem satisfazer?

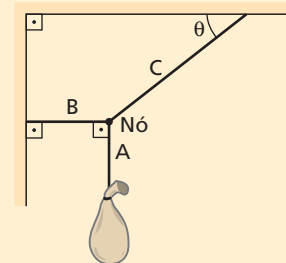
Resolução:

1ª possibilidade: As forças têm direções diferentes. Nesse caso, posicionando-as segundo a regra do polígono, obtemos um triângulo:

Para o triângulo existir, é necessário que a medida de cada um dos seus lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois. Então, **a intensidade de cada uma das três forças tem de ser menor que a soma das intensidades das outras duas**. Por exemplo: $F_1 = 3$ N, $F_2 = 4$ N e $F_3 = 6$ N.

2ª possibilidade: As forças têm direções iguais. Agora, temos uma situação do seguinte tipo:

Isso significa que **a intensidade de uma das três forças tem de ser igual à soma das intensidades das outras duas**.

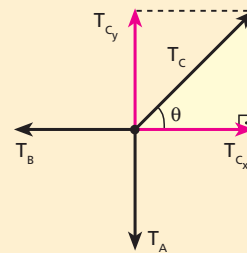
3. Uma partícula submetida a apenas três forças, de intensidades 3 N, 4 N e 20 N, pode estar em equilíbrio?

4. Em cada uma das extremidades de um fio considerado ideal, que passa por duas pequenas polias também supostas ideais, está suspenso um corpo de massa igual a **m**. Um terceiro corpo de massa **m** é suspenso do ponto médio **M** do fio e baixado até a posição de equilíbrio. Determine, em função de ℓ (ver figura), quanto desceu o terceiro corpo.

5. E.R. Na figura, um corpo de peso 120 N encontra-se em equilíbrio, suspenso por um conjunto de três fios ideais **A**, **B** e **C**. Calcule as intensidades das trações $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ e $\vec{T}_C$, respectivamente nos fios **A**, **B** e **C**.

sen θ = 0,60
cos θ = 0,80

Resolução:

A tração no fio **A** tem a mesma intensidade do peso do corpo:

$$T_A = 120 \text{ N}$$

Representemos as forças de tração que os fios exercem no nó e façamos a decomposição dessas forças segundo a vertical e a horizontal:

Do equilíbrio, vem:

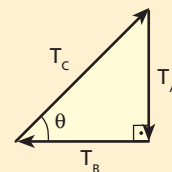
- $T_{C_y} = T_A \Rightarrow T_C \cdot \text{sen}\,\theta = T_A \Rightarrow T_C \cdot 0{,}60 = 120$

$$T_C = 200 \text{ N}$$

- $T_B = T_{C_x} \Rightarrow T_B = T_C \cdot \cos\theta \Rightarrow T_B = 200 \cdot 0{,}80$

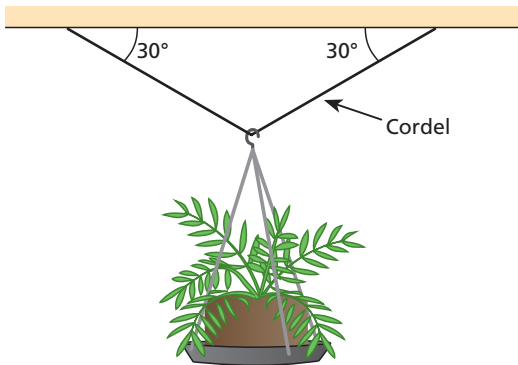
$$T_B = 160 \text{ N}$$

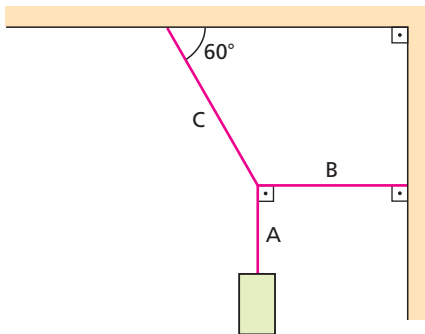
Nota:

- Também podemos determinar T_B e T_C lembrando que o polígono das forças de tração exercidas pelos fios no nó é fechado.

Assim, temos:

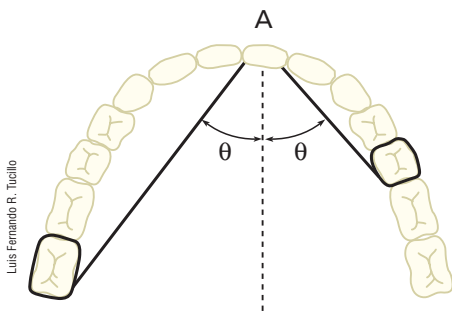
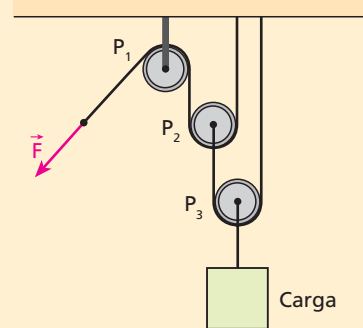
$$\text{sen}\,\theta = \frac{T_A}{T_C} \Rightarrow 0{,}60 = \frac{120}{T_C} \Rightarrow \boxed{T_C = 200 \text{ N}}$$

$$\cos\theta = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow 0{,}80 = \frac{T_B}{200} \Rightarrow \boxed{T_B = 160 \text{ N}}$$

6. Um ornamento de peso 80 N está suspenso por um cordel, como indica a figura:

No equilíbrio, calcule a intensidade da tração no cordel.

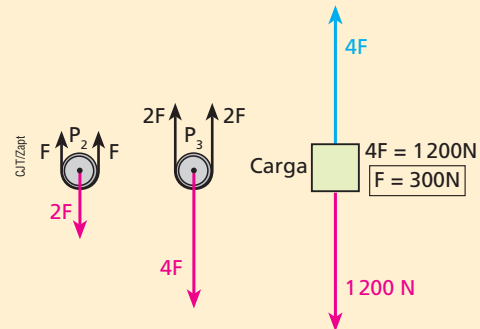
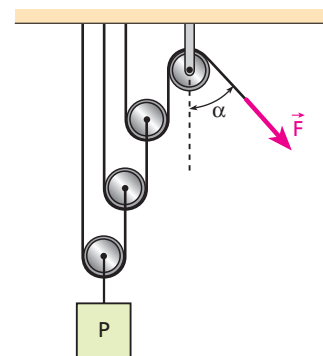
7. Uma caixa é mantida em equilíbrio por três cordas **A**, **B** e **C**, como representa a figura. Coloque em ordem crescente as intensidades T_A, T_B e T_C das trações nessas cordas.

8. Uma partícula encontra-se em equilíbrio sob a ação de um sistema constituído de apenas três forças, sendo o peso uma delas. A respeito das outras duas forças, podemos afirmar que:

a) elas são necessariamente horizontais.
b) elas são necessariamente verticais.
c) apenas uma pode ser vertical.
d) elas não podem ser ambas horizontais.
e) elas não podem ser ambas verticais.

9. (UFPE) Para corrigir o desalinhamento do dente incisivo **A** de um paciente, um dentista fez passar um elástico por esse dente e o amarrou a dois dentes posteriores, conforme a figura. Sabendo que a tensão no elástico é de 10 N e que cos θ = 0,85, determine o valor em newtons da força total aplicada pelo elástico sobre o dente **A**.

10. E.R. A figura representa um sistema constituído de fios e três polias P_1, P_2 e P_3, todos considerados ideais. A força $\vec{F}$ aplicada na extremidade de um dos fios mantém o sistema em equilíbrio, sustentando uma carga de 1 200 N. Calcule a intensidade da força $\vec{F}$.

Resolução:

Para resolver esse tipo de exercício, é necessário lembrar que:

- Num **mesmo** fio ideal, a tração tem a mesma intensidade em todos os seus pontos.
- Em qualquer corpo em equilíbrio, a força resultante é nula (nas polias, a força resultante seria nula mesmo que não estivessem em equilíbrio, porque, sendo consideradas ideais, têm massas nulas).

Então, temos:

11. (Ufop-MG) O sistema de roldanas da figura está sendo usado para elevar, em equilíbrio, um objeto de peso **P**.

Então, o módulo da força $\vec{F}$ vale:

a) $F = \dfrac{P}{\cos\alpha}$

b) $F = \dfrac{P}{3}$

c) $F = \dfrac{P}{3}\cos\alpha$

d) $F = \dfrac{P}{2^3}$

e) $F = \dfrac{P}{2^3}\cos\alpha$

Leitura

Gigante, porém frágil

Considere dois pilares, S_1 e S_2, feitos de um mesmo material, como representa a figura ao lado, em que a_1, b_1 e c_1 são as medidas das arestas de S_1, e a_2, b_2 e c_2, as medidas das arestas de S_2.

Pilar S_1	**Pilar S_2**
Área da base: A_1	Área da base: A_2
Volume: V_1	Volume: V_2
Massa: m_1	Massa: m_2
Peso: P_1	Peso: P_2

Supondo que todas as dimensões lineares (comprimentos) de S_2 sejam iguais às correspondentes dimensões lineares de S_1 multiplicadas por um **mesmo** número **n**, temos: $a_2 = n\,a_1$, $b_2 = n\,b_1$ e $c_2 = n\,c_1$.

Consequentemente, qualquer área (de uma face ou de outra seção) considerada em S_2 é igual à área correspondente em S_1 multiplicada por n^2. Para as áreas das bases, por exemplo, temos:

$A_1 = a_1\,b_1$

$A_2 = a_2\,b_2 = n\,a_1 \cdot n\,b_1 = n^2\,a_1\,b_1$

$$A_2 = n^2\,A_1$$

Além disso, o volume de S_2 é igual ao volume de S_1 multiplicado por $\mathbf{n^3}$. De fato:

$V_1 = a_1\,b_1\,c_1$

$V_2 = a_2\,b_2\,c_2 = n\,a_1 \cdot n\,b_1 \cdot n\,c_1 = n^3 \cdot a_1\,b_1\,c_1$

$$V_2 = n^3\,V_1$$

Como a massa é proporcional ao volume, para corpos maciços de um mesmo material e sujeitos às mesmas condições físicas, temos:

$$m_2 = n^3\,m_1$$

Supondo ainda os pilares num mesmo ambiente (mesmo campo gravitacional), podemos dizer que as intensidades de seus pesos são proporcionais às suas massas:

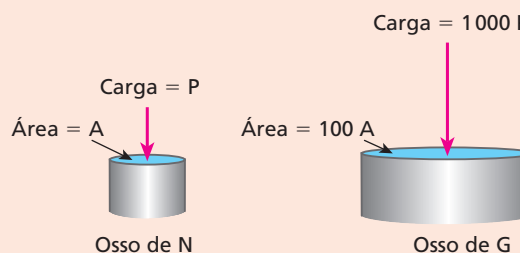
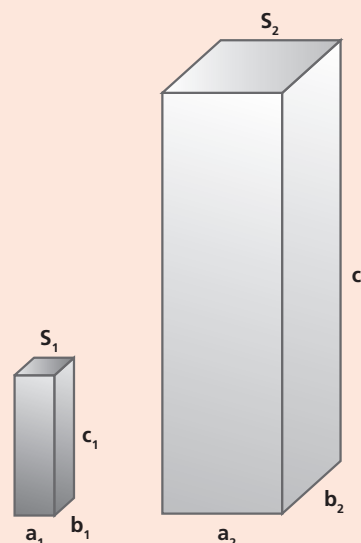
$$P_2 = n^3\,P_1$$

As conclusões a que chegamos até aqui continuam válidas para corpos de outros formatos, desde que as condições estabelecidas continuem satisfeitas.

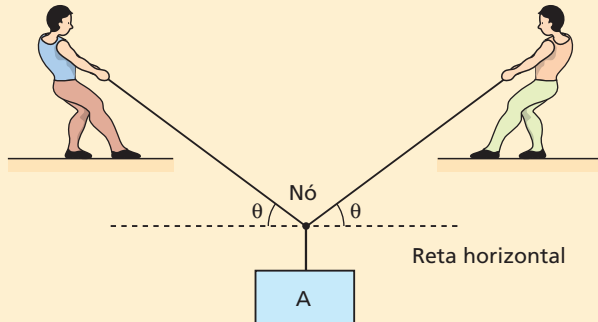
Não é difícil concluir, então, que a resistência à ruptura (carga máxima suportável) de um pilar, dos ossos de uma perna ou de uma corda é proporcional à área de sua seção transversal. De fato, se um pilar suporta uma carga máxima determinada, dois pilares iguais ao primeiro suportam o **dobro** dessa mesma carga. Note que a área da seção transversal dos dois pilares também é o **dobro** da área da seção transversal de um só pilar.

Para finalizar, considere um homem de altura normal **N** e um homem gigante **G**, no qual todas as dimensões lineares estão multiplicadas por 10 ($n = 10$) em relação ao homem normal. Se, por exemplo, a altura de **N** é igual a 1,8 m, a altura de **G** é igual a 18 m.

Observe que, sendo **P** o peso de **N**, o peso de **G** é 1 000 P, pois, se as dimensões lineares foram multiplicadas por 10 ($n = 10$), o volume, a massa e o peso foram multiplicados por 1 000 ($n^3 = 1\,000$). A área das seções transversais dos ossos de sustentação de **G**, entretanto, **não foram multiplicadas por 1 000**, mas apenas por 100 ($n^2 = 100$), o que fragiliza o gigante, conforme figura ao lado.

Para concluir, procure imaginar que a situação desse gigante, se conseguisse ficar em pé, seria a seguinte: ele teria a sensação de um homem de altura normal que suportasse sobre si uma pilha de nove homens de alturas normais (iguais a ele)!

Exercícios

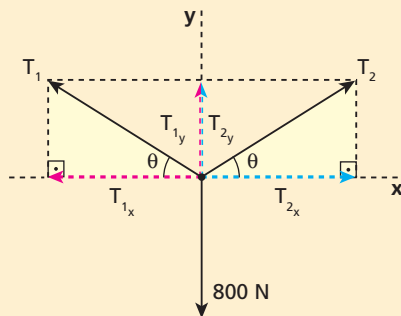
nível 2

12. E.R. Dois homens seguram as extremidades de uma corda leve, flexível e inextensível. No ponto médio da corda, um corpo **A** de peso igual a 800 N está suspenso em equilíbrio:

Analise as afirmações:

01. Se o ângulo **θ** for igual a 30°, a tração nos ramos da corda valerá 800 N.
02. Se o ângulo **θ** for duplicado, a intensidade da tração nos ramos da corda se reduzirá à metade.
04. Se os homens forem suficientemente fortes, conseguirão dispor a corda em equilíbrio exatamente na horizontal.
08. A tração nos ramos da corda terá intensidade mínima quando eles estiverem na vertical.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

Resolução:

Representemos as forças que atuam no nó e façamos sua decomposição na horizontal e na vertical:

Temos, então:

$T_{1_x} = T_{2_x} \Rightarrow T_1 \cdot \cos\theta = T_2 \cdot \cos\theta \Rightarrow T_1 = T_2 = T$

$T_{1_y} + T_{2_y} = 800 \Rightarrow T \cdot \text{sen}\,\theta + T \cdot \text{sen}\,\theta = 800 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2T \cdot \text{sen}\,\theta = 800$

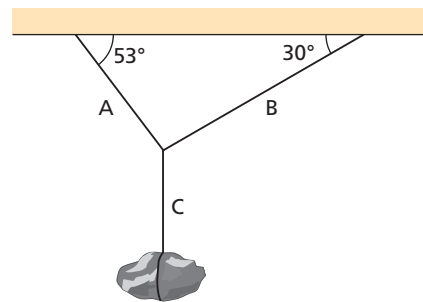
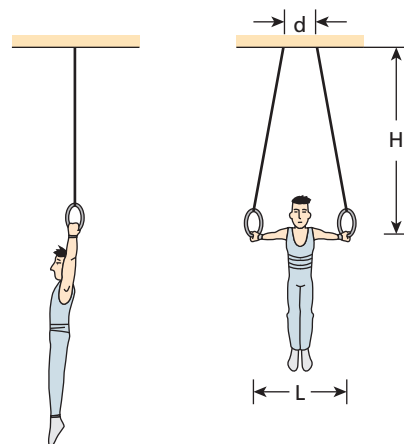
$$T = \frac{400}{\text{sen}\,\theta} \quad \text{(SI)}$$

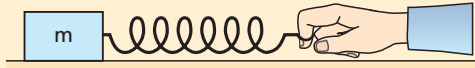
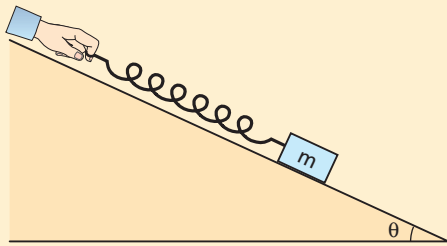
01. Correta. Como sen 30° $= \frac{1}{2}$, temos $T = \frac{400}{\frac{1}{2}}$ (SI), ou seja, T = 800 N.
02. Incorreta. Quando **θ** é duplicado, sen θ aumenta, mas não duplica (**θ** e sen θ não são proporcionais). Assim, **T** se reduz, mas não à metade.
04. Incorreta. Quando se tenta levar a corda à horizontal, **θ** tende a zero, sen θ tende a zero e **T** tende a infinito. Note ainda que não haveria as componentes T_y para equilibrar a tração de 800 N se a corda estivesse na horizontal.
08. Correta. O valor mínimo de **T** acontece quando sen θ é máximo, ou seja, sen θ =1, o que implica θ = 90° (ramos da corda dispostos verticalmente).

Resposta: 09

13. Considere um fio suposto ideal esticado horizontalmente entre duas estacas. Um pássaro de peso igual a 3,0 N pousa no ponto médio do fio, aí permanecendo em equilíbrio. Calcule a tração em cada uma das metades do fio, sabendo que elas formam um ângulo de 178°. Adote sen 1° = 0,017.

14. Uma pedra de 664 N de peso encontra-se em repouso, suspensa por três cordas leves **A**, **B** e **C**, como representa a figura. Calcule as intensidades das trações nessas cordas (T_A, T_B e T_C).

Use: sen 30° = 0,50; cos 30° = 0,87; sen 53° = 0,80; cos 53° = = 0,60.

15. (Unicamp-SP) Uma das modalidades de ginástica olímpica é a das argolas. Nessa modalidade, os músculos mais solicitados são os dos braços, que suportam as cargas horizontais, e os da região dorsal, que suportam os esforços verticais. Considerando um atleta cuja massa é de 60 kg e sendo os comprimentos indicados na figura H = 3,0 m, L = 1,5 m e d = 0,5 m, responda (g = 10 m/s²):

a) Qual a tensão em cada corda quando o atleta se encontra pendurado no início do exercício com os braços na vertical?
b) Quando o atleta abre os braços na horizontal, qual a componente horizontal da tensão em cada corda?

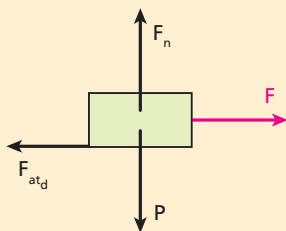
16. E.R. Nas situações **a** e **b** ilustradas a seguir, um mesmo bloco de massa **m** igual a 10 kg encontra-se na iminência de escorregar, tracionado elasticamente por uma mola de constante elástica **K** igual a 300 N/m.

Situação a: bloco apoiado em um plano horizontal na iminência de escorregar.

Situação b: bloco apoiado em um plano inclinado de θ em relação à horizontal ($\text{sen } \theta = 0{,}60$ e $\cos \theta = 0{,}80$) na iminência de subir.

Sabendo que, nas duas situações, o coeficiente de atrito estático μ_e entre o bloco e o plano é igual a 0,45 e considerando **g** igual a 10 m/s^2, calcule a deformação da mola:

a) na situação **a**;
b) na situação **b**.

Resolução:

Como o bloco encontra-se na iminência de escorregar, a força de atrito atuante nele é a força de destaque, dada por $F_{at_d} = \mu_e F_n$, em que F_n é a intensidade da força normal com que o bloco e o plano se comprimem.

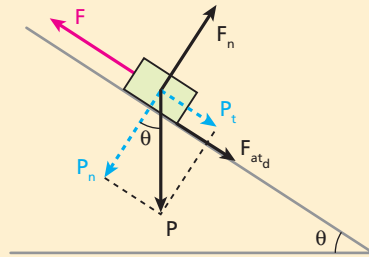
a) Representando as forças atuantes no bloco, temos:

Do equilíbrio do bloco, vem:

$$F_n = P = m\,g = 10 \cdot 10 \Rightarrow F_n = 100 \text{ N}$$

$$F = F_{at_d} = \mu_e F_n = 0{,}45 \cdot 100 \Rightarrow F = 45 \text{ N}$$

Usando a Lei de Hooke, calculamos a deformação Δx:

$$F = K\,\Delta x \Rightarrow 45 = 300 \cdot \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = 15 \text{ cm}}$$

b) Representando as forças atuantes no bloco, temos:

Do equilíbrio do bloco, vem:

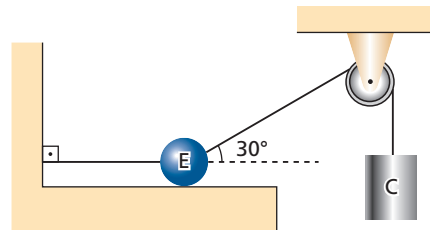
$$F_n = P_n = P \cdot \cos \theta = m\,g \cdot \cos \theta = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}80 \Rightarrow F_n = 80 \text{ N}$$

$$F = P_t + F_{at_d} = P \cdot \text{sen } \theta + \mu_e F_n = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}60 + 0{,}45 \cdot 80 \Rightarrow$$

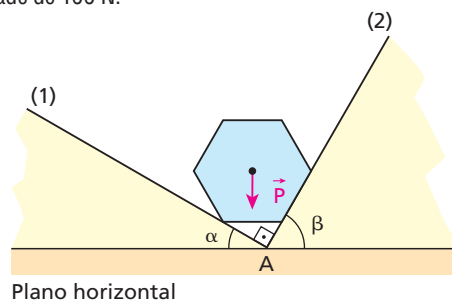
$$\Rightarrow F = 96 \text{ N}$$

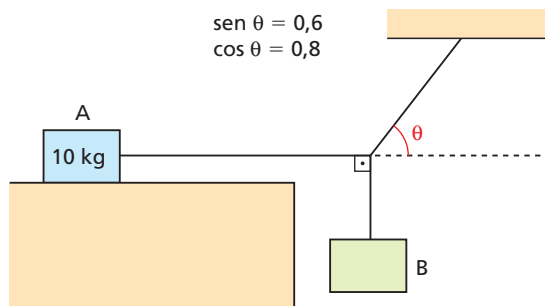
Usando a Lei de Hooke:

$$F = K\,\Delta x \Rightarrow 96 = 300 \cdot \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = 32 \text{ cm}}$$

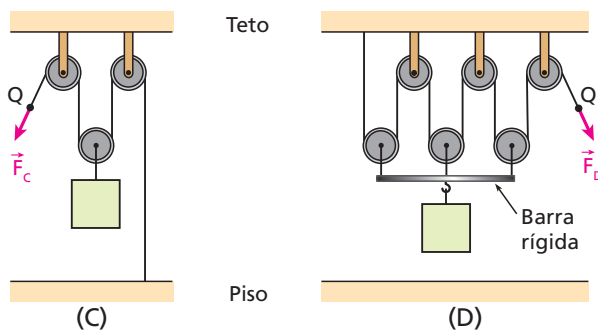
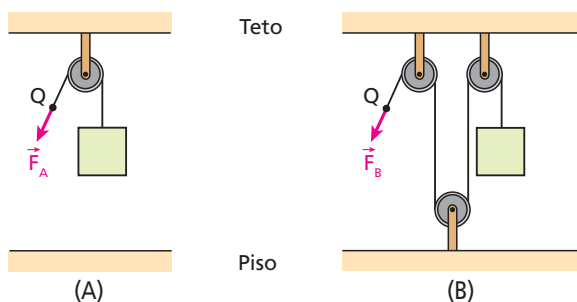
17. Uma esfera de aço (**E**) pesando 200 N encontra-se apoiada em um plano horizontal e amarrada a uma parede vertical por meio de um fio ideal:

Um cilindro (**C**) de peso 100 N é ligado a um fio ideal, que passa por uma polia também ideal e vai prender-se à esfera. Calcule:

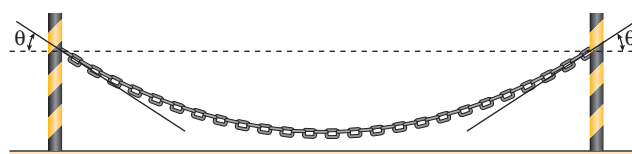
a) a intensidade da força de reação normal do plano horizontal sobre a esfera;
b) a intensidade da força de tração no fio que liga a esfera à parede vertical;
c) a intensidade do peso que o cilindro deveria ter para que a esfera ficasse na iminência de sair do plano.

18. Na figura a seguir, (1) e (2) são duas rampas planas perfeitamente lisas que se interceptam em uma reta horizontal, que passa por **A** e é perpendicular ao plano do papel. Nas rampas, apoia-se um prisma reto, hexagonal, regular e homogêneo, cujo peso $\vec{P}$ tem intensidade de 100 N.

Sabendo que $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, determine as intensidades das forças aplicadas pelo prisma sobre as rampas.

19. Na situação de equilíbrio esquematizada a seguir, os fios são ideais:

Sendo 0,4 o coeficiente de atrito estático entre o bloco **A** e o plano horizontal em que ele se apoia, determine a maior massa que o bloco **B** pode ter de modo que o equilíbrio se mantenha, supondo essa montagem feita:

a) na superfície da Terra;
b) na superfície da Lua.

20. Nas montagens esquematizadas a seguir, considere ideais os fios, as polias e a barra rígida. Em todos os casos, a caixa suspensa tem peso de módulo **P**.

a) Determine as intensidades das forças $\vec{F}_A$ $\vec{F}_B$ $\vec{F}_C$ e $\vec{F}_D$ que equilibram os sistemas **A**, **B**, **C** e **D**, respectivamente.
b) Para que a caixa, ao ser erguida em equilíbrio, sofra um deslocamento de módulo **d**, quais deverão ser os módulos d_A, d_B, d_C e d_D dos deslocamentos do ponto **Q** nos sistemas **A**, **B**, **C** e **D**, respectivamente?

21. A figura a seguir representa uma corrente de peso igual a 40 N, cujas extremidades estão em um mesmo nível horizontal, presas em dois suportes.

Considerando iguais a 45° os ângulos **θ** indicados na figura, determine a intensidade da força:

a) que a corrente exerce em cada suporte;
b) de tração no ponto mais baixo da corrente.

Bloco 2

3. Equilíbrio do corpo extenso

Tratar um corpo como um ponto material equivale a admitir que, na situação em que está sendo estudado, só interessa considerar a possibilidade de ele adquirir algum movimento de translação, já que não se pode caracterizar o movimento de rotação de um corpo puntiforme. Por isso, dizemos que o equilíbrio de um ponto material é de translação.

O corpo extenso, por sua vez, pode apresentar tanto o movimento de translação como o de rotação. Por esse motivo, o estudo do equilíbrio do corpo extenso requer duas análises: uma referente à translação e outra referente à rotação.

Equilíbrio de translação

Um corpo extenso está em **equilíbrio de translação** quando seu centro de massa está em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme em relação a um determinado referencial.

A condição para que o equilíbrio de translação de um corpo extenso ocorra é que a resultante das forças externas que nele atuam seja nula, pois, desse modo, também será nula a aceleração de seu centro de massa:

$$\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{CM} = m \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

Equilíbrio de rotação

Um corpo extenso está em **equilíbrio de rotação** quando está em repouso (não rota) ou em movimento de rotação uniforme (rota com velocidade angular constante) em relação a um referencial determinado.

A condição para que o equilíbrio de rotação de um corpo extenso ocorra será vista no item 5 – Condições de equilíbrio do corpo extenso (p. 408).

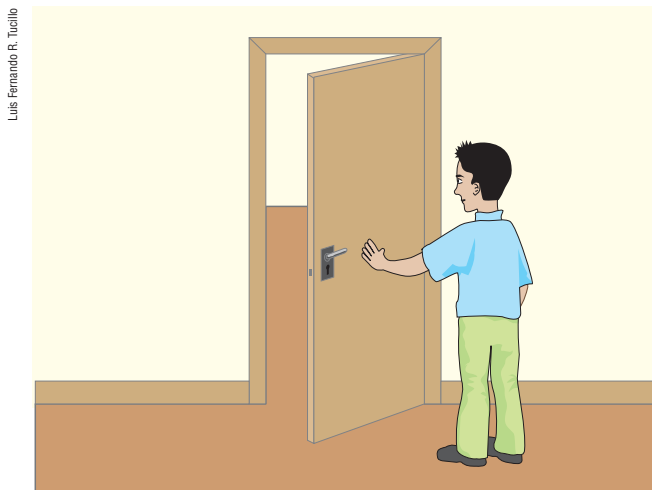
Na Estática, são considerados apenas corpos extensos em equilíbrio estático, isto é, corpos em repouso tanto em relação à translação como em relação à rotação (corpos que não transladam nem rotam).

4. Momento escalar de uma força em relação a um eixo

Procuraremos aqui uma grandeza capaz de medir a eficiência de uma força em produzir rotação em um corpo. Para isso, vamos considerar algumas situações práticas.

Situação 1:

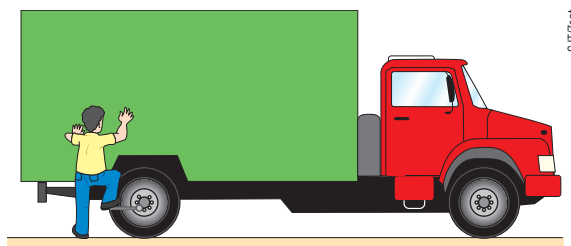
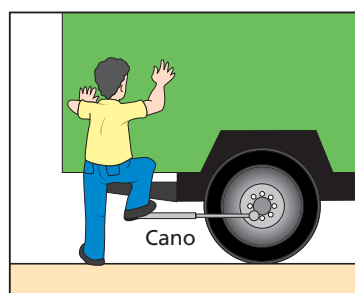
Uma pessoa deseja fechar uma porta, como sugere a figura.

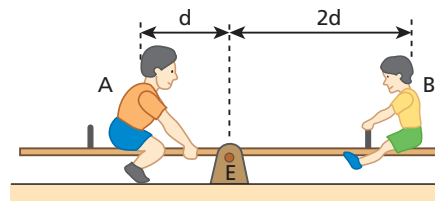
Luis Fernando R. Tucillo

Para tanto, ela precisa aplicar uma força que, vamos supor, seja perpendicular à porta.

É fácil constatar que a eficiência da força em fazer a porta rotar é tanto maior quanto maiores forem sua intensidade e a distância entre o local onde ela é aplicada e o eixo de rotação (eixo das dobradiças).

Situação 2:

O motorista do caminhão representado na figura está tentando desapertar um parafuso de uma das rodas com uma chave.

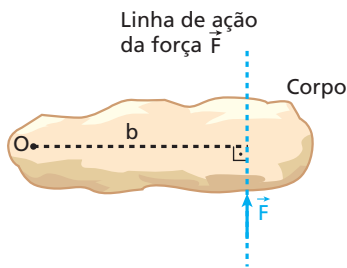
CJT/Zapt

Se, esforçando-se ao máximo, ele não conseguir seu intento, poderá fazê-lo acoplando um cano de ferro à chave, de modo a aumentar a distância do local onde aplica a força até o eixo de rotação do parafuso.

Situação 3:

A gangorra também é um sistema que permite investigar a eficiência de uma força em produzir rotação:

Verifica-se que, se o peso do garoto **A** é o dobro do peso do garoto **B**, é necessário que a distância de **B** até o eixo **E** seja o dobro da distância de **A** até esse mesmo eixo para que ambos fiquem em equilíbrio. (como mostra a figura).

Definição

De acordo com as situações que acabamos de descrever, podemos concluir que a eficiência de uma força em produzir rotação em um corpo é tanto maior quanto maiores forem sua intensidade e a distância entre a reta que passa pela força – denominada **linha de ação** – e o eixo de rotação do corpo. A grandeza física que mede essa eficiência é denominada **momento** ou **torque**.

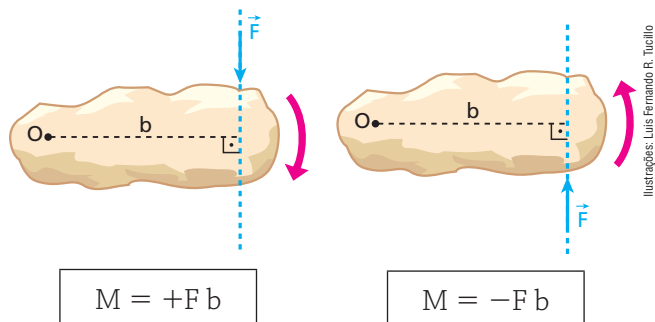
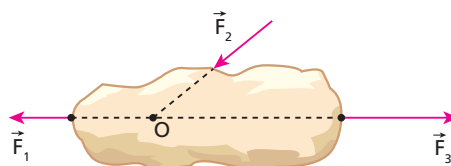
TF1-396_435_P3T1.indd 406 16/08/12 17:22

Para definir escalarmente essa grandeza, considere um corpo sob a ação da força $\vec{F}$ e um eixo de rotação (real ou imaginário) perpendicular ao plano da figura e passando pelo ponto **O** (polo do momento). A força $\vec{F}$ e o ponto **O** estão no plano do papel.

A distância **b**, de **O** até a linha de ação de $\vec{F}$, denomina-se **braço de $\vec{F}$** em relação a **O**.

Assim, definimos:

> Momento escalar (M) da força F em relação a O é o produto da intensidade dessa força pelo seu braço em relação a O, precedido de um sinal algébrico arbitrário:
>
> $$M = \pm F\,b$$

A finalidade do sinal algébrico (+ ou −) é distinguir os momentos que correspondem a uma tendência de rotação no sentido horário daqueles que correspondem a uma tendência de rotação no sentido anti-horário. Em cada problema, deve-se convencionar o sinal que será atribuído ao momento. Pode-se considerar positivo, por exemplo, o momento de uma força capaz de produzir rotação no sentido horário e negativo o momento de uma força capaz de produzir rotação no sentido anti-horário:

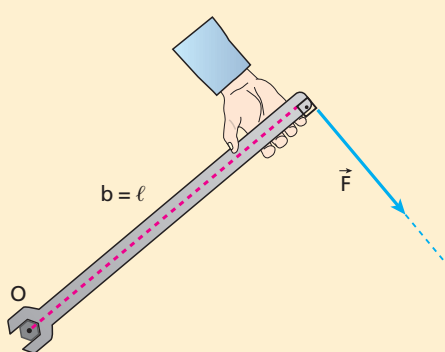
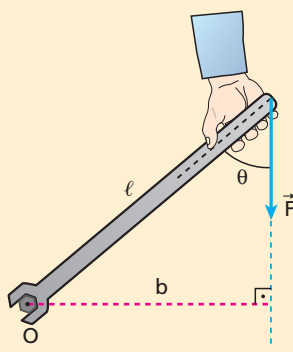
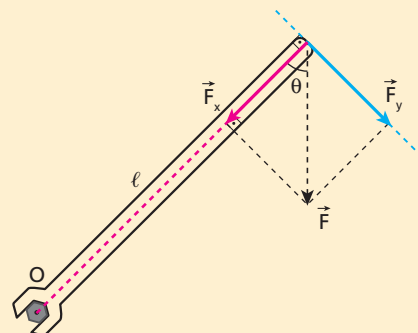
$$M = +F\,b \qquad\qquad M = -F\,b$$

Observe que o momento será nulo em relação a **O** quando esse ponto pertencer à linha de ação da força, situação em que o braço é nulo:

Os momentos das forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ são nulos em relação ao polo **O**.

As unidades de medida de **momento** são obtidas pelo produto de uma unidade de força por uma unidade de comprimento:

$$\text{unid}\,(\mathbf{M}) = \text{unid}\,(\mathbf{F}) \cdot \text{unid}\,(\mathbf{b})$$

Assim, a unidade de medida de momento, no SI, é o **newton · metro** (**N m**), que **não** deve ser chamada de joule, reservando-se essa denominação para a unidade de trabalho e energia, que são grandezas físicas diferentes do momento de uma força.

Cuidado com o braço...

Para apertar um parafuso, uma pessoa pode aplicar na extremidade de uma chave, de comprimento ℓ, uma força de intensidade **F** em diversas direções.

O momento (torque) **mais intenso** é conseguido quando a força é perpendicular à chave (veja na figura 1).

Nesse caso, o braço da força em relação ao eixo **O** de rotação do parafuso é igual ao comprimento da chave, e o módulo do torque (F b) é igual a F ℓ. Com isso, podemos dizer que a força $\vec{F}$ está sendo integralmente aproveitada para produzir momento em relação a **O**.

Entretanto, se a força não for perpendicular à barra, a intensidade do momento será menor, como se pode observar na figura 2:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\ell} \Rightarrow \boxed{b = \ell \cdot \text{sen}\,\theta}$$

O módulo do momento (F b) é igual a F $\ell \cdot$ sen θ, que é menor que F ℓ. Podemos dizer, então, que a força $\vec{F}$ não está sendo integralmente aproveitada para produzir o torque desejado. De fato, se ela for substituída pelas componentes representadas na figura 3, só a componente $\vec{F}_y$ produzirá momento em relação a **O**. Observe que o ponto **O** pertence à linha de ação da componente $\vec{F}_x$. Por isso, o braço de $\vec{F}_x$ em relação a **O** é igual a zero, ocorrendo o mesmo com o seu momento.

Note também que o braço de $\vec{F}_y$ em relação a **O** é igual a $\boldsymbol{\ell}$. Assim, o módulo do momento de $\vec{F}_y$ é dado por:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{F_y}{F} \Rightarrow \boxed{F_y = F \cdot \text{sen}\,\theta}$$

$|M_{\vec{F}_y}| = F_y\, b = F_y\, \ell = (F \cdot \text{sen}\,\theta)\, \ell = F\, \ell \cdot \text{sen}\,\theta$, que, por sua vez, é igual ao módulo do momento de $\vec{F}$.

Assim, nesse caso:

$$\boxed{|M_{\vec{F}}| = |M_{\vec{F}_y}|}$$

5. Condições de equilíbrio do corpo extenso

Para um corpo extenso estar em equilíbrio, é necessário satisfazer duas condições: uma referente ao equilíbrio de translação e outra ao equilíbrio de rotação.

Condição de equilíbrio de translação

Já determinamos essa condição no início deste Tópico, mas vamos recordá-la:

A condição de equilíbrio de translação de um corpo extenso (centro de massa em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme) é que a resultante das forças externas atuantes no corpo seja nula:

$$\vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Condição de equilíbrio de rotação

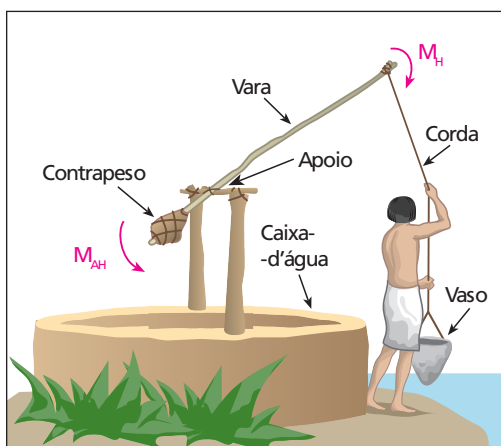
A condição de equilíbrio de rotação de um corpo extenso sob a ação de um sistema de forças coplanares é que a soma algébrica dos momentos escalares de todas as forças em relação a **qualquer** eixo perpendicular ao plano das forças seja nula:

$$\boxed{\Sigma M = 0}$$

A condição de equilíbrio de rotação pode ser expressa de outra maneira. Considerando todos os momentos **em módulo**, podemos escrever que a soma de todos os momentos horários (ΣM_H) é igual à soma de todos os momentos anti-horários (ΣM_{AH}):

$$\Sigma M_H = \Sigma M_{AH}$$

Casos de equilíbrio apenas de rotação

Quando um corpo está em equilíbrio, a resultante das forças que atuam nele é **nula** e a soma dos momentos de todas as forças **também o é** em relação a um polo **qualquer**. Entretanto, se um corpo não apresenta rotação, mas a resultante das forças que atuam nele **não é nula**, a soma dos momentos de todas as forças **não** mais será nula em relação a um polo qualquer, mas o será em relação ao **centro de massa**. Essa restrição é demonstrada em Dinâmica da Rotação, assunto não estudado neste livro.

Sistema egípcio usado para retirar água do Rio Nilo. Quando o camponês puxa a corda, a força exercida na vara produz um momento horário M_H em relação ao apoio: o vaso é baixado e se enche de água.

Em seguida, o vaso é erguido com o auxílio do contrapeso, que produz um momento anti-horário em relação ao apoio.
Se o sistema estiver em equilíbrio, a soma algébrica de M_H com M_{AH}, ignorando o peso da vara, será nula.

Ilustrações: Luis Fernando R. Tucillo

O braço forte das grandes construções: a grua

Bay Ismoyo/AFP/Getty Images

Atualmente, a grua é muito usada na construção civil para erguer cargas até os diversos andares de um prédio em construção. Nesse equipamento, um contrapeso fixo (bloco de concreto) tem a função de produzir um momento que contrabalance o momento correspondente à carga que está sendo erguida, garantindo a estabilidade do sistema.

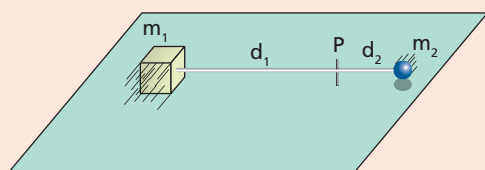
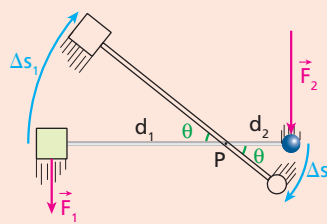
Leitura

Surgiu o momento...

Vamos, agora, fazer uma demonstração da condição de equilíbrio de rotação em um caso particular.

Apesar de nos levar à mesma conclusão, essa demonstração é muito diferente da que Arquimedes expôs em um de seus livros quando descobriu a "lei" da alavanca por meio de raciocínio puramente geométrico.

Um pequeno cubo de massa m_1 está apoiado em um piso plano e horizontal, preso em uma das extremidades de uma haste leve, disposta horizontalmente. Na outra extremidade da haste, está presa uma esfera de massa m_2, que não toca o piso. Esse sistema está representado nas figuras a seguir:

Ilustrações: Luciano da S. Teixeira

Representação do sistema visto em perspectiva.

Representação do sistema visto de cima.

A haste pode girar praticamente sem atrito em torno de um pino **P**, fixo no piso e que a atravessa num ponto que dista d_1 do cubo e d_2 da esfera.

Suponhamos o sistema girando em torno de **P**, com velocidade angular constante (equilíbrio de rotação).

A força $\vec{F}_2$ atua na esfera e é mantida perpendicular à haste. A força $\vec{F}_1$, de atrito, atua no cubo e também se mantém perpendicular à haste.

Como não há variação da energia cinética do sistema, temos, pelo Teorema da Energia Cinética:

$$\tau_{F_1} + \tau_{F_2} = \Delta E_c = 0$$

$$-F_1 \Delta s_1 + F_2 \Delta s_2 = 0 \Rightarrow F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2 \quad \text{(I)}$$

Em radianos, podemos escrever:

$$\theta = \frac{\Delta s_1}{d_1} \text{ e } \theta = \frac{\Delta s_2}{d_2} \Rightarrow \Delta s_1 = d_1 \theta \text{ e } \Delta s_2 = d_2 \theta$$

De (I), vem:

$$F_1 d_1 \theta = F_2 d_2 \theta \Rightarrow \boxed{F_1 d_1 = F_2 d_2}$$

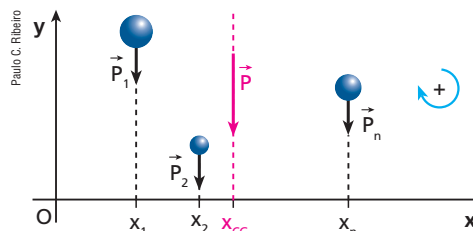
Observe que $F_1 d_1$ e $F_2 d_2$ são, pela definição já apresentada, os módulos dos momentos de $\vec{F}_1$ (anti-horário) e de $\vec{F}_2$ (horário) em relação a **P**. Veja que, no equilíbrio de rotação (rotação com velocidade angular constante ou ausência de rotação), esses momentos têm módulos iguais.

6. Centro de gravidade

Denomina-se **centro de gravidade (CG)**, de um corpo ou de um sistema de pontos materiais discretos, um determinado ponto onde podemos considerar aplicado o peso total do corpo ou do sistema.

Centro de gravidade de um sistema de pontos materiais discretos

Considere uma distribuição plana de **n** pontos materiais de pesos $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ... , $\vec{P}_n$ e seja $\vec{P}$ o peso total (resultante) dessa distribuição. Associemos ao plano dos pontos um sistema de eixos ortogonais Oxy:

Paulo C. Ribeiro

Como a resultante de um sistema de forças equivale ao sistema, temos que o momento do peso total é igual à soma algébrica dos momentos dos pesos de todas as partículas. Então, em relação a **O**, escrevemos:

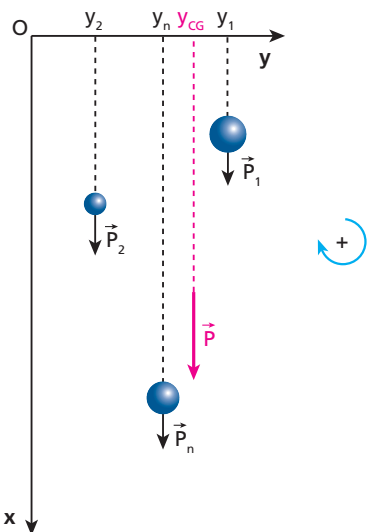
$$M_{\vec{P}} = M_{\vec{P}_1} + M_{\vec{P}_2} + ... + M_{\vec{P}_n}$$

$$P\, x_{CG} = P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n,$$

em que $P = P_1 + P_2 + ... + P_n$.

Assim, a abscissa do centro de gravidade do sistema é dada por:

$$x_{CG} = \frac{P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + \ldots + P_n\, x_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}$$

Suponha, agora, que o sistema de partículas da figura anterior gire 90°, como mostra a figura a seguir:

Em relação a **O**, temos novamente que:

$$M_{\vec{P}} = M_{\vec{P}_1} + M_{\vec{P}_2} + \ldots + M_{\vec{P}_n}$$

$$P\, y_{CG} = P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + \ldots + P_n\, y_n$$

Dessa forma, a ordenada do centro de gravidade do sistema é dada por:

$$y_{CG} = \frac{P_1\, y_1 + P_2\, y_2 + \ldots + P_n\, y_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}$$

De modo análogo, definiríamos uma terceira coordenada z_{CG} do centro de gravidade, caso os pontos materiais estivessem distribuídos no espaço (distribuição tridimensional).

Em todas as situações de nosso interesse, as distâncias entre os pontos materiais são pequenas o suficiente para que o campo gravitacional ao qual estão submetidos possa ser considerado uniforme. Então, temos:

$$x_{CG} = \frac{m_1\, g\, x_1 + m_2\, g\, x_2 + \ldots + m_n\, g\, x_n}{m_1\, g + m_2\, g + \ldots + m_n\, g}$$

$$x_{CG} = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + \ldots + m_n\, x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

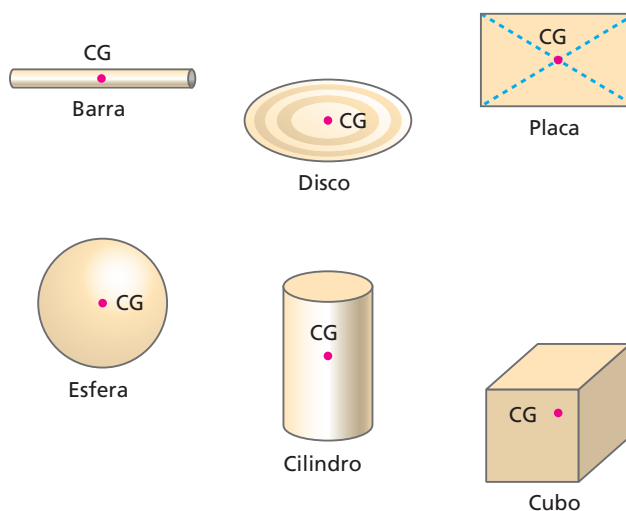
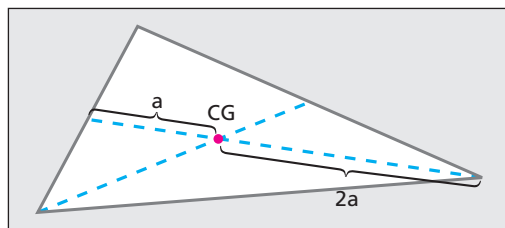
$$y_{CG} = \frac{m_1\, g\, y_1 + m_2\, g\, y_2 + \ldots + m_n\, g\, y_n}{m_1\, g + m_2\, g + \ldots + m_n\, g}$$

$$y_{CG} = \frac{m_1\, y_1 + m_2\, y_2 + \ldots + m_n\, y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

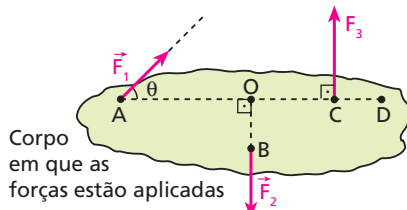
Disso, concluímos que:

Em campo gravitacional uniforme, o centro de gravidade coincide com o centro de massa.

Centro de gravidade de alguns corpos homogêneos (em campo gravitacional uniforme)

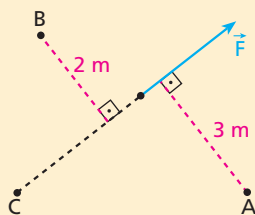
O centro de gravidade de uma barra cilíndrica ou prismática, de um disco ou de uma placa retangular de espessura uniforme, de uma esfera, de um cilindro ou de um cubo encontra-se no centro geométrico desses corpos, desde que sejam homogêneos.

O centro de gravidade de uma placa triangular homogênea de espessura uniforme está no ponto de encontro de suas medianas (baricentro). O baricentro divide as medianas na razão 2 : 1.

Exercícios

nível 1

22. Considere as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ e os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **O**, todos no plano desta página.

Julgue corretas ou incorretas as afirmações a seguir. Em cada uma delas, imagine a existência de um eixo de rotação perpendicular ao plano da figura passando pelo ponto citado.

01. Os braços de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, em relação a **O**, medem $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, respectivamente.
02. Os braços de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$, em relação a **O**, medem $\overline{OA} \cdot \text{sen}\, \theta$, zero e $\overline{OC}$, respectivamente.
04. Os braços de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ em relação a **A**, medem zero, $\overline{AO}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.
08. Em relação a **O**, o momento de $\vec{F}_1$ é horário, o de $\vec{F}_2$ é nulo e o de $\vec{F}_3$ é anti-horário.
16. Em relação a **C**, o momento de $\vec{F}_1$ é horário, o de $\vec{F}_2$ é anti-horário e o de $\vec{F}_3$ é nulo.
32. Em relação a **D**, os momentos de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_2$ são horários e o de $\vec{F}_3$ é anti-horário.

Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

23. E.R. A força $\vec{F}$ de módulo 20 N, e os pontos **A**, **B** e **C** estão todos no plano do papel. Os pontos representam as interseções entre o plano do papel e três eixos perpendiculares a ele.

Convencionando positivos os momentos horários, calcule o momento escalar de $\vec{F}$ em relação a **A**, **B** e **C**.

Resolução:

Em relação a **A**, a força $\vec{F}$ dá tendência de rotação no sentido horário. Sendo F = 20 N e b = 3 m, temos:

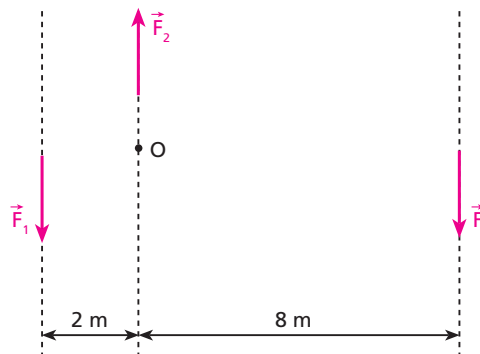
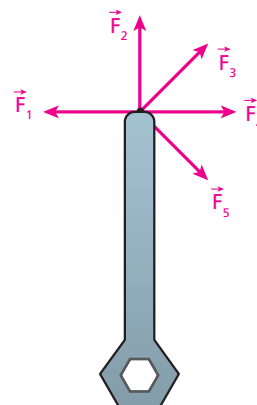
$$M = +F\, b = 20 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{M = 60 \text{ N m}}$$

Em relação a **B**, a força $\vec{F}$ dá tendência de rotação no sentido anti-horário. Sendo F = 20 N e b = 2 m, temos:

$$M = -F\, b = -20 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{M = -40 \text{ N m}}$$

Em relação a **C**, a força $\vec{F}$ não dá tendência de rotação, pois b = 0:

$$M = F\, b = 20 \cdot 0 \Rightarrow \boxed{M = 0}$$

24. Considerando positivos os momentos horários, calcule os momentos das forças paralelas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ em relação ao ponto **O**.
Dados: $F_1 = 200$ N; $F_2 = 250$ N; $F_3 = 50$ N.

25. Qual das forças aplicadas na extremidade da chave, todas de mesma intensidade, é mais eficiente para girar o parafuso no sentido horário?

26. (UFRJ) Um jovem e sua namorada passeiam de carro por uma estrada e são surpreendidos por um furo num dos pneus.
O jovem, que pesa 75 kgf, pisa a extremidade de uma chave de roda, inclinada em relação à horizontal, como mostra a figura 1, mas só consegue soltar o parafuso quando exerce sobre a chave uma força igual a seu peso.

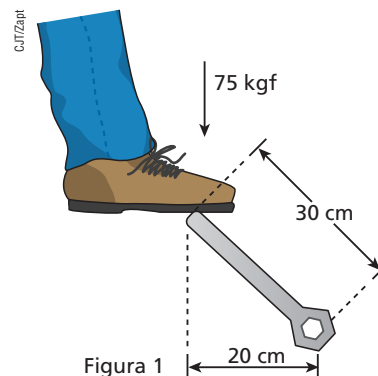



Figura 1

A namorada do jovem, que pesa 51 kgf, encaixa a mesma chave, mas na horizontal, em outro parafuso, e pisa a extremidade da chave, exercendo sobre ela uma força igual a seu peso, como mostra a figura 2.

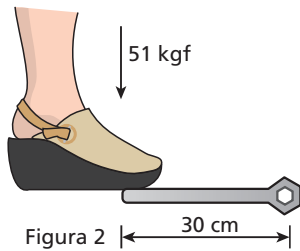
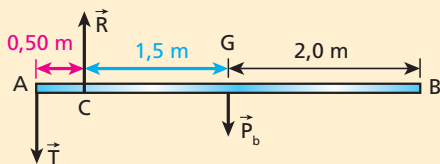



Figura 2

Supondo que este segundo parafuso esteja tão apertado quanto o primeiro, e levando em conta as distâncias indicadas nas figuras, verifique se a moça consegue soltar esse segundo parafuso. Justifique sua resposta.

27. E.R. Uma barra prismática homogênea AB de comprimento igual a 4,0 m e peso igual a 100 N apoia-se sobre a cunha **C**, colocada a 0,50 m de **A**. A barra fica em equilíbrio, como representa a figura, quando um corpo **X** é suspenso em sua extremidade **A**:

Calcule:
a) o peso do corpo **X**;
b) a reação da cunha **C** sobre a barra.

Resolução:
Representemos as forças que atuam na barra:

- $\vec{P}_b$ é o peso da barra, aplicado em seu centro de gravidade **G** (ponto médio da barra homogênea);
- $\vec{T}$ é a tração exercida em **A** pelo fio; essa força tem a mesma intensidade do peso de **X** ($T = P_X$);
- $\vec{R}$ é a reação da cunha sobre a barra.

Para o equilíbrio de translação da barra, temos:

$$R = T + P_b$$

ou

$$R = P_X + P_b \Rightarrow \boxed{R = P_X + 100} \quad \text{(I)}$$

Para o equilíbrio de rotação da barra, a soma algébrica dos momentos escalares de todas as forças nela aplicadas deve ser nula em relação a **qualquer** polo. Em relação a **C**, por exemplo, devemos ter:

$$M_{\vec{T}} + M_{\vec{R}} + M_{\vec{P}_b} = 0$$

Convencionando positivos os momentos no sentido horário, temos:

$$-T \cdot \overline{AC} + R \cdot 0 + P_b \cdot \overline{CG} = 0$$

$$-P_X \cdot 0{,}50 + 100 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$\boxed{P_X = 300\ \text{N}} \quad \text{(a)}$$

De (I), vem:

$$R = P_X + 100 = 300 + 100$$

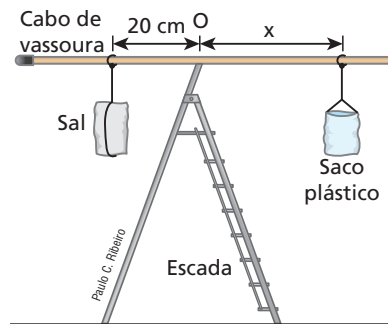
$$\boxed{R = 400\ \text{N}} \quad \text{(b)}$$

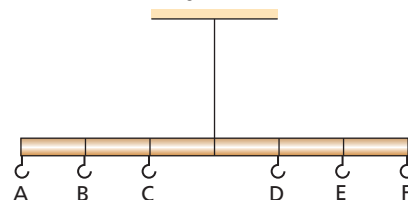
Nota:
- O equilíbrio de rotação pode ser considerado em relação a **qualquer** polo, independentemente de passar ou não por ele um eixo de rotação real. Em relação a **A**, por exemplo, teríamos:

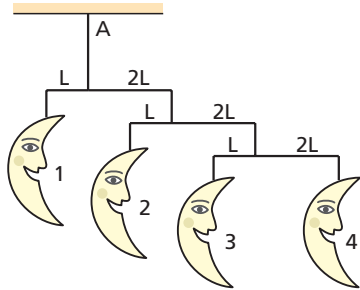
$$M_{\vec{T}} + M_{\vec{R}} + M_{\vec{P}_b} = 0$$

$$T \cdot 0 - R \cdot 0{,}50 + 100 \cdot 2{,}0 = 0$$

$$\boxed{R = 400\ \text{N}}$$

28. Uma pessoa precisava separar 400 g de açúcar para fazer um doce, mas não tinha uma balança. Pegou, então, um cabo de vassoura e o apoiou em uma escada, de modo a ficar em equilíbrio na horizontal (o ponto **O** é o centro de gravidade do cabo).

Usando um barbante, suspendeu no cabo um saco fechado de sal de cozinha, de 1 kg (1 000 g), a 20 cm do ponto de apoio (**O**). Usando outro barbante, suspendeu um saco plástico vazio e foi despejando açúcar nele até o cabo ficar novamente em equilíbrio na horizontal. Calcule a distância **x** que determina a posição em que o saco plástico deve ser colocado para que se consiga a quantidade de açúcar desejada.

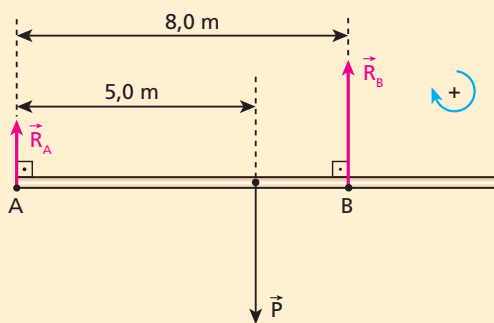
29. Uma barra cilíndrica e homogênea, dividida em seis partes iguais, cada uma delas de comprimento **d**, encontra-se em equilíbrio na horizontal, como na figura.

a) Suspendendo-se um corpo de peso igual a 6 N no gancho **B**, qual deve ser o peso de um outro corpo suspenso do gancho **F** para que a barra se mantenha em equilíbrio como na figura?
b) Se um corpo de peso igual a 6 N for suspenso em **B**, e outros dois corpos, cada um pesando 3 N, forem suspensos em **D** e **E**, a barra continuará em equilíbrio como na figura?

30. (ITA-SP) Um brinquedo que as mamães utilizam para enfeitar quartos de crianças é conhecido como móbile. Considere o móbile de luas esquematizado na figura. As luas estão presas, por meio de fios de massas desprezíveis, a três barras horizontais, também de massas desprezíveis. O conjunto todo está em equilíbrio e suspenso de um único ponto **A**. Se a massa da lua 4 é de 10 g, então a massa da lua 1, em kg, é igual a:

a) 180 b) 80 c) 0,36 d) 0,18 e) 9

31. E.R. Uma barra cilíndrica homogênea, de peso 200 N e 10,0 m de comprimento, encontra-se em equilíbrio, apoiada nos suportes **A** e **B**, como representa a figura.

a) Calcule as intensidades R_A e R_B das reações dos apoios **A** e **B** sobre a barra.
b) Usando-se uma corda leve, um bloco metálico de peso 400 N é dependurado na barra em um ponto **C** à direita de **B**. Determine a máxima distância **x** de **B** a **C** de modo que a barra não tombe.

Resolução:

a) Representando as forças que atuam na barra, temos:

Em relação a **A**:

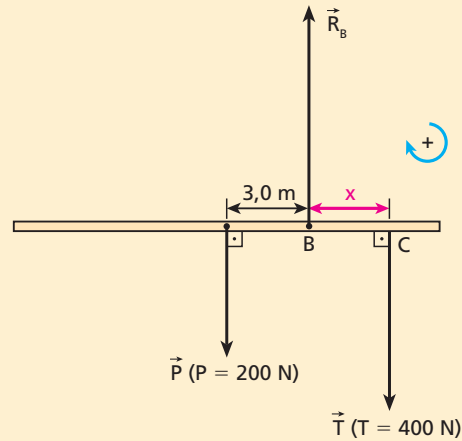
$$M_{\vec{R}_A} + M_{\vec{P}} + M_{\vec{R}_B} = 0$$

$$R_A \cdot 0 + 200 \cdot 5{,}0 - R_B \cdot 8{,}0 = 0$$

$$\boxed{R_B = 125 \text{ N}}$$

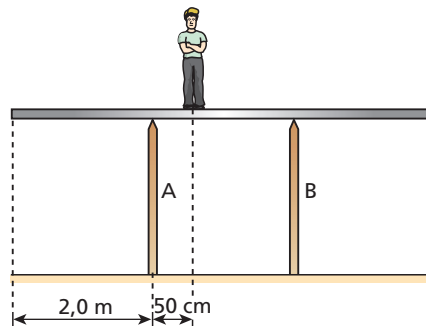
Como $R_A + R_B = P$:

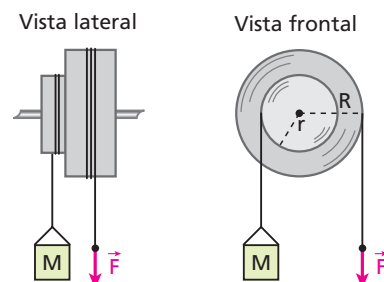
$$R_A + 125 = 200 \Rightarrow \boxed{R_A = 75 \text{ N}}$$

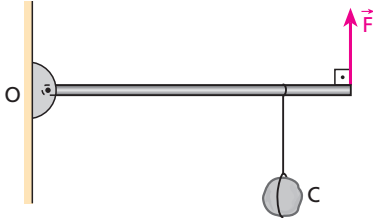
b) A máxima distância pedida corresponde à situação em que a barra está na iminência de tombar. Nessa situação, ela se apoia exclusivamente no suporte **B** e, portanto, a reação do suporte **A**, $\vec{R}_A$, é nula.
Representando as forças na barra, temos:

Em relação a **B**:

$$M_{\vec{R}_B} + M_{\vec{P}} + M_{\vec{T}} = 0$$

$$R_B \cdot 0 - 200 \cdot 3{,}0 + 400 \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1{,}5 \text{ m}}$$

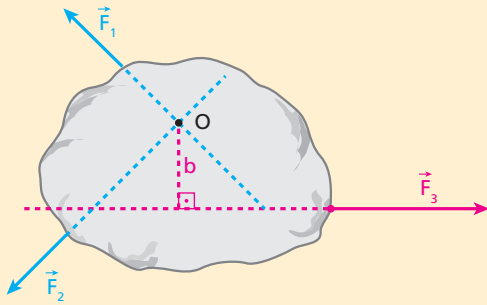
32. Sobre duas estacas **A** e **B**, distantes 2,0 m uma da outra, apóia-se uma viga prismática e homogênea de comprimento 6,0 m e massa 72 kg. Um pedreiro de massa 60 kg encontra-se em repouso na posição indicada, a 50 cm da estaca **A**.

a) Calcule as intensidades das forças que a viga recebe das estacas ($g = 10 \text{ m/s}^2$).
b) O pedreiro começa a caminhar lentamente para a direita. Qual o máximo afastamento dele em relação ao ponto de apoio da viga na estaca **B** sem que ela tombe?

33. A figura a seguir representa duas roldanas de raios r = 10 cm e R = 40 cm presas em um mesmo eixo que pode rotar praticamente sem atrito.

Cordas leves estão enroladas nessas roldanas. Em uma delas, está suspenso um bloco de massa **M** igual a 50 kg e o sistema é mantido em equilíbrio pela força vertical $\vec{F}$ aplicada na outra corda. Considerando g = 10 m/s², calcule a intensidade de $\vec{F}$.

34. Uma barra rígida e homogênea, de peso 20 N e 2,0 m de comprimento, articula-se no eixo lubrificado **O**. Nela, está suspensa uma carga **C**, de peso 100 N, a 1,5 m do eixo **O**. A força vertical $\vec{F}$ mantém o sistema em equilíbrio.

Calcule a intensidade:
a) da força $\vec{F}$;
b) da força que a barra recebe do eixo.

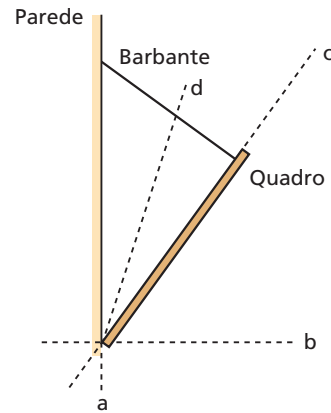
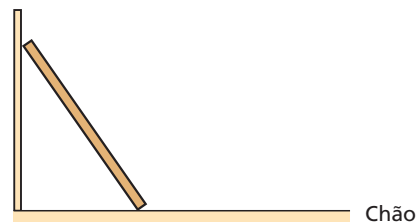
35. E.R. Considere um corpo em equilíbrio submetido à ação de **apenas três forças**, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ que precisam ser coplanares. Dado que elas têm **direções diferentes**, mostre que suas linhas de ação são concorrentes, necessariamente, num **mesmo** ponto.

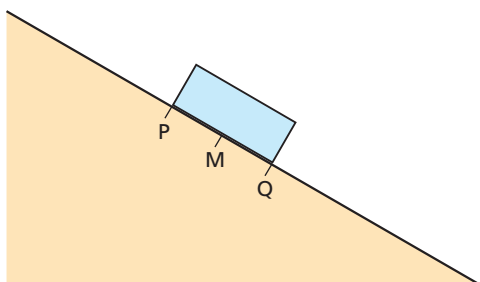
Resolução:

Suponhamos que as linhas de ação de duas dessas forças ($\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ por exemplo) sejam concorrentes num ponto **O** e que isso não aconteça com a força $\vec{F}_3$:

No equilíbrio, a soma algébrica dos momentos de todas as forças tem de ser nula e isso tem de acontecer em relação a **qualquer** polo, inclusive a **O**.

Em relação a **O**, os momentos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são nulos, mas o momento de $\vec{F}_3$, não.

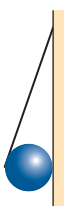
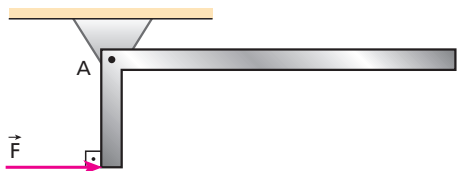
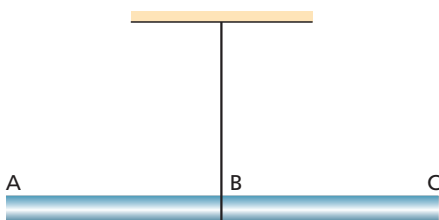
Assim, concluímos que a linha de ação de $\vec{F}_3$ também passa por **O**, pois, se isso não acontecesse, a soma dos três momentos em relação a **O** não seria nula e a condição de equilíbrio de rotação não estaria respeitada.

36. A figura abaixo representa um quadro retangular e homogêneo dependurado em uma parede e em equilíbrio. Qual das retas, **a**, **b**, **c** ou **d**, melhor representa a linha de ação da força que a parede exerce no quadro?

37. A figura a seguir representa uma escada homogênea, em equilíbrio, apoiada em uma parede vertical muito lisa. Reproduza a figura e trace nela o vetor que determina a direção e o sentido da força que a escada recebe do chão.

Exercícios nível 2

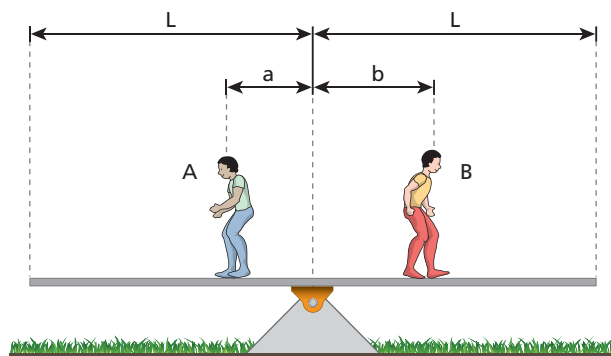
38. A figura representa um paralelepípedo homogêneo em repouso num plano inclinado. **M** é o ponto médio do segmento PQ.

A força normal resultante que o paralelepípedo recebe do plano está aplicada:

a) no ponto **M.**
b) no ponto **Q.**
c) entre **P** e **M.**
d) entre **M** e **Q.**
e) talvez no ponto **P.**

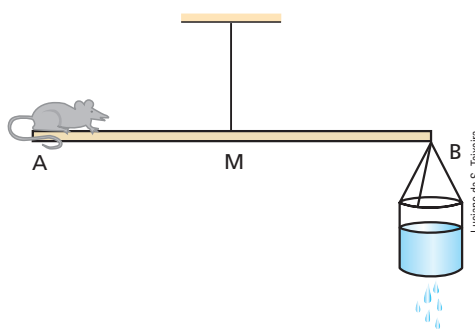
39. A figura ao lado, representa uma esfera homogênea em equilíbrio, sustentada por um fio e apoiada em uma parede vertical nas condições geométricas ilustradas. Reproduzindo a figura:

a) indique as forças atuantes na esfera;
b) desenhe a situação de equilíbrio supondo a parede perfeitamente lisa.

40. Na figura, temos uma barra homogênea de espessura e largura pequenas e uniformes, em forma de **L**, articulada sem atrito em **A**. A parte vertical da barra tem 1,0 m de comprimento, enquanto a parte horizontal mede 3,0 m. Sendo de 120 N o peso total da barra, calcule a intensidade da força horizontal $\vec{F}$ que mantém a barra em equilíbrio.

41. A barra AC da figura está em equilíbrio na horizontal, suspensa pelo seu ponto médio **B**.

É necessariamente verdade que:

a) a barra é homogênea;
b) as partes AB e BC têm o mesmo peso;
c) os momentos dos pesos das partes AB e BC, em relação a **B**, têm o mesmo valor absoluto;
d) a massa da parte AB é maior que a da parte BC;
e) há mais de uma alternativa correta.

42. Uma gangorra encontra-se em equilíbrio como na figura a seguir, sustentando duas crianças **A** e **B**, de massas iguais a m_A e m_B, em repouso sobre ela.

Em um certo instante, a criança **B** passa a caminhar lentamente para a direita, com velocidade constante de intensidade v_B.
Para manter a gangorra em equilíbrio, nesse mesmo instante a criança **A** passa a caminhar lentamente para a esquerda, com velocidade constante de intensidade v_A, e consegue seu objetivo.

a) Considerando que os comprimentos **a**, **b** e **L** indicados na figura estejam em escala, qual das crianças chega primeiro ao final da gangorra em equilíbrio?
b) Determine v_A em função de m_A, m_B e v_B.

43. (Cesgranrio-RJ)

Na figura acima, uma haste **AB**, homogênea e de secção reta uniforme, medindo 2,4 m, é suspensa pelo seu ponto médio **M**, por meio de um arame.
Na extremidade **B**, há um recipiente de massa desprezível contendo água, enquanto, na extremidade **A,** há um camundongo de massa 250 g. Nessa situação, a haste se mantém em repouso na posição horizontal.
Em determinado instante, o recipiente começa a vazar água na razão de 75 g/s e, em consequência disso, o camundongo passa a se mover no sentido de **A** para **M**, de modo a manter a haste na sua posição inicial. Para isso, qual deve ser o módulo **v** da velocidade do camundongo, em m/s?

44. Uma viga prismática e homogênea, de 5,0 m de comprimento e 120 kg de massa, encontra-se em equilíbrio presa em uma corda e apoiada no chão, como mostra a figura 1. Na figura 2, uma pessoa de 50 kg se dependura na viga, mantendo-a em equilíbrio na horizontal.

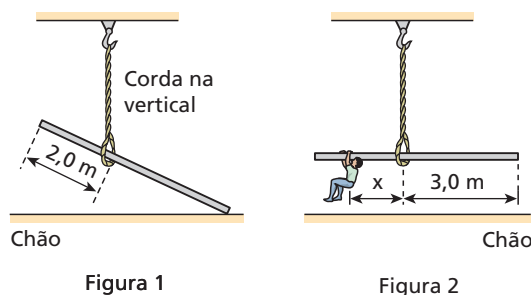
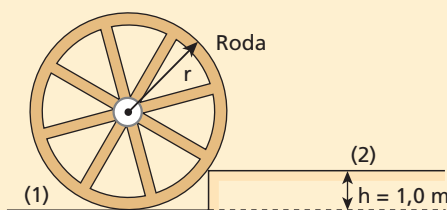



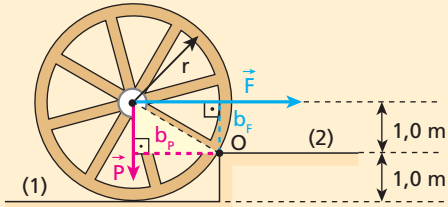
Figura 1 Figura 2

Calcule:

a) o comprimento **x** indicado na figura 2;
b) a intensidade da força que a viga recebe do chão na figura 1, considerando $g = 10\ m/s^2$.

45. E.R. Na figura, temos uma roda, de peso igual a $100\sqrt{3}$ kgf e raio **r** igual a 2,0 m, que deve ser erguida do plano horizontal (1) para o plano horizontal (2). Calcule a intensidade da força horizontal, aplicada no centro de gravidade da roda, capaz de erguê-la, sabendo que o centro de gravidade da roda coincide com seu centro geométrico.

Resolução:

Na figura a seguir, estão representados o peso $\vec{P}$ da roda e a força horizontal $\vec{F}$ que vai erguê-la. A força que ela recebe em **O** não está representada porque vamos usar esse ponto para o cálculo dos momentos. Desse modo, o momento dessa força será nulo.

Observemos que a roda, assim que começar a subir, deixará de receber força normal do plano (1).

No triângulo destacado, temos:

$b_F = 1,0$ m; r = 2,0 m; b_P

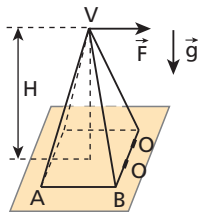
$$r^2 = b_F^2 + b_P^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

$$2,0^2 = 1,0^2 + b_P^2 \Rightarrow b_P = \sqrt{3,0} \text{ m}$$

Para a roda ser erguida, em relação ao ponto **O**, o módulo do momento horário de $\vec{F}$ tem de ser maior que o módulo do momento anti-horário de $\vec{P}$:

$$F\,b_F > P\,b_P$$

$$F \cdot 1,0 > 100\sqrt{3} \cdot \sqrt{3,0} \Rightarrow \boxed{F > 300 \text{ kgf}}$$

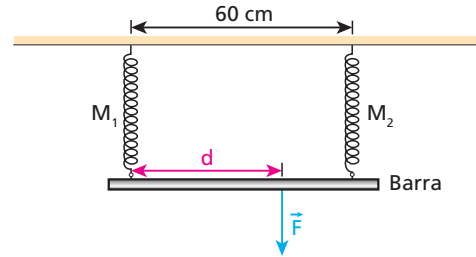
46. (Fuvest-SP) Uma pirâmide reta, de altura **H** e base quadrada de lado **L**, com massa **m** uniformemente distribuída, está apoiada sobre um plano horizontal. Uma força $\vec{F}$ com direção paralela ao lado AB é aplicada no vértice **V**. Dois pequenos obstáculos **O**, fixos no plano, impedem que a pirâmide se desloque horizontalmente. A força $\vec{F}$ capaz de fazer tombar a pirâmide deve ser tal que:

a) $|\vec{F}| > \dfrac{mgH}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2}}$

b) $|\vec{F}| > m\,g$

c) $|\vec{F}| > \dfrac{mgH}{\left(\frac{L}{2}\right)}$

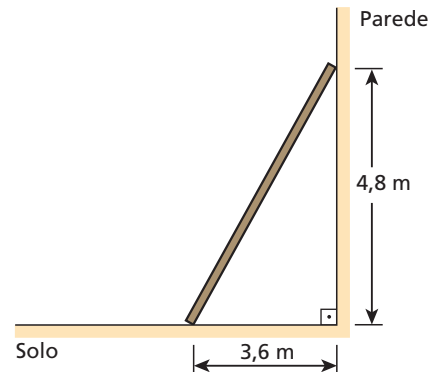
d) $|\vec{F}| > \dfrac{mg\left(\frac{L}{2}\right)}{H}$

e) $|\vec{F}| > \dfrac{mg\left(\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2}}$

47. Uma barra leve encontra-se em equilíbrio dependurada em duas molas M_1 e M_2, de constantes elásticas iguais a 200 N/m e 600 N/m respectivamente. Uma força $\vec{F}$, vertical para baixo, é aplicada na barra, atingindo-se uma nova situação de equilíbrio na qual a barra permanece na horizontal.

Calcule:

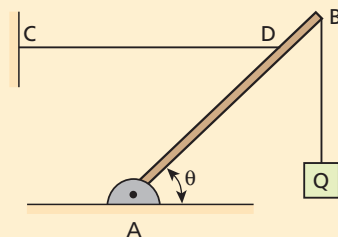
a) a distância **d** indicada na figura;

b) o deslocamento da barra da primeira para a segunda situação de equilíbrio supondo a intensidade de $\vec{F}$ igual a 120 N.

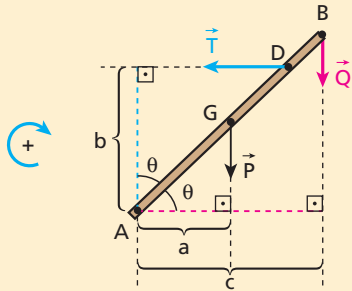
48. Uma viga prismática e homogênea, de 6,0 m de comprimento e 360 N de peso, é posicionada apoiando-se em uma parede e no solo, como representa a figura.

Supondo:

a) que exista atrito entre a viga e a parede, mas não entre a viga e o solo, responda: é possível que ela fique em equilíbrio, como na figura?

b) que não exista atrito entre a viga e a parede, calcule, no equilíbrio, as intensidades das componentes da força de contato que a viga recebe do solo (força normal $\vec{F}_n$ e força de atrito $\vec{F}_{at}$).

49. E.R. (FEI-SP) No esquema, AB representa uma viga prismática e homogênea de peso P = 30 kgf e CD representa um cabo horizontal de peso desprezível:

São dados AD = 300 cm, DB = 100 cm e θ = 45°. A viga é articulada sem atrito em **A** e suporta em **B** um corpo de peso Q = 120 kgf. Determine o esforço no cabo e as componentes horizontal e vertical da força que a viga recebe na articulação em **A**.

Resolução:

Impondo Σ M = 0 em relação a **A**, podemos ignorar a força que a viga recebe da articulação (momento nulo). Desse modo, as únicas forças de interesse nesse cálculo estão esquematizadas na figura a seguir:

Q = 120 kgf

P = 30 kgf

$$a = AG \cdot \cos\theta = 200\ \text{cm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}\ \text{cm}$$

$$b = AD \cdot \cos\theta = 300\ \text{cm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 150\sqrt{2}\ \text{cm}$$

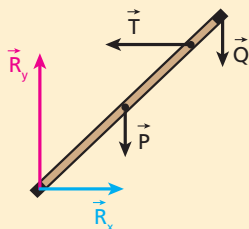
$$c = AB \cdot \cos\theta = 400\ \text{cm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 200\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Fazendo Σ M = 0 em relação a **A**, temos:

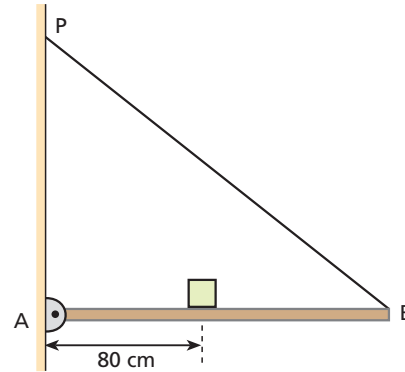
$$P\,a + Q\,c - T\,b = 0$$

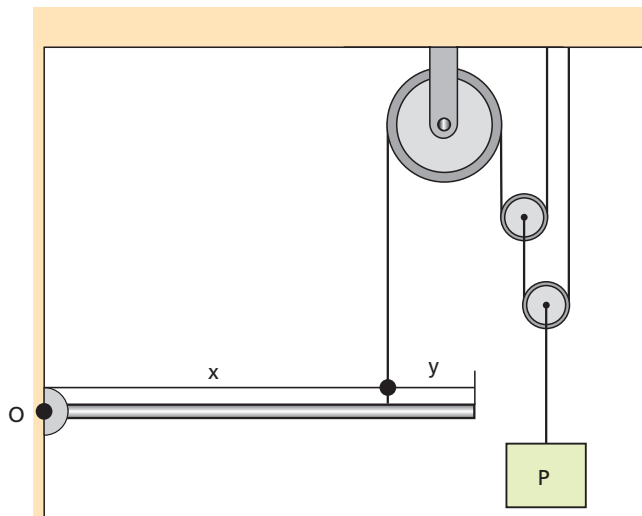
$$30 \cdot 100\sqrt{2} + 120 \cdot 200\sqrt{2} - T \cdot 150\sqrt{2} = 0$$

$$\boxed{T = 180\ \text{kgf}}$$

Na articulação, a viga recebe uma força cuja componente horizontal $\vec{R}_x$ equilibra $\vec{T}$ e cuja componente vertical $\vec{R}_Y$ equilibra $\vec{P}$ e $\vec{Q}$:

$$R_x = T \Rightarrow \boxed{R_x = 180\ \text{kgf}}$$

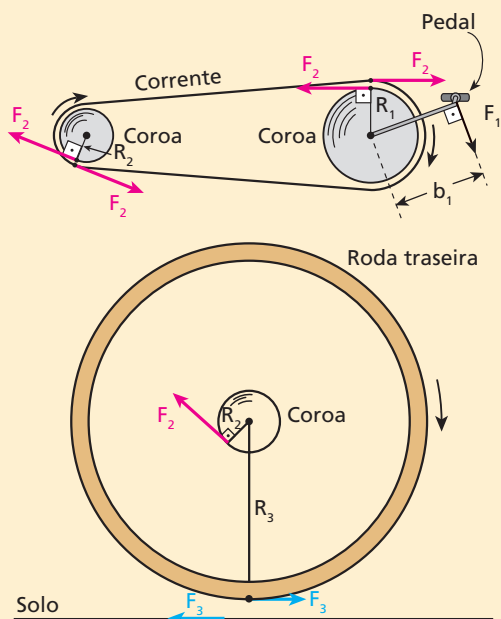
$$R_y = P + Q = 30 + 120 \Rightarrow \boxed{R_y = 150\ \text{kgf}}$$

50. Uma barra AB, prismática e homogênea, de peso 200 N e comprimento 2,0 m, encontra-se em equilíbrio na horizontal. Ela está conectada a uma parede por meio de uma corda leve BP e sustenta um cubo homogêneo de peso 300 N, como representa a figura:

Supondo que a barra se articule praticamente sem atrito em **A**, determine as componentes horizontal e vertical da força recebida por ela nessa articulação. A distância AP é igual a 2,2 m.

51. (ITA-SP) Uma barra homogênea, articulada no pino **O**, é mantida na posição horizontal por um fio fixado a uma distância **x** de **O**. Como mostra a figura, o fio passa por um conjunto de três polias que também sustentam um bloco de peso **P**. Desprezando efeitos de atrito e o peso das polias, determine a força de ação do pino **O** sobre a barra.

52. E.R. Uma bicicleta equipada com um câmbio de várias marchas possui algumas rodas dentadas (coroas) ligadas ao pedal e outras ligadas ao eixo da roda traseira (roda motriz). Essas coroas têm raios (R_i) diferentes. Para cada par de coroas acopladas pela corrente, temos uma marcha. Com relação à diversidade dos raios das coroas, qual é a melhor escolha (melhor marcha):

a) numa subida muito acentuada, situação em que o fundamental é conseguir subir, e não desenvolver altas velocidades?
b) quando se pretende desenvolver altas velocidades, numa pista horizontal?

Resolução:

Em todo o desenvolvimento desta resolução, expressaremos os torques em relação ao centro das coroas. Além disso, as coroas serão consideradas em equilíbrio de rotação, isto é, em movimento de rotação com velocidade angular constante. Assim, em módulo, os torques horário e anti-horário serão sempre iguais. Nas figuras a seguir, estão representadas as forças relevantes à análise que vamos fazer. É bom lembrar que, com as coroas em equilíbrio de rotação, a intensidade (F_2) da tração em todos os pontos da corrente é a mesma.

No sistema constituído pelo pedal e pela coroa nele ligada, temos:

$$F_1\, b_1 = F_2\, R_1 \Rightarrow F_2 = \frac{F_1\, b_1}{R_1}$$

No sistema constituído pela roda traseira e pela coroa correspondente, temos:

$$F_3\, R_3 = F_2\, R_2 \Rightarrow F_3\, R_3 = \frac{F_1\, b_1}{R_1} \cdot R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3 = F_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \underbrace{\frac{b_1}{R_3}}_{\text{constante}}$$

a) A última expressão obtida permite concluir que, para um determinado valor de F_1, quanto **maior** for R_2 e **menor** for R_1, **maior será F_3**, ou seja, mais intensa será a força motriz que a bicicleta receberá do solo. Então, essa é a melhor combinação:

Menor coroa ligada ao pedal e maior coroa da roda traseira.

Como vimos no Tópico 4 de Cinemática, as frequências de rotação das coroas combinadas são inversamente proporcionais aos seus raios:

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1\, R_1 = \omega_2\, R_2 \Rightarrow 2\pi\, f_1\, R_1 = 2\pi\, f_2\, R_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow f_2 = f_1 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Note, então, que R_1 menor e R_2 maior minimizam f_2, que é a frequência da roda traseira (roda motriz). Por isso, altas velocidades não são conseguidas nessa situação.

b) Nesse caso, devemos maximizar f_2. Para tanto, interessam o **maior** valor de R_1 e o **menor** valor de R_2. Então, a melhor combinação é:

Maior coroa ligada ao pedal e menor coroa da roda traseira.

Nota:

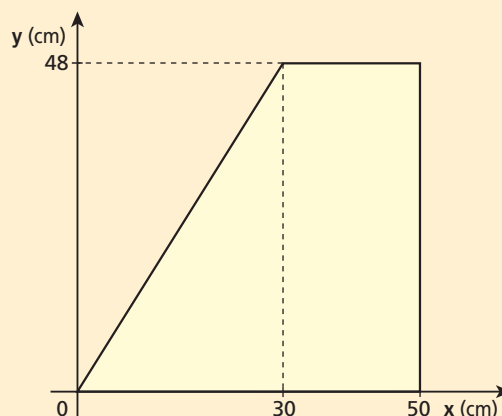
- Veja que R_1 maior e R_2 menor tornam F_3 pequena. Isso, entretanto, não é importante, porque não são necessárias forças de grande intensidade para acelerar a bicicleta numa pista horizontal.

53. (Enem) Com relação ao funcionamento de uma bicicleta de marchas, em que cada marcha é uma combinação de uma das coroas dianteiras com uma das coroas traseiras, são formuladas as seguintes afirmativas:

I. Numa bicicleta que tenha duas coroas dianteiras e cinco traseiras, temos um total de dez marchas possíveis, em que cada marcha representa a associação de uma das coroas dianteiras com uma das traseiras.
II. Em alta velocidade, convém acionar a coroa dianteira de maior raio com a coroa traseira de maior raio também.
III. Em uma subida íngreme, convém acionar a coroa dianteira de menor raio e a coroa traseira de maior raio.

Entre as afirmações acima, estão corretas:

a) I e III apenas.
b) I, II e III.
c) I e II apenas.
d) II apenas.
e) III apenas.

54. E.R. Localize o centro de gravidade da chapa homogênea e de espessura uniforme, representada na figura:

Resolução:

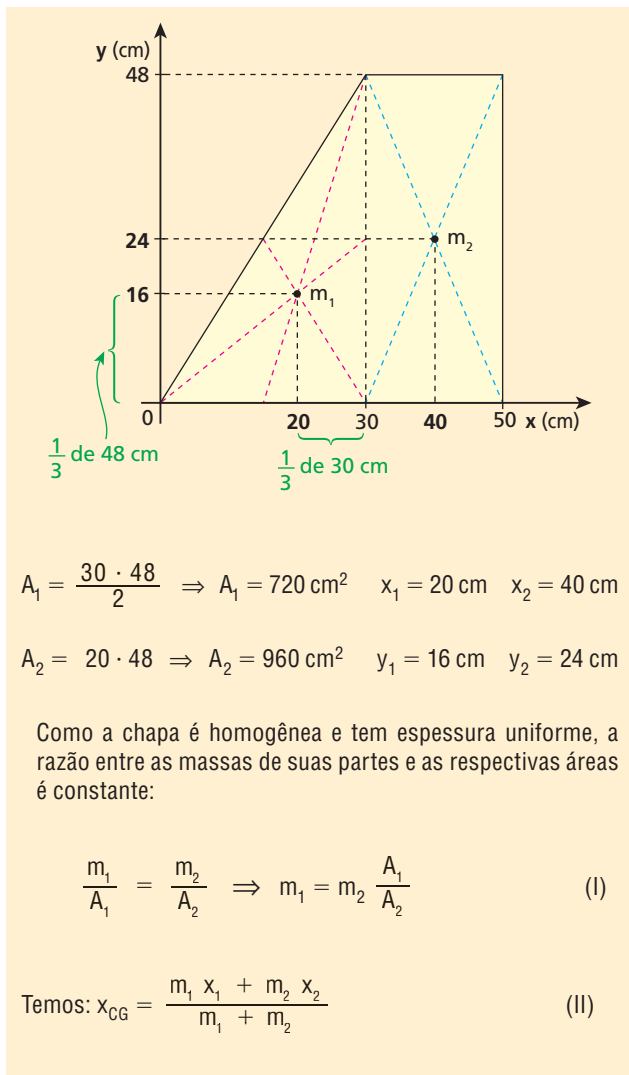
Podemos dividir a chapa em duas partes: uma triangular, de massa m_1 e área A_1, cujo centro de gravidade está no baricentro do triângulo (ponto de encontro das medianas), e outra retangular, de massa m_2 e área A_2, cujo centro de gravidade está no cruzamento das diagonais.

$$A_1 = \frac{30 \cdot 48}{2} \Rightarrow A_1 = 720\ cm^2 \qquad x_1 = 20\ cm \qquad x_2 = 40\ cm$$

$$A_2 = 20 \cdot 48 \Rightarrow A_2 = 960\ cm^2 \qquad y_1 = 16\ cm \qquad y_2 = 24\ cm$$

Como a chapa é homogênea e tem espessura uniforme, a razão entre as massas de suas partes e as respectivas áreas é constante:

$$\frac{m_1}{A_1} = \frac{m_2}{A_2} \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{A_1}{A_2} \qquad \text{(I)}$$

Temos: $$x_{CG} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$x_{CG} = \frac{m_2 \frac{A_1}{A_2} x_1 + m_2 x_2}{m_2 \frac{A_1}{A_2} + m_2} \Rightarrow x_{CG} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} \qquad \text{(III)}$$

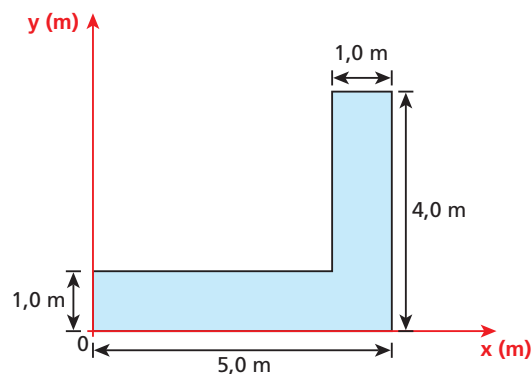
Analogamente, temos:

$$y_{CG} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo em (III) e (IV) os valores de A_1, A_2, x_1, x_2, y_1 e y_2, obtemos:

$$x_{CG} = \frac{720 \cdot 20 + 960 \cdot 40}{720 + 960} \Rightarrow \boxed{x_{CG} = 31{,}4\ cm}$$

$$y_{CG} = \frac{720 \cdot 16 + 960 \cdot 24}{720 + 960} \Rightarrow \boxed{y_{CG} = 20{,}6\ cm}$$

55. Determine, em relação ao sistema Oxy, a posição do centro de gravidade da chapa homogênea e de espessura uniforme indicada na figura abaixo.

Bloco 3

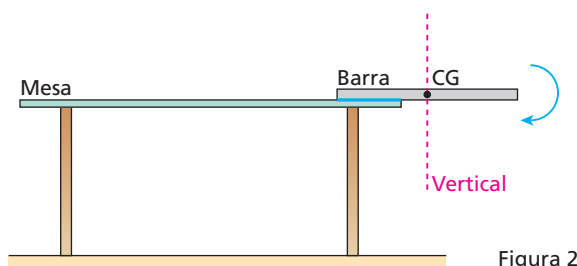
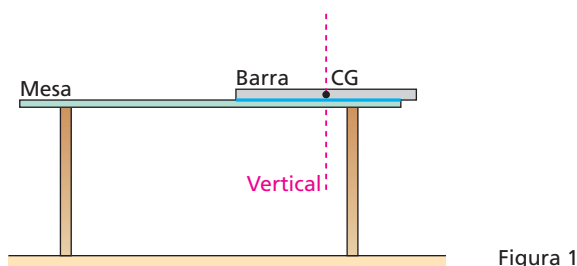
7. Equilíbrio de corpos apoiados

Vamos ver alguns exemplos em que um corpo apoiado poderá estar ou não em equilíbrio.

Exemplo 1:

As figuras 1 e 2 ao lado representam uma barra prismática e homogênea, simplesmente apoiada em uma mesa.

Em 1, a linha de ação do peso da barra (reta vertical, passando pelo seu centro de gravidade) intercepta a região de apoio, destacada em azul. Nesse caso, a barra **não tomba**.

Já em 2, a linha de ação do peso da barra não intercepta a região de apoio e ela **tomba** ao ser abandonada.

Exemplo 2:

Nas situações das figuras 3 e 4 a seguir, supondo que o atrito impeça o escorregamento do bloco, ele **não tomba** em 3, mas **tomba** em 4. Observe que, em 3, a linha de ação do peso do bloco intercepta a região de apoio no plano inclinado, o que não acontece em 4:

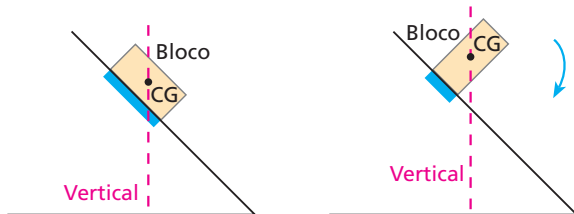
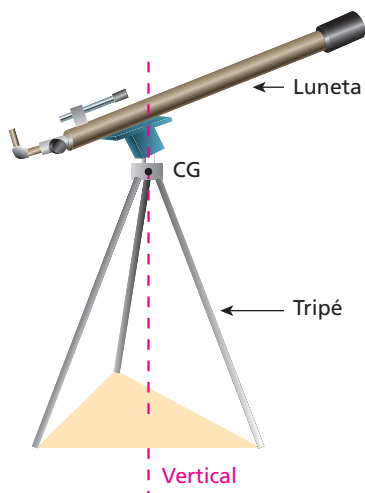



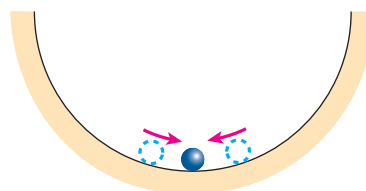
Figura 3 Figura 4

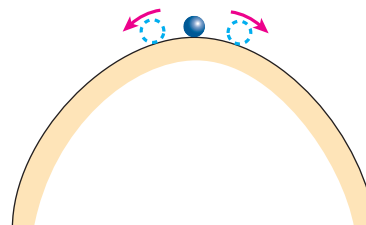
Em 3, a vertical que passa pelo centro de gravidade do bloco intercepta a região de apoio: **o bloco não tomba**.

Em 4, a vertical que passa pelo centro de gravidade do bloco não intercepta a região de apoio: **o bloco tomba**.

Exemplo 3:

Numa situação como esta, devemos considerar a menor superfície convexa definida pelos pontos de apoio, que, no caso, é uma região triangular. Para o sistema não tombar, a vertical que passa pelo centro de gravidade deve interceptar essa região.

8. Equilíbrio estável, instável e indiferente

A posição de equilíbrio de um corpo é denominada **estável** quando, após ele ter sido abandonado em um ponto ligeiramente afastado dela, alguma força age procurando trazê-lo de volta a essa posição, como exemplifica a figura a seguir.

No ponto mais baixo da depressão indicada, a bolinha está em equilíbrio estável porque, quando for abandonada em suas proximidades, a componente tangencial de seu peso procurará levá-la de volta a essa posição.

Já a posição de equilíbrio de um corpo é denominada **instável** quando, após ele ter sido abandonado em suas proximidades, alguma força age procurando afastá-lo ainda mais dessa posição, como ocorre na situação ilustrada a seguir.

No ponto mais alto da lombada representada, a bolinha está em equilíbrio instável.

Como carregar muitos cestos

Museu Castro Maya, Rio de Janeiro

A gravura Vendedor de cestos, do pintor francês Jean-Baptiste Debret (1768-1848), ilustra uma maneira de transportar mercadorias no século XIX, muito usada ainda hoje em algumas regiões do Nordeste. O centro de gravidade do sistema suspenso deve estar numa vertical que intercepte a região de apoio na cabeça da pessoa.

Nesse caso, ao ser ligeiramente afastada da posição de equilíbrio, a componente tangencial de seu peso procurará afastá-la ainda mais dessa posição.

Para finalizar, a posição de equilíbrio é denominada **indiferente** quando o corpo, após ter sido abandonado em suas vizinhanças, continua em equilíbrio, como exemplifica a figura.

As situações de equilíbrio estável, instável e indiferente também podem ser observadas com um corpo de centro de gravidade CG, suspenso por um eixo **E**, em torno do qual ele possa girar livremente. Suponha, por exemplo, que o eixo passe **acima** do centro de gravidade, como na situação de equilíbrio representada na figura 1.

Ilustrações: CJT/Zapt

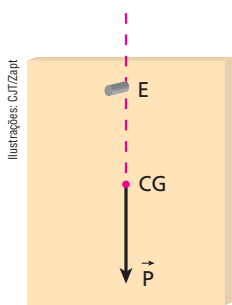
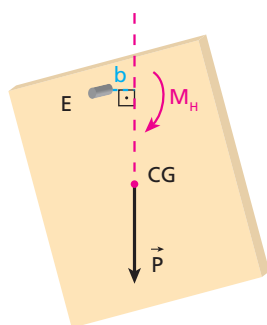



Figura 1 Figura 2

Afastando esse corpo ligeiramente da posição de equilíbrio e abandonando-o, como ilustra a figura 2, seu peso produzirá um momento horário M_H em relação ao eixo, procurando levá-lo de volta à posição de equilíbrio. Assim, concluímos que a situação representada em 1 é de equilíbrio **estável**.

Entretanto, se o eixo passar **abaixo** do centro de gravidade, a situação será de equilíbrio **instável**, como na figura 3.

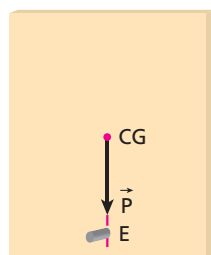
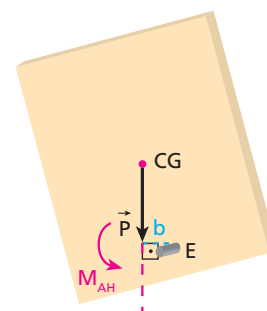



Figura 3 Figura 4

De fato, se o corpo for ligeiramente afastado da posição de equilíbrio e, em seguida, abandonado, como na figura 4, seu peso produzirá um momento anti-horário em relação ao eixo, procurando afastá-lo ainda mais da posição de equilíbrio representada na figura 3.

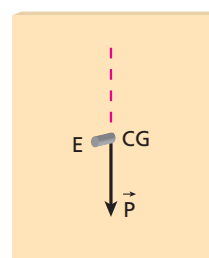



Figura 5

Finalmente, se o eixo passar pelo centro de gravidade, o equilíbrio será **indiferente**, como está representado na figura 5. Isso ocorre porque o peso não produzirá momento em relação ao eixo quando o corpo for afastado da posição em que se encontra.

Um pássaro em equilíbrio estável. Haja bico!

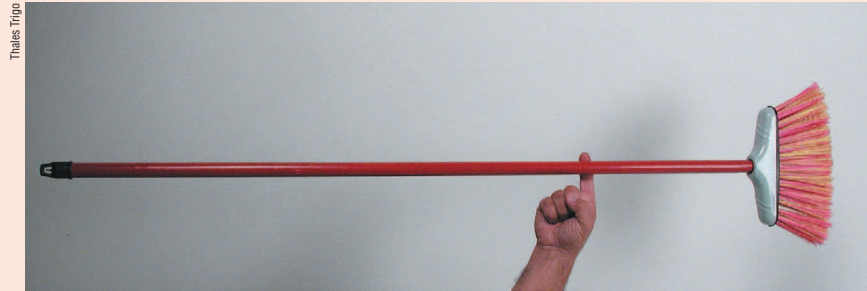
Cristina Xavier

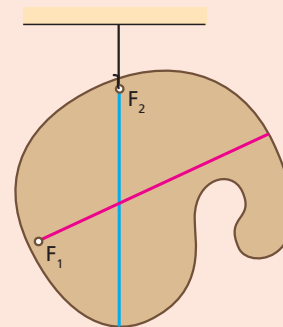
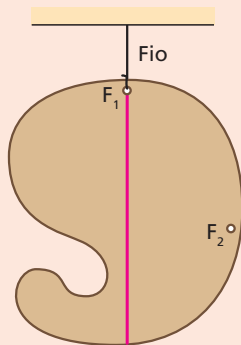
O pássaro plástico está em equilíbrio, simplesmente apoiado em um suporte. Esse pássaro é oco e possui um disco metálico escondido na extremidade de cada asa, o que faz seu centro de gravidade situar-se um pouco abaixo do ponto de apoio do seu bico. Por isso, o pássaro fica em equilíbrio estável.

Agora você deve entender também o equilíbrio do sistema garfos-rolha-palito na borda da boca de uma garrafa apresentado no início deste Tópico.

Faça você mesmo

Pegue uma vassoura já posta em desuso e procure apoiá-la em um de seus dedos, numa posição em que ela fique em equilíbrio na horizontal. Nessa situação, a vertical ao passar pelo centro de gravidade da vassoura intercepta a região do dedo em que ela se apoia. Isso significa que você localizou o centro de gravidade da vassoura.

Thales Trigo

Agora, serrando a vassoura transversalmente em seu centro de gravidade, você obtém duas partes: uma que contém a vassoura propriamente dita e outra que contém apenas um pedaço do cabo. Compare o peso das duas partes e interprete o resultado. Para fazer essa comparação, você pode usar um dinamômetro. Na falta dele, porém, use uma mola ou uma tira de borracha, suspendendo uma parte de cada vez em uma de suas extremidades e segurando a outra com a mão. A mola ou a tira de borracha sofrerá maior deformação (alongamento) quando a parte suspensa tiver o maior peso.

Como já dissemos, o centro de gravidade (CG) de uma chapa retangular homogênea e de espessura uniforme está localizado na interseção de suas diagonais. Entretanto, se a chapa, mesmo sendo homogênea e de espessura uniforme, tiver um formato irregular que não admita planos de simetria, a determinação de seu centro de gravidade por meio de cálculos será muito complicada. Nesse caso, optamos pela determinação experimental.

Pegue uma chapa plana de papelão ou de outro material e recorte-a de modo que obtenha uma peça com formato irregular. Faça nela dois furos F_1 e F_2 que permitam a passagem, com folga, de uma linha. Suspenda a chapa por meio da linha, passando por F_1, e aguarde o equilíbrio.

Trace, então, na chapa um segmento de reta alinhado com o fio de suspensão. O prumo, usado na construção civil, auxilia essa tarefa.

Em seguida, repita a operação, suspendendo a chapa por uma linha que deve passar pelo furo F_2.

Você já sabe onde está o CG da chapa? Apoie-a na ponta de um de seus dedos e confira.

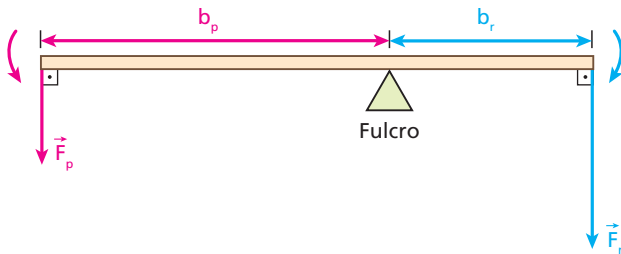
9. Alavancas

Alavancas são barras geralmente utilizadas para ampliar a intensidade de forças. Para que possam operar, elas necessitam de um ponto de apoio denominado **fulcro**.

Chamaremos de **força potente** ($\vec{F}_p$) a força exercida na alavanca por quem a usa e de **força resistente** ($\vec{F}_r$) a força que se pretende vencer com a alavanca.

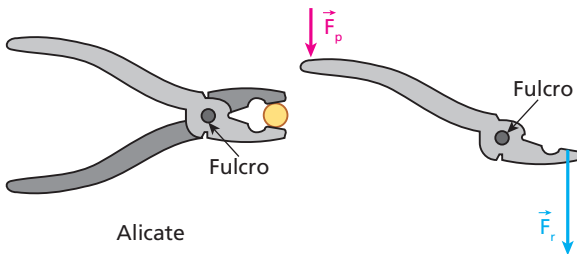
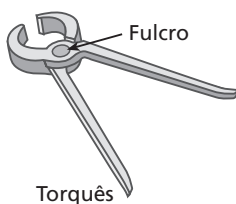
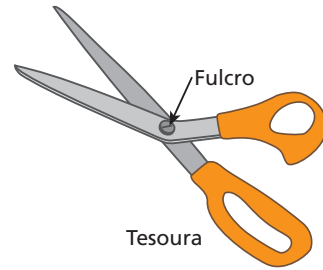
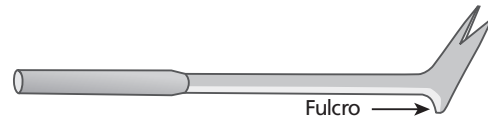
Existem três tipos de alavanca: interfixa, inter-resistente e interpotente.

Alavanca interfixa

É um tipo de alavanca em que o fulcro (ponto de apoio) está entre os pontos de aplicação de $\vec{F}_p$ e $\vec{F}_r$ como ilustra a figura abaixo, em que b_p é o braço da força potente e b_r é o braço da força resistente, ambos em relação ao fulcro.

Se desconsiderarmos a massa da alavanca, suposta em equilíbrio, podemos afirmar que, em relação ao fulcro, o momento horário da força resistente é, em módulo, igual ao momento anti-horário da força potente:

$$F_p\, b_p = F_r\, b_r \Rightarrow F_p = \frac{F_r b_r}{b_p}$$

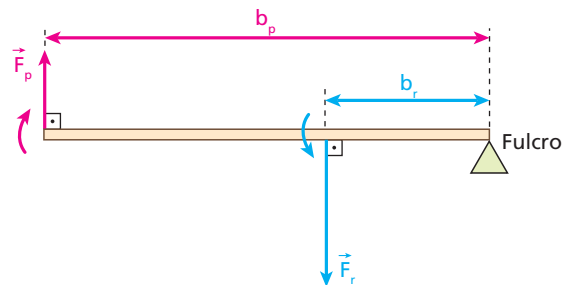
Fazendo b_r **menor** que b_p, temos F_p **menor** que F_r. Essa é a vantagem do uso da alavanca interfixa.

Num alicate, por exemplo, temos um par de alavancas interfixas operando em conjunto:

Veja outros exemplos de alavanca interfixa:

Alavanca inter-resistente

É um tipo de alavanca em que a força resistente está aplicada entre a força potente e o fulcro.

b_p

$\vec{F}_p$ b_r Fulcro

$\vec{F}_r$

Ignorando a massa da alavanca e considerando-a em equilíbrio, temos:

$$F_p\, b_p = F_r\, b_r \Rightarrow F_p = \frac{F_r b_r}{b_p}$$

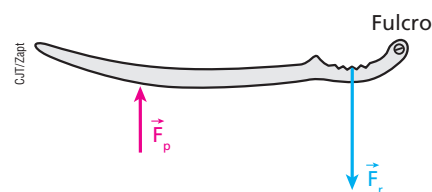
Como b_r é **menor** que b_p, continuamos obtendo F_p **menor** que F_r. Essa é a vantagem do uso desse tipo de alavanca.

Em um quebra-nozes, por exemplo, temos um par de alavancas inter-resistentes operando em conjunto.

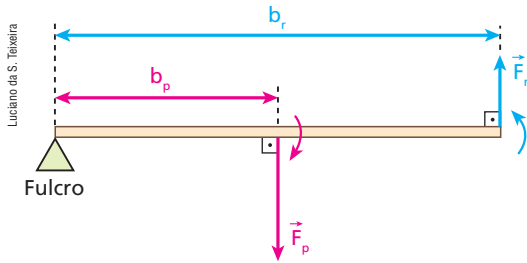
CJT/Zapt

Fulcro

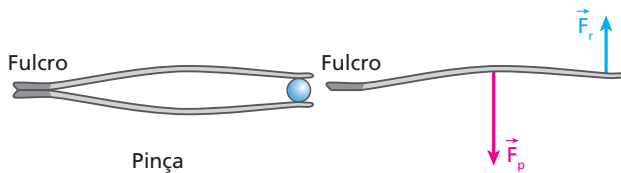
$\vec{F}_p$

$\vec{F}_r$

O carrinho de mão também é um exemplo de alavanca inter-resistente. A força resistente corresponde ao peso total do carrinho e seu conteúdo, que pode ser considerado aplicado no centro de gravidade do conjunto. A força potente é a força total exercida pela pessoa nos braços do carrinho. O fulcro está na região do solo em que a roda se apoia.

Alavanca interpotente

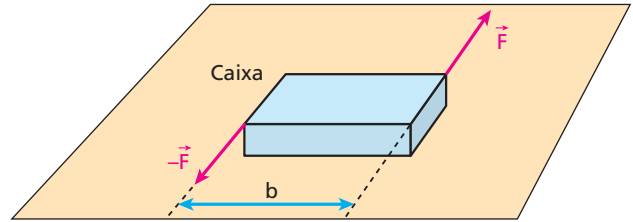
Nesse tipo de alavanca, a força potente está aplicada entre o fulcro e o ponto de aplicação da força resistente.

Ignorando a massa da alavanca e considerando-a em equilíbrio, temos:

$$F_p\, b_p = F_r\, b_r \Rightarrow F_p = \frac{F_r\, b_r}{b_p}$$

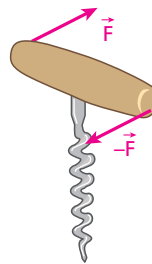
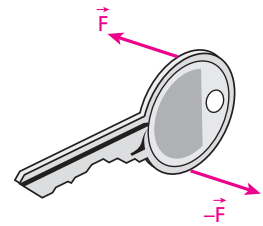
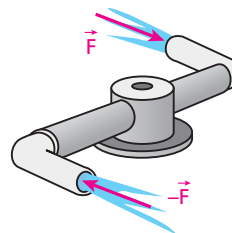
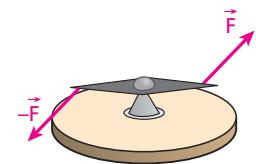
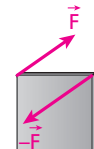
Note que, pela primeira vez, b_r é **maior** que b_p. Então, F_p é **maior** que F_r, de modo que esse tipo de alavanca não apresenta a vantagem dos outros tipos analisados. Entretanto, nem por isso ela deixa de ter sua utilidade. É o caso, por exemplo, de uma pinça, em que temos duas alavancas interpotentes operando em conjunto.

10. Binário

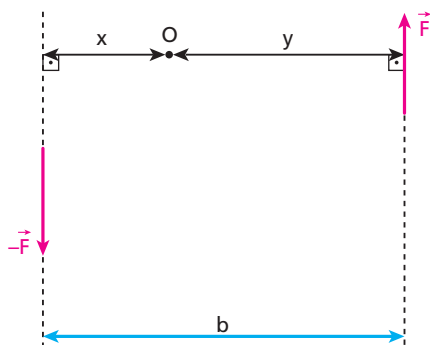
Definição

Um sistema de forças que merece destaque é aquele constituído por duas forças de mesma intensidade, mesma direção, sentidos opostos e linhas de ação **não-coincidentes**, atuantes em um mesmo corpo. Esse sistema é denominado **binário**.

As forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ aplicadas na caixa representada na figura a seguir constituem um binário. A distância **b** entre as linhas de ação das duas forças é o **braço** do binário.

Representação de caixa sobre uma superfície horizontal lisa.

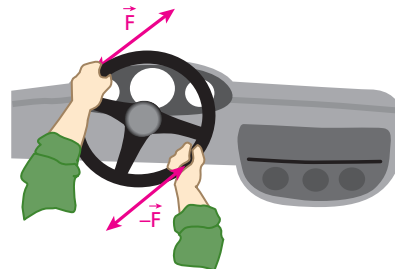
Como a resultante dessas forças é nula, um binário não pode acelerar o centro de massa do corpo em que atua, mas é capaz de produzir rotação acelerada. Assim, se a caixa está inicialmente em repouso na superfície lisa, ao receber o binário seu centro de massa permanece em repouso, embora ela inicie rotação acelerada em torno dele.

Os objetos representados a seguir exemplificam utilizações de binários:

Momento escalar do binário

Na figura a seguir, **O** é o ponto em que um eixo intercepta perpendicularmente o plano de um binário.

O módulo do momento escalar do binário ($|M_B|$) em relação a **O** é a soma dos módulos dos momentos escalares das duas forças em relação a **O**, já que ambas produzem tendência de rotação no mesmo sentido:

$$|M_B| = Fx + Fy = F(x + y) \Rightarrow |M_B| = F\,b$$

Temos, então, que o módulo do momento do binário é dado pelo produto da intensidade de uma de suas forças pelo braço **b** do binário, independentemente da posição do ponto **O**.

Exemplo:

Para fazer uma curva à direita, o motorista está girando o volante por meio da aplicação de um binário. Em volantes esportivos, que têm diâmetros menores, são necessários esforços mais intensos para produzir um mesmo torque, já que o braço do binário é menor.

Leitura

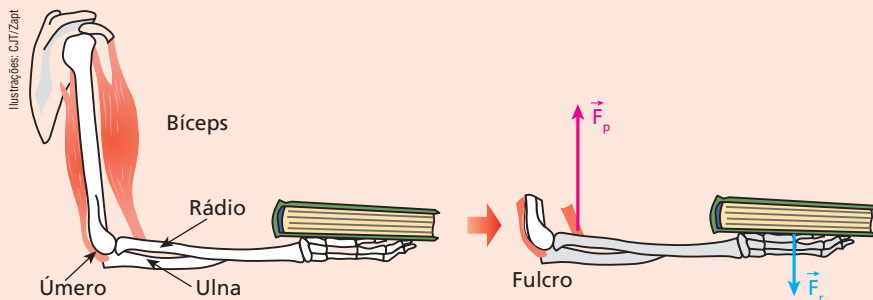
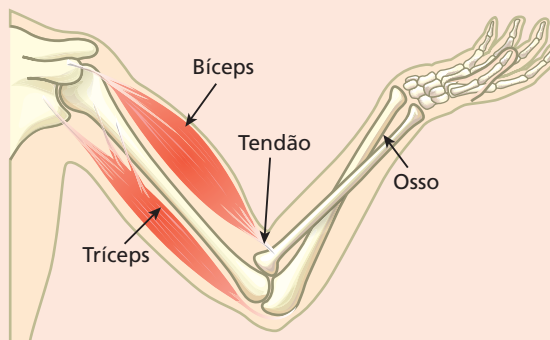
Algumas alavancas nos seres vivos

No corpo humano

No corpo humano, articulações são regiões em que dois ou mais ossos estão combinados para produzir movimentos. Esses ossos são alavancas, fundamentais para que se possa abrir e fechar a boca e movimentar braços e pernas, por exemplo. Eles são movidos por músculos, com os quais se conectam por meio de tendões. Os músculos podem se contrair, mas para isso acontecer precisam receber impulsos nervosos (sinais elétricos) do sistema nervoso central e periférico, conduzidos por nervos.

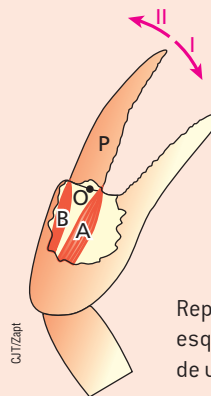
Veja um caso de alavanca no corpo humano.

O bíceps é um músculo que, ao se contrair, puxa o antebraço para cima. Ao mesmo tempo, ocorre o estiramento de um outro músculo: o tríceps.

O tríceps, por sua vez, é um músculo que, ao se contrair, puxa o antebraço para baixo. Ao mesmo tempo, acontece o estiramento do bíceps.

O antebraço é uma alavanca interpotente em que o fulcro está na articulação com o osso úmero (cotovelo) e a força potente, na situação ilustrada, é exercida pelo músculo bíceps. Ignorando o peso do antebraço (para simplificar), podemos dizer que a força resistente, no equilíbrio, tem a mesma intensidade do peso do livro. (Esquema em cores-fantasia.)

Uma forte alavanca num caranguejo

Nas tenazes de um caranguejo, mais conhecidas por pinças, encontramos alavancas, também controladas por impulsos nervosos do seu sistema nervoso ganglionar ventral.

Thinkstock/Getty Images

Representação esquemática simplificada de uma pinça.

Quando o músculo **A** se contrai, a parte **P** gira em torno do fulcro **O**, no sentido **I**, e o sistema se fecha. Quando o músculo **B** se contrai, a parte **P** gira no sentido **II e** o sistema se abre.

Exercícios — nível 1

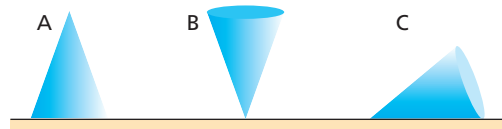
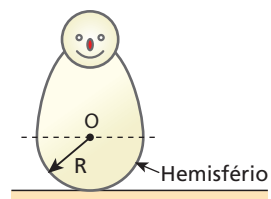
56. (UFRN) Rafael gosta de fazer "pegadinhas" com seus colegas. Ele começou demonstrando um exercício físico de flexibilidade, tocando os pés sem flexionar os joelhos (figura 1). O bem-humorado Rafael, com ar de gozação, disse que seus colegas não seriam capazes de fazer esse exercício sem perder o equilíbrio do corpo e, por isso, daria a chance de eles realizarem o exercício encostados na parede (figura 2).

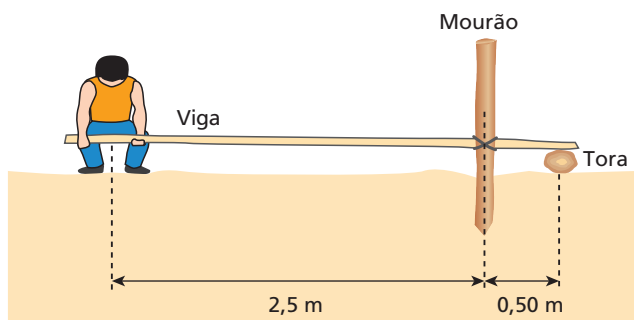
Figura 1 – Exercício feito por Rafael.

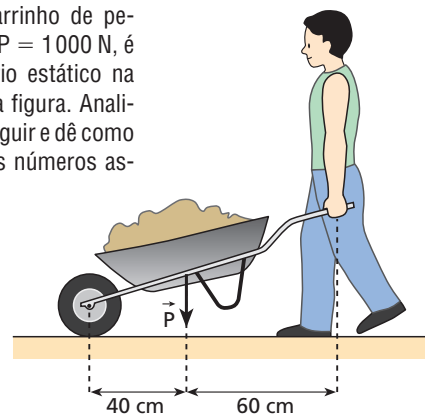
Figura 2 – Colega de Rafael encostado na parede, tentando repetir o exercício.

Esse procedimento proposto por Rafael, em vez de auxiliar, dificulta ainda mais o equilíbrio corporal da pessoa, pois a parede faz com que:

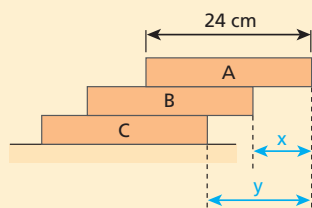
a) o centro de gravidade da pessoa seja deslocado para uma posição que impede o equilíbrio.
b) a força normal exercida na pessoa, pela parede, seja maior que a força que a pessoa faz na parede.
c) o torque exercido na pessoa, pela parede, seja maior que o torque que a pessoa faz na parede, ambos em relação aos pés da pessoa.
d) o centro de gravidade da pessoa não coincida com o seu próprio centro de massa.

57. De que tipo é o equilíbrio dos cones homogêneos **A**, **B** e **C** representados na figura: **estável**, **instável** ou **indiferente**?

58. Existe um boneco que insiste em ficar em pé após sofrer qualquer abalo. Imaginando sua base hemisférica de raio **R** e centro **O**, podemos afirmar que esse brinquedo exemplifica bem o equilíbrio:

a) estável, e seu centro de gravidade (CG) está acima de **O**.
b) estável, e seu CG está abaixo de **O**.
c) indiferente, e seu CG está em **O**.
d) estável, e seu CG está no contato com o chão.
e) instável, e seu CG está abaixo de **O**.

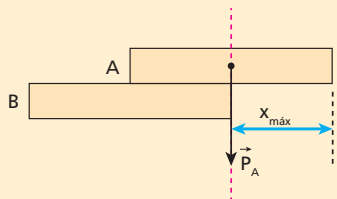
59. Suponha que, para arrancar um mourão fincado no chão, um homem, puxando-o diretamente com as mãos, tivesse de exercer nele uma força de intensidade 1 800 N, no mínimo.

Usando uma viga amarrada no mourão e apoiada em uma tora, como sugere a figura, determine a mínima intensidade da força que o homem precisa exercer na viga para arrancar o mourão. Para simplificar, desconsidere o peso da viga e suponha que a força total exercida nela pelo homem esteja aplicada no ponto médio entre suas mãos.

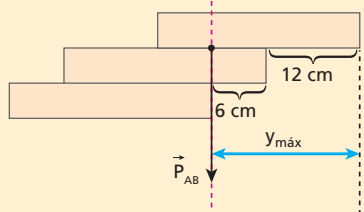
60. (UFMS) Um carrinho de pedreiro, de peso total P = 1 000 N, é mantido em equilíbrio estático na posição mostrada na figura. Analise as afirmações a seguir e dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

(01) O módulo da força exercida pelo carregador é igual ao do peso do carrinho.
(02) O módulo da força exercida pelo carregador é 400 N.
(04) A força resultante sobre o carrinho é nula.
(08) O módulo da força normal exercida pelo solo sobre o carrinho é menor que 1 000 N.

Exercícios nível 2

61. E.R. Na figura, temos três tijolos idênticos de 24 cm de comprimento empilhados. Determine os máximos valores de **x** e de **y** para que a pilha ainda se mantenha em equilíbrio, como mostra a figura.

Resolução:

Para que a pilha se mantenha em equilíbrio, devemos impor que o tijolo **A** esteja em equilíbrio sobre **B** e que o conjunto AB esteja em equilíbrio sobre **C**.

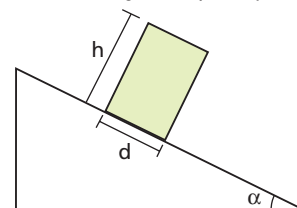
Para o tijolo **A** estar em equilíbrio sobre **B**, é preciso que a linha de ação do peso de **A** intercepte a região de apoio de **A** sobre **B**. Assim, o máximo valor de **x** é 12 cm:

$$x_{máx} = 12 \text{ cm}$$

Para o conjunto AB estar em equilíbrio sobre **C**, é preciso que a linha de ação do peso de AB intercepte a região de apoio de AB sobre **C**.

Assim, temos:

$$y_{máx} = 18 \text{ cm}$$

62. (ITA-SP) Considere um bloco de base **d** e altura **h** em repouso sobre um plano inclinado de ângulo **α**. Suponha que o coeficiente de atrito estático seja suficientemente grande para que o bloco não deslize pelo plano.

O valor máximo da altura **h** do bloco para que a base **d** permaneça em contato com o plano é:

a) d/α.
b) d/sen α.
c) d/sen^2 α.
d) d cotg α.
e) d cotg α/sen α.

63. (UFRJ) A figura 1 mostra o braço de uma pessoa (na horizontal) que sustenta um bloco de 10 kg em sua mão. Nela, estão indicados os ossos úmero e rádio (que se articulam no cotovelo) e o músculo bíceps.

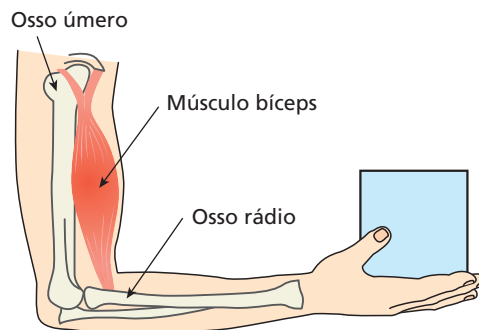



Figura 1

A figura 2 mostra um modelo mecânico equivalente: uma barra horizontal articulada em **O**, em equilíbrio, sustentando um bloco de 10 kg. A articulação em **O** é tal que a barra pode girar livremente, sem atrito, em torno de um eixo perpendicular ao plano da figura em **O**. Na figura 2, estão representados por segmentos orientados:

- a força $\vec{F}$ exercida pelo bíceps sobre o osso rádio, que atua a 4 cm da articulação **O**;
- a força $\vec{F}$ exercida pelo osso úmero sobre a articulação **O**;
- o peso $\vec{p}$ do sistema braço-mão, de massa igual a 2,3 kg e aplicado em seu centro de massa, a 20 cm da articulação **O**;
- o peso $\vec{P}$ do bloco, cujo centro de massa se encontra a 35 cm da articulação **O**.

Calcule o módulo da força $\vec{F}$ exercida pelo bíceps sobre o osso rádio, considerando g = 10 m/s^2.

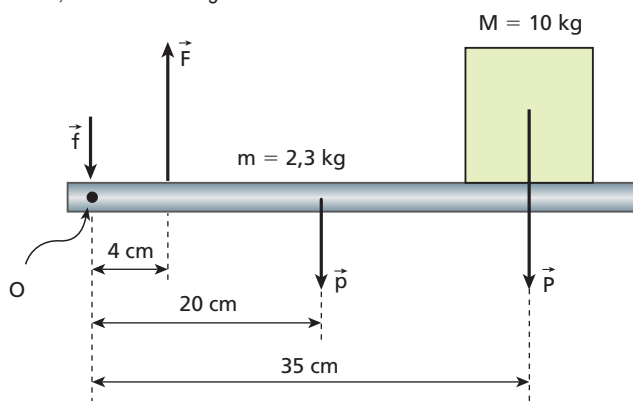
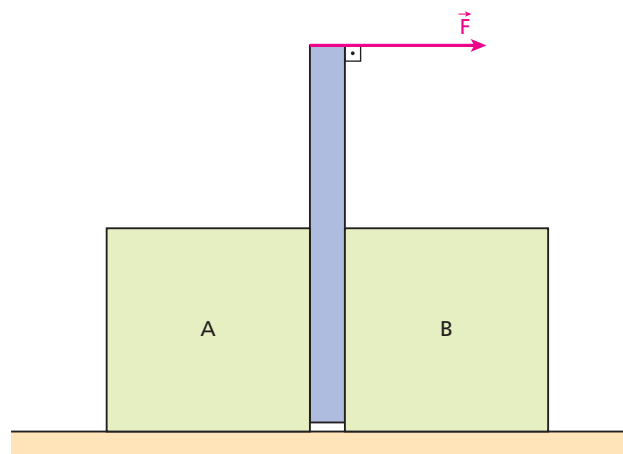



Figura 2

64. A figura a seguir representa duas caixas idênticas, **A** e **B**, apoiadas em uma mesa horizontal real. Entre elas, há uma barra que não toca a mesa:

Qual das duas caixas se move primeiro quando uma força horizontal $\vec{F}$ de intensidade crescente é aplicada na extremidade superior da barra?

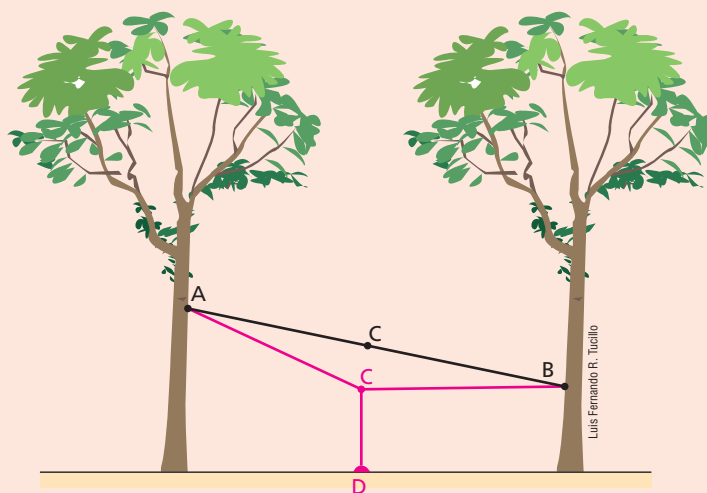
Descubra mais

1. As teias das aranhas são estruturas estáticas construídas de um modo muito curioso.

Existem vários tipos de teia. Vamos abordar aqui a teia produzida por uma espécie de aranha do gênero *Argiope sp*.

Quando uma dessas aranhas constrói uma teia – por exemplo, no alto entre duas árvores, a dois metros uma da outra –, ela começa produzindo um fio AB, cujas extremidades são fixadas, cada uma delas, em uma das árvores, ficando esticado (veja a representação esquemática na figura a seguir, em que o fio AB está desenhado em traço preto). Depois, ela produz um outro fio, CD, que vai de um ponto de AB até um ponto qualquer, que pode estar no chão. Esse outro fio também fica esticado. Os segmentos AC, CB e CD costumam ser chamados de estirantes e estão destacados em vermelho na figura. Em seguida, ela constrói a teia propriamente dita.

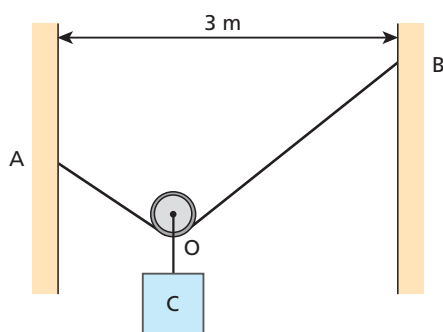
Procure saber como a aranha consegue fazer tudo isso, lembrando que ela não voa e que por meio de saltos a operação não seria possível. Pesquise também como ela constrói toda a teia.

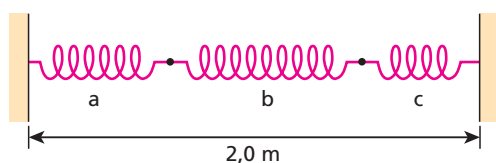
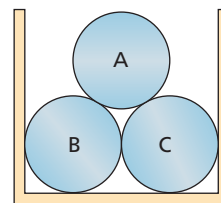
Fabio Colombini

Luis Fernando R. Tucillo

2. Investigue outras alavancas nas articulações do ser humano, procurando saber os nomes dos ossos e dos músculos que as constituem e de que tipo elas são.
3. Você já deve ter notado, nos parques de diversão, que as gangorras desocupadas estão sempre com uma das extremidades apoiada no solo. Elas nunca se encontram em equilíbrio na horizontal. Por que isso acontece?
4. A respeito da Torre de Pisa, procure saber:
   • Para que foi construída?
   • Quando se iniciou sua construção?
   • Qual o motivo de ela ter se inclinado?
   • Atualmente, a inclinação continua aumentando?
   • Em que situação o equilíbrio da torre estaria em estado crítico?

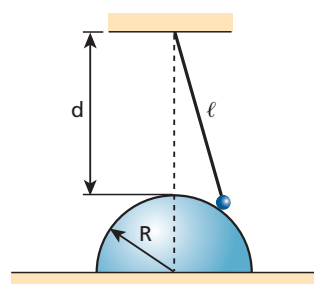
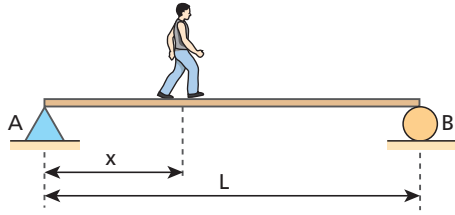
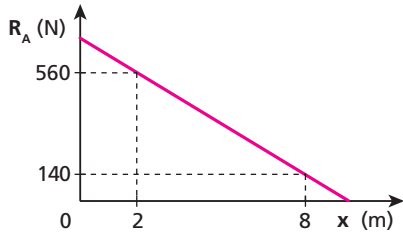
Exercícios

nível 3

65. Na figura, temos duas paredes verticais, um fio ideal de 5 m de comprimento preso aos pontos **A** e **B** das paredes, uma polia ideal e um corpo **C**, suspenso em equilíbrio do eixo da polia, de 400 N de peso:

Responda:
a) Qual a intensidade da tração no fio?
b) A intensidade da tração no fio depende do desnível entre **A** e **B**?

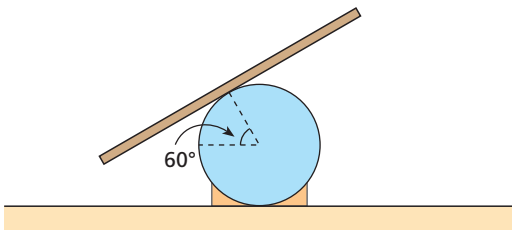
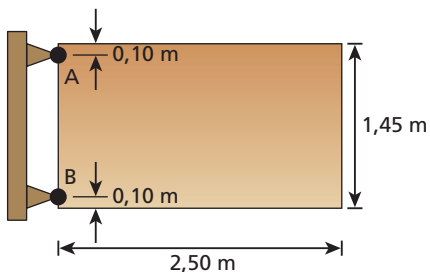
66. (IME-RJ) Três molas, **a**, **b** e **c**, têm comprimento natural $\ell_a = 0,5$ m, $\ell_b = 0,6$ m e $\ell_c = 0,7$ m e constante elástica $k_a = 10$ N/m, $k_b = 15$ N/m e $k_c = 18$ N/m. Elas são ligadas entre si e estiradas entre duas paredes distantes 2,0 metros uma da outra, onde as extremidades estão fixadas, conforme a figura a seguir. Qual o comprimento de cada uma das molas estiradas, em equilíbrio?

67. (Fuvest-SP) Três cilindros iguais, **A**, **B** e **C**, cada um com massa **M** e raio **R**, são mantidos empilhados com seus eixos horizontais, por meio de muretas laterais verticais, como mostra a figura. Desprezando qualquer efeito de atrito, determine, em função de **M** e **g**:

a) o módulo da força $\vec{F}_{AB}$ que o cilindro **A** exerce sobre o cilindro **B**;
b) o módulo da força $\vec{F}_{PB}$ que o piso exerce sobre o cilindro **B**;
c) o módulo da força $\vec{F}_{MC}$ que a mureta exerce sobre o cilindro **C**.

Nota:
• Suponha que os cilindros **B** e **C**, ao serem introduzidos no sistema, ficaram apenas justapostos, sem qualquer compressão entre eles.

68. Uma bolinha de aço, de peso **P**, encontra-se em repouso presa em um fio suposto ideal, de comprimento ℓ, e apoiada em um hemisfério fixo de raio **R**, praticamente sem atrito. Sendo **d** a distância do polo do hemisfério ao ponto de suspensão do fio, determine a intensidade da força de tração exercida pelo fio em função de **P**, ℓ, **d** e **R**.

69. (Faap-SP) Uma viga de peso desprezível é apoiada por suas extremidades **A** e **B**, sendo que um homem de peso **P** anda sobre ela:

A intensidade R_A da reação do apoio **A** é dada pelo gráfico a seguir, em que **x** é a distância de **A** ao homem:

Calcule, então:

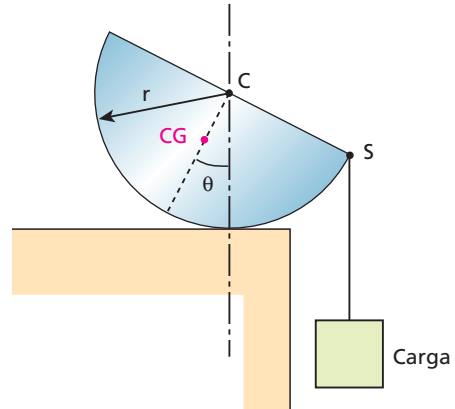
a) o peso **P** do homem;

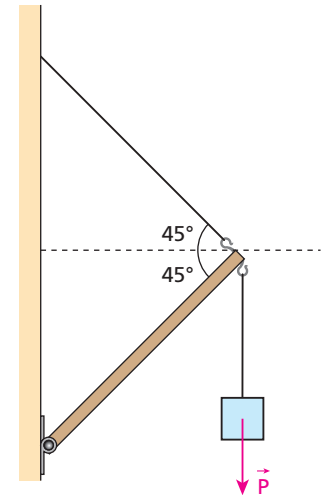
b) o comprimento **L** da viga.

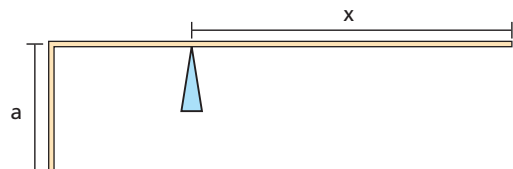
70. (Mack-SP) Uma tábua rígida é colocada sobre um cilindro fixo, ficando em equilíbrio e na iminência de escorregar, como mostra a figura. Determine o coeficiente de atrito estático entre a tábua e o cilindro.

71. (UFRJ) Um portão retangular de massa igual a 50 kg tem 2,50 m de comprimento, 1,45 m de altura e está preso a duas dobradiças **A** e **B**. O vértice da dobradiça **A** dista 0,10 m do topo do portão, e o vértice da dobradiça **B**, 0,10 m da base, como indica a figura a seguir.

Suponha que o sistema esteja em repouso, que o peso do portão esteja aplicado em seu centro geométrico e que a aceleração g da gravidade local seja 10 m/s^2.

a) Calcule o módulo da força resultante exercida pelas duas dobradiças sobre o portão.

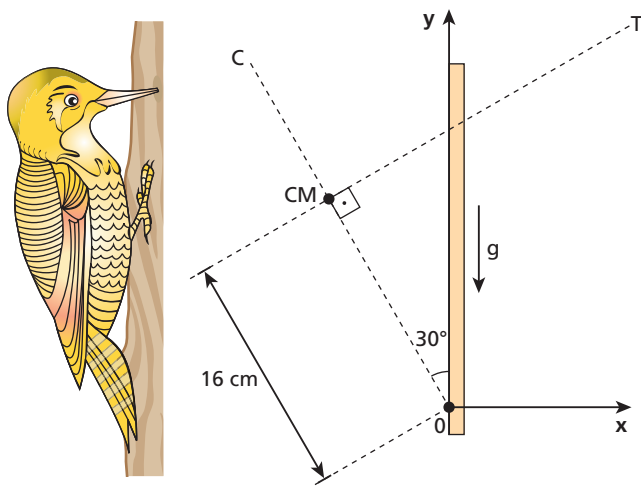
b) Calcule o módulo da componente horizontal da força exercida pela dobradiça **A** sobre o portão e determine seu sentido.

72. A figura representa uma seção transversal de um semicilindro homogêneo de peso **P** e base de raio **r**, apoiado em uma superfície plana e horizontal. O centro de gravidade do semicilindro (CG) e o ponto **S** pertencem à referida seção. O sólido citado se mantém em equilíbrio, como na figura, quando uma carga de peso **Q** está suspensa do ponto **S** por meio de uma corda leve. Sendo **d** a distância do ponto **C** ao centro de gravidade CG, determine **Q** em função de **P**, **d**, **r** e do ângulo **θ** indicado.

73. (Aman-RJ) Veja a figura ao lado. A tração máxima que a corda superior pode suportar é de $400\sqrt{2}$ N e a compressão máxima que a escora pode aguentar é de $600\sqrt{2}$ N. A corda vertical é suficientemente resistente para tolerar qualquer peso envolvido no problema.

O maior peso de um corpo em repouso que pode ser sustentado pela estrutura da figura, considerando desprezível o peso da escora, é:

a) 800 N.
b) 1 000 N.
c) 200 N.
d) 600 N.
e) 400 N.

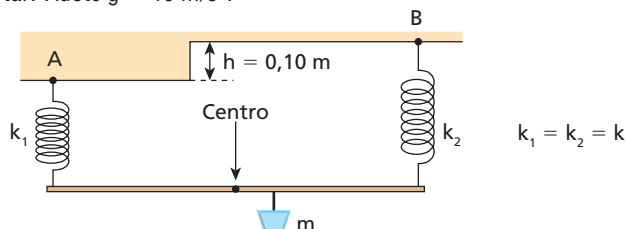
74. (UFPI) Um arame homogêneo de 23 cm de comprimento é dobrado, como indica a figura, em que a = 5 cm.

Para que o arame apoiado se mantenha em equilíbrio, o comprimento **x** deve ser, aproximadamente, de:

a) 6 cm.
b) 9 cm.
c) 11 cm.
d) 14 cm.
e) 15 cm.

75. (Fuvest-SP) Para manter-se equilibrado em um tronco de árvore vertical, um pica-pau agarra-se pelos pés, puxando-se contra o tronco, e apoia sobre ele sua cauda, constituída de penas muito rígidas, conforme a figura abaixo. No esquema, estão indicadas as direções das forças nos pés (**T**) e na causa (**C**) do pica-pau – que passam pelo seu centro de massa (**CM**) – e a distância da extremidade da cauda ao **CM** do pica-pau, que tem 1 N de peso (**P**).

a) Calcule os momentos das forças **P** e **C** em relação ao ponto **O**.

b) Escreva a expressão para o momento da força **T** em relação ao ponto **O** e determine o módulo dessa força.

c) Determine o módulo da força **C** na cauda do pica-pau.

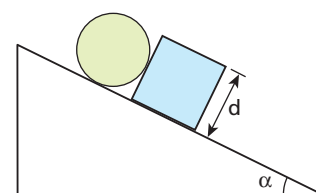
76. (UFPE) A figura mostra uma barra homogênea, de comprimento L = 1,0 m, presa ao teto nos pontos **A** e **B** por molas ideais iguais, de constante elástica $k = 1{,}0 \cdot 10^2$ N/m. A que distância do centro da barra, em centímetros, deve ser pendurado um jarro de massa m = 2,0 kg, de modo que a barra permaneça na horizontal? Adote g = 10 m/s^2.

77. (ITA-SP) Considere o bloco cúbico homogêneo de lado **d** e massa **m** em repouso sobre um plano inclinado de ângulo **α**, que impede o movimento de um cilindro homogêneo de diâmetro **d** e massa **m** idêntica à do bloco, como mostra a figura. Suponha que o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano seja suficientemente grande para que o bloco não deslize pelo plano e que o coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o bloco seja desprezível. O valor máximo do ângulo **α** do plano inclinado, para que a base do bloco permaneça em contato com o plano, é tal que:

a) $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$.

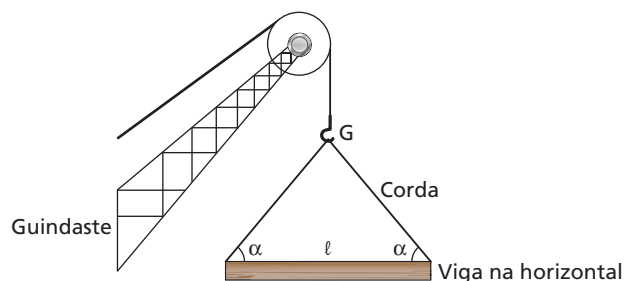
b) $\text{tg}\,\alpha = 1$.

c) $\text{tg}\,\alpha = 2$.

d) $\text{tg}\,\alpha = 3$.

e) $\text{cotg}\,\alpha = 2$.

Para raciocinar um pouco mais

78. Uma viga de concreto, de massa **M** e comprimento **ℓ**, está pronta para ser erguida por um guindaste.

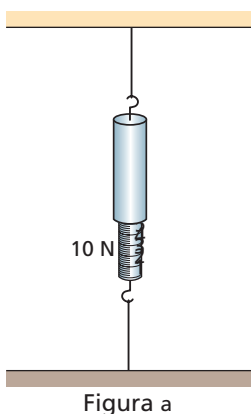
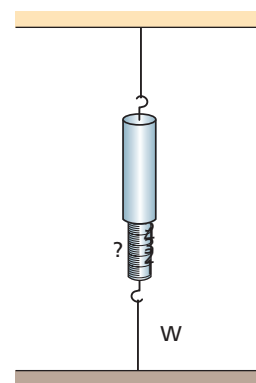
Uma corda, de massa muito menor que **M**, amarrada nas extremidades da viga, passa pelo gancho **G** representado na figura.

Sendo **g** a intensidade do corpo gravitacional e considerando a viga em equilíbrio e já suspensa como na figura:

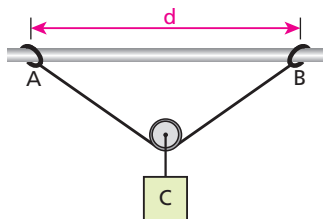
a) Expresse a intensidade **T** da força de tração na corda em função de **M**, **g**, **ℓ** e do comprimento total, **L**, da corda.

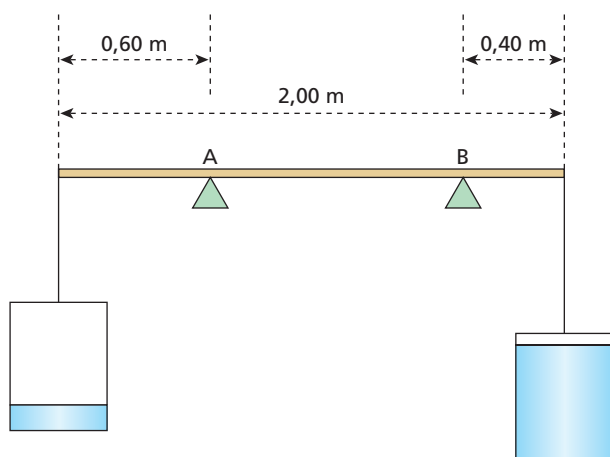
b) Represente graficamente **T** em função de **L**, um comprimento considerado variável pois depende da corda utilizada.

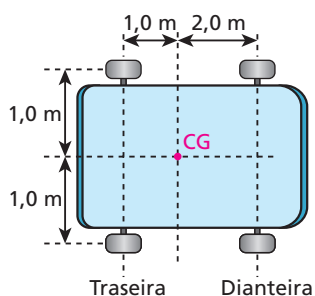
79. (Olimpíada Ibero-americana de Física) Um dinamômetro é preso por uma corda ao teto e logo é tensionado por outra corda presa ao piso, de forma que sua leitura seja de 10 N (figura a).

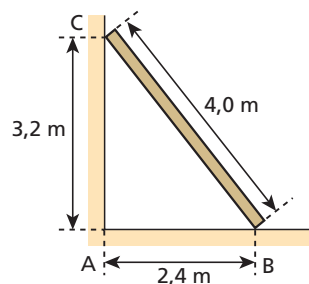
Coloca-se então um peso **W** no gancho inferior do dinamômetro. Qual será a nova leitura do dinamômetro nos seguintes casos:

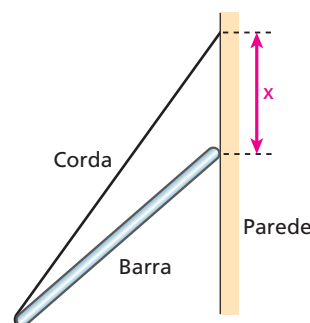
a) W = 7 N

b) W = 16 N

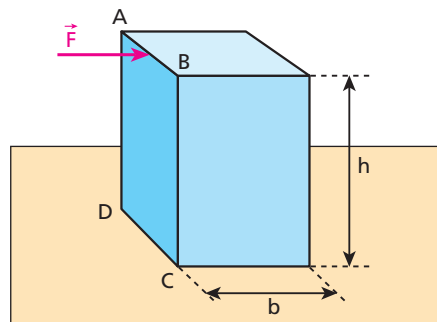
80. Na figura abaixo, temos um cano metálico horizontal e duas argolas leves, **A** e **B**, nas quais está amarrado um fio considerado ideal, de 1,20 m de comprimento. Desse fio, está suspenso, em equilíbrio, um corpo **C** de massa 10 kg por meio de uma pequena polia também considerada ideal.

Determine a máxima distância **d** permitida entre as argolas para que o sistema permaneça em equilíbrio, sendo 0,75 o coeficiente de atrito estático entre cada argola e o cano.

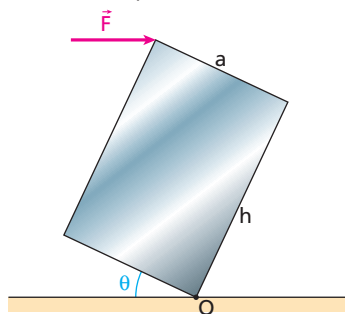
81. (Olimpíada Brasileira de Física) Uma haste leve é apoiada nos pontos **A** e **B**; do seu extremo direito pende um balde com 50 L de água e, do seu extremo esquerdo, pende outro balde com 10 L de água, por meio de fios de massas desprezíveis, conforme o desenho. As massas dos baldes podem também ser desconsideradas.

Quais as quantidades mínima e máxima de água que devem ser transferidas do balde da direita para o da esquerda para que o sistema fique em equilíbrio?

82. A figura representa um veículo visto de cima, em repouso numa superfície plana e horizontal. O veículo pesa 1 200 kgf e o ponto CG é seu centro de gravidade.

Determine as intensidades das forças que as rodas recebem da superfície onde se apoiam.

83. (IME-RJ) Uma escada de 4,0 m de comprimento está apoiada contra uma parede vertical com a sua extremidade inferior a 2,4 m da parede, como mostra a figura. A escada pesa 20 kgf e seu centro de gravidade está localizado no ponto médio. Sabendo que os coeficientes de atrito estático entre a escada e o solo e entre a escada e a parede são, respectivamente, 0,50 e 0,20, calcule:

a) a altura máxima, em relação ao solo, a que um homem de 90 kgf de peso pode subir sem provocar o escorregamento da escada;
b) a distância máxima da parede a que se pode apoiar a parte inferior da escada vazia sem provocar escorregamento.

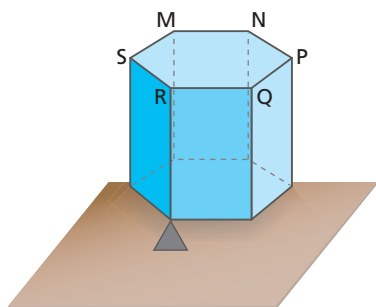
84. Uma barra cilíndrica e homogênea, de comprimento igual a 300 cm, encontra-se em equilíbrio sustentada por uma corda de comprimento igual a 400 cm e apoiada em uma parede vertical praticamente sem atrito, como representa a figura.

Determine a distância **x** entre o ponto da parede onde a corda está amarrada e o ponto da parede onde a barra se apoia.

85. Um bloco prismático e homogêneo, de altura **h** e base quadrada de lado **b**, encontra-se em repouso em um piso plano e horizontal.

Uma força $\vec{F}$, de intensidade crescente a partir de zero, é aplicada no ponto médio da aresta AB, perpendicularmente à face ABCD. Sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o piso, determine a relação entre **b** e **h** para que o bloco tombe antes de escorregar.

86. Uma chapa retangular homogênea, de espessura uniforme, largura **a** e comprimento **h**, está em repouso apoiada em uma superfície plana e horizontal, sob a ação de uma força horizontal $\vec{F}$, como representa a figura. Essa força e o centro de gravidade da chapa estão em um mesmo plano vertical.

Sendo **P** a intensidade do peso da chapa, determine:

a) a intensidade da força $\vec{F}$, em função de **a**, **h**, **P** e do ângulo **θ** indicado na figura;

b) o ângulo θ_E (um valor de **θ**), correspondente à posição de equilíbrio instável da chapa (força $\vec{F}$ ausente), em função de **a** e **h**.

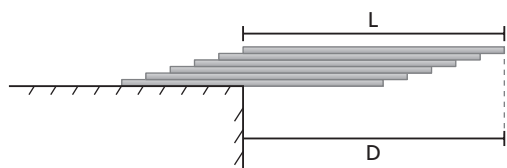
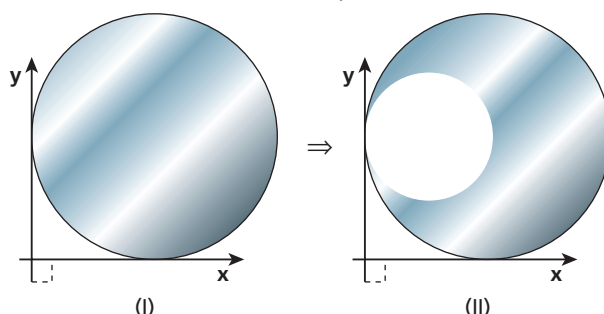
87. (ITA-SP) Um prisma regular hexagonal homogêneo com peso de 15 N e aresta da base de 2,0 m é mantido de pé graças ao apoio de um dos seus vértices da base inferior (ver figura) e à ação de uma força vertical de suspensão de 10 N (não mostrada). Nessas condições, o ponto de aplicação da força na base superior do prisma encontra-se:

a) sobre o segmento $\overline{RM}$ a 2,0 m de R.

b) sobre o segmento $\overline{RN}$ a 4,0 m de R.

c) sobre o segmento $\overline{RN}$ a 3,0 m de R.

d) sobre o segmento $\overline{RN}$ a 2,0 m de R.

e) sobre o segmento $\overline{RP}$ a 2,5 m de R.

88. (ITA-SP) Chapas retangulares rígidas, iguais e homogêneas, são sobrepostas e deslocadas entre si, formando um conjunto que se apoia parcialmente na borda de uma calçada. A figura ilustra esse conjunto com **n** chapas, bem como a distância **D** alcançada pela sua parte suspensa. Desenvolva uma fórmula geral da máxima distância **D** possível de modo que o conjunto ainda se mantenha em equilíbrio. A seguir, calcule essa distância **D** em função do comprimento **L** de cada chapa, para n = 6 unidades.

89. (UFMS) Na figura (I) abaixo, tem-se um disco homogêneo, de raio (**R**) e peso (**W**), fixo em um plano xy vertical de eixos ortogonais. A figura (II) mostra que foi retirado, do primeiro disco da figura (I), um disco de diâmetro (**R**) cujo centro está horizontalmente alinhado com o centro do primeiro disco.

É correto afirmar que:

(01) as coordenadas do centro de massa da peça da figura (II) são $\left(\frac{7R}{6}; R\right)$.

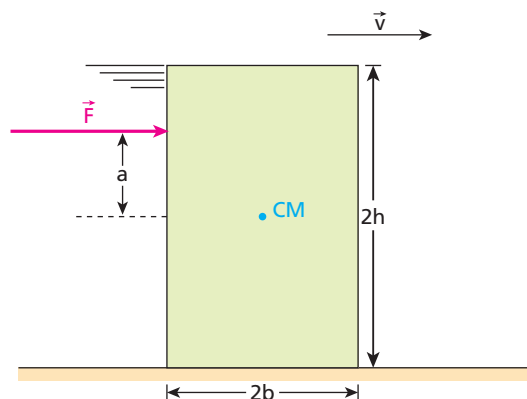
(02) da figura (I) para a figura (II), o centro de massa se deslocou no sentido oposto ao eixo **x** de uma distância $d = \frac{7R}{6}$.

(08) as coordenadas do centro de massa do disco da figura (I) são (R ; R).

(16) o peso da peça da figura (II) é $\frac{W}{2}$.

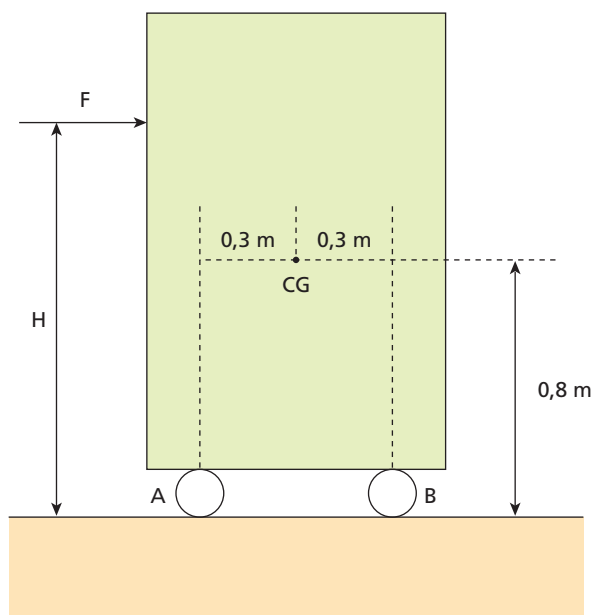
(32) as coordenadas do centro do vazio de diâmetro (**R**) na figura (II) são $\left(\frac{R}{4}; R\right)$.

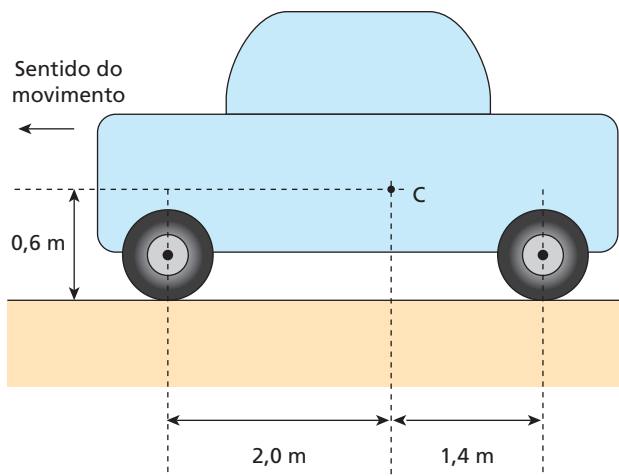
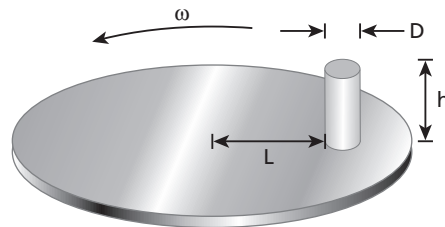
Dê como resposta a soma dos números associados às afirmações corretas.

90. Um paralelepípedo homogêneo de massa **m**, base quadrada de aresta **2b** e altura **2h** encontra-se em movimento retilíneo uniformemente variado, escorregando numa superfície plana e horizontal. Em certo instante, passa a atuar nele uma força constante $\vec{F}$, na mesma direção e no mesmo sentido do movimento. A linha de ação dessa força e o centro de massa (CM) do corpo são coplanares e ela dista **a** de CM. Sendo **μ** o coeficiente de atrito cinético entre o paralelepípedo e a superfície em que se apoia, e **g** a intensidade do campo gravitacional:

a) determine a intensidade de $\vec{F}$ para que o corpo não tombe;

b) determine o máximo valor de **μ** compatível com o não tombamento (F = 0);

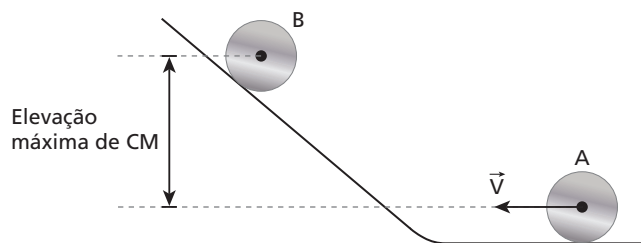
c) supondo satisfeita a condição do item **b**, qual é o valor de **a** que garante o não tombamento, independentemente da intensidade de $\vec{F}$?

91. (Aman-RJ) Um armário de massa 20 kg é colocado sobre pequenas rodas **A** e **B** equidistantes das extremidades. As rodas permitem um movimento livre de atritos sobre o pavimento horizontal. O centro de gravidade (**CG**) do armário situa-se na posição mostrada na figura. Considere 10 m/s² a aceleração devida à gravidade. Se uma força **F** de módulo 150 N for aplicada horizontalmente em um ponto acima do centro de gravidade, podemos afirmar que o armário ficará na iminência de tombar para a frente quando a distância **H** medir:

a) 1,20 m.
b) 1,30 m.
c) 1,45 m.
d) 1,50 m.
e) 1,80 m.

92. (ITA-SP) Considere um automóvel de peso **P**, com tração nas rodas dianteiras, cujo centro de massa está em **C**, movimentando-se num plano horizontal. Considerando g = 10 m/s², calcule a aceleração máxima que o automóvel pode atingir, sendo o coeficiente de atrito entre os pneus e o piso igual a 0,75.

93. (ITA-SP) Um cilindro de diâmetro **D** e altura **h** repousa sobre um disco que gira num plano horizontal, com velocidade angular **ω**. Considere o coeficiente de atrito entre o disco e o cilindro $\mu > \frac{D}{h}$, **L** a distância entre o eixo do disco e o eixo do cilindro, e **g** a aceleração da gravidade. O cilindro pode escapar do movimento circular de duas maneiras: por tombamento ou por deslizamento. Mostrar o que ocorrerá primeiro, em função das variáveis.

94. Um cilindro maciço e homogêneo é abandonado (sem translação nem rotação) do alto de um plano inclinado, como mostra a figura.

Suponha inexistente o atrito e despreze influências do ar. O campo gravitacional tem intensidade igual a **g**.

a) Durante a descida, o cilindro adquire rotação?
b) Determine o módulo V_1 da velocidade de seu centro de massa após esse ponto descer **H**.
c) Se houvesse atrito, ele seria solicitado. Supondo-o do tipo estático, haveria conservação da energia mecânica?
   O módulo V_2 da velocidade do centro de massa do cilindro, após esse ponto descer o mesmo **H** do item **b**, seria maior, menor ou igual a V_1?

95. Um cilindro maciço e homogêneo é lançado em **A**, com velocidade translacional $\vec{V}$, já dotado de rotação anti-horária, percorre uma superfície plana e horizontal e, em seguida, sobe uma rampa até seu centro de massa CM parar em **B**.

Despreze influências do ar e use **g** para a intensidade do campo gravitacional.

a) Supondo inexistente o atrito, determine a elevação máxima (H_1) do centro de massa do cilindro.
b) Se houvesse atrito e fosse solicitado atrito estático, a nova elevação máxima (H_2) do centro de massa do cilindro seria maior, menor ou igual a H_1?

Tópico 2

Estática dos fluidos

Bloco 1

1. Três teoremas fundamentais

A **estática dos fluidos** ou **hidrostática** é a parte da Mecânica que estuda os fluidos em equilíbrio.

Classificamos como **fluidos**, indistintamente, os líquidos e os gases. Em uma primeira abordagem, os líquidos não têm forma própria, embora possuam volume definido. Já os gases, por sua vez, não têm forma nem volume próprios.

Um litro de água, por exemplo, não sofre mudança de volume quando o transferimos de uma panela para uma garrafa. Nesse caso, apenas sua forma é alterada. Já uma determinada massa de gás sempre tende a ocupar todo o volume que lhe é oferecido, propriedade conhecida por expansibilidade. Devemos dizer, ainda, que a forma de certa porção de gás é a do recipiente que a contém.

Por apresentar maior utilidade prática, daremos mais ênfase ao equilíbrio dos líquidos. Nesse estado, as substâncias têm, de modo geral, uma configuração estrutural em que as moléculas se mostram notadamente reunidas. Por causa dessa característica microscópica, os líquidos oferecem grande resistência à compressão. Em nosso curso, a pequena compressibilidade dos líquidos será negligenciada e os consideraremos incompressíveis.

A estática dos fluidos está fundamentada em três teoremas (também chamados de leis). São eles:

- o Teorema de Stevin;
- o Teorema de Pascal;
- o Teorema de Arquimedes.

Certos líquidos não se misturam

Em alguns casos, por falta de afinidade molecular, dois ou mais líquidos podem não se misturar. Eles são chamados **líquidos imiscíveis**. Ainda que agitemos dois desses líquidos dentro de um mesmo recipiente, depois de um certo intervalo de tempo ocorrerá uma separação entre eles, ficando o menos denso em cima e o mais denso embaixo.

Nessa fotografia, podemos observar água e óleo — líquidos imiscíveis — sendo vertidos simultaneamente dentro de um mesmo béquer. Passadas as turbulências iniciais, o óleo, que é o menos denso, vai subir, e a água, que é a mais densa, vai descer, criando-se uma nítida superfície de separação entre os dois fluidos. Situações como a da água e do óleo são estudadas em **Hidrostática**.

CHARLES D. WINTERS/SPL/Latinstock/Latinstock

Água e óleo em um mesmo béquer: esses líquidos se misturam?

TF1-436_485_P3T2.indd 436 16/08/12 17:20

2. Massa específica ou densidade absoluta (μ)

Fixadas a temperatura e a pressão, uma substância pura tem a propriedade fundamental de apresentar massa diretamente proporcional ao respectivo volume.

Sejam $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, ..., $\mathbf{m_n}$ as massas de porções de uma substância pura em uma mesma temperatura e submetida à mesma pressão. Sendo $\mathbf{V_1}$, $\mathbf{V_2}$, ..., $\mathbf{V_n}$ os respectivos volumes, podemos verificar que:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \ldots = \frac{m_n}{V_n} = \mu \text{ (constante)}$$

Por definição, a constante μ é a **massa específica** ou **densidade absoluta** da substância.

Do exposto, concluímos que:

Em pressão e temperatura constantes, uma substância pura tem massa específica (μ) constante e calculada pela divisão da massa considerada (**m**) pelo volume correspondente (**V**):

$$\mu = \frac{m}{V}$$

As unidades de massa específica são obtidas pela divisão da unidade de massa pela unidade de volume:

$$\text{unid}(\mu) = \frac{\text{unid (m)}}{\text{unid (V)}}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a massa é medida em kg e o volume, em m^3. Assim:

$$\text{unid }(\mu) = \frac{kg}{m^3}$$

Outras unidades usuais:

$$\frac{g}{cm^3} = \frac{kg}{L}$$

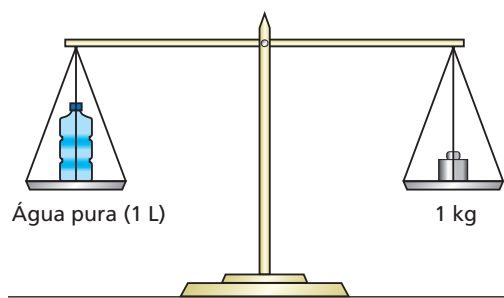
$$1\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}kg}{10^{-3}\ dm^3 \text{ ou } L} \Rightarrow 1\frac{g}{cm^3} = 1\frac{kg}{L}$$

$$1\frac{g}{cm^3} = \frac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} \Rightarrow 1\frac{g}{cm^3} = 1 \cdot 10^3\frac{kg}{m^3}$$

Na tabela a seguir fornecemos os valores usuais das massas específicas de algumas substâncias.

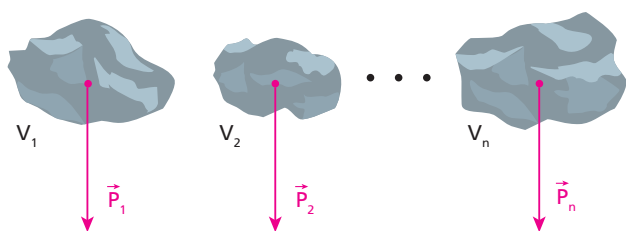
Material	μ (g/cm³)
Alumínio	2,7
Latão	8,6
Cobre	8,9
Ouro	19,3
Gelo	0,92
Ferro	7,8
Chumbo	11,3
Platina	21,4
Prata	10,5
Aço	7,8
Mercúrio	13,6
Álcool etílico	0,81
Benzeno	0,90
Glicerina	1,26
Água	1,00

A água, à qual está subordinada a vida na Terra, é o líquido mais abundante do planeta, cobrindo praticamente $\frac{2}{3}$ da superfície terrestre. Por isso, o estudo da estática dos fluidos dá ênfase especial a essa substância.

É importante observar que, como a densidade absoluta da água é igual a 1 kg/L, existe paridade entre o número que mede a massa dessa substância em quilogramas e o número que mede seu volume de um litro.

Em uma balança de travessão de braços iguais, um litro de água contido em uma garrafa plástica de massa desprezível é equilibrado por um massor de um quilograma.

3. Peso específico (ρ)

Consideremos várias porções de uma dada substância pura nas mesmas condições de temperatura e pressão. Suponhamos, ainda, que todos esses corpos

estejam em um mesmo local, em que a aceleração da gravidade é $\vec{g}$. Sejam $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ..., $\vec{P}_n$ os pesos dos corpos e $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, ..., $\mathbf{V}_n$ seus respectivos volumes.

Podemos verificar que:

$$\frac{|\vec{P}_1|}{V_1} = \frac{|\vec{P}_2|}{V_2} = ... = \frac{|\vec{P}_n|}{V_n} = \rho \text{ (constante)}$$

Por definição, a grandeza escalar constante ρ (lê-se "rô") é o **peso específico** da substância nas condições de pressão e temperatura e no local considerados.

Do exposto, chegamos à seguinte definição:

Sob pressão e temperatura constantes e em um mesmo local, uma substância pura tem peso específico (ρ) constante, calculado pela divisão do módulo do peso da porção considerada (**P**) pelo volume correspondente (**V**):

$$\rho = \frac{P}{V}$$

Da definição, segue que:

$$\rho = \frac{P}{V} = \frac{m\,g}{V} \Rightarrow \rho = \mu\,G$$

As unidades de peso específico são obtidas dividindo-se a unidade de peso (força) pela unidade de volume:

$$\text{unid }(\rho) = \frac{\text{unid}(P)}{\text{unid}(V)}$$

No SI, o peso é expresso em newton (N) e o volume, em m³. Assim:

$$\text{unid}(\rho) = \frac{N}{m^3}$$

4. Densidade de um corpo (d)

Será que um corpo de ferro (μ_{Fe} = 7,8 g/cm³) pode ser menos denso que a água (μ_{H_2O} = 1,0 g/cm³)? A resposta é sim. Para isso, esse corpo deverá ser provido de descontinuidades internas (regiões ocas), de modo que sua massa total seja medida por um número, em gramas, menor que aquele que mede, em cm³, o volume delimitado por sua superfície externa.

Por definição, a densidade de um corpo (**d**) é o quociente de sua massa (**m**) pelo volume delimitado por sua superfície externa ($\mathbf{V_{ext}}$):

$$d = \frac{m}{V_{ext}}$$

Sendo de aço, por que um navio não afunda na água?

Martin Harvey/Corbis/Latinstock

Os navios modernos são metálicos, basicamente construídos em aço. Por ser um material de elevada densidade, o aço afunda rapidamente na água quando considerado em porções maciças. No entanto, os navios flutuam na água porque, sendo dotados de descontinuidades internas (partes ocas), apresentam densidade menor que a desse líquido.

5. Densidade relativa

Por definição, chama-se densidade de uma substância **A** relativa a outra **B** o quociente das respectivas massas específicas das substâncias **A** e **B** quando à mesma temperatura e pressão:

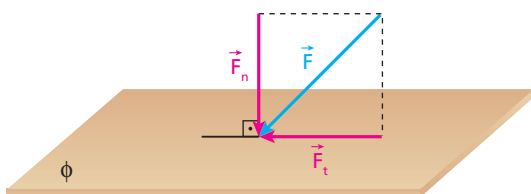
$$d_{AB} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

Se os volumes das substâncias consideradas forem iguais ($V_A = V_B = V$), teremos:

$$d_{AB} = \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{\frac{m_A}{V}}{\frac{m_B}{V}} \Rightarrow d_{AB} = \frac{m_A}{m_B}$$

Observe que a densidade relativa, por ser definida pelo quociente de grandezas medidas nas mesmas unidades, é uma quantidade **adimensional**.

6. O conceito de pressão

Suponha que você esteja comprimindo na palma de uma de suas mãos uma pelota de massa de modelar com movimentos sucessivos de compressão e relaxamento. Cada vez que você aperta a pelota, seus dedos exercem sobre ela certa **pressão**. A pressão é uma importante grandeza física que se destaca sobremaneira no estudo da estática dos fluidos.

Considere a figura acima, em que a superfície ϕ, de área **A**, está sujeita a uma distribuição de forças cuja resultante é $\vec{F}$.

$\vec{F}_t$ é a componente de $\vec{F}$ tangencial a ϕ.

$\vec{F}_n$ é a componente de $\vec{F}$ normal a ϕ.

Por definição, a pressão média (p_m) que $\vec{F}$ exerce na superfície ϕ é obtida dividindo-se o módulo da componente normal de $\vec{F}$ em relação a ϕ ($\vec{F}_n$) pela correspondente área **A**:

$$p_m = \frac{|\vec{F}_n|}{A}$$

Convém destacar que apenas e tão somente a componente normal da força exerce pressão na superfície. A componente tangencial exerce outro efeito, denominado **cisalhamento**.

As unidades de pressão decorrem da própria definição, isto é, são obtidas da divisão da unidade de força pela unidade de área:

$$\text{unid}(p) = \frac{\text{unid}(F)}{\text{unid}(A)}$$

No SI, a força é medida em newton (N) e a área, em m^2. Assim:

$$\text{unid (p)} = \frac{N}{m^2} = \text{pascal (Pa)}$$

Outra unidade usual:

$$\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \text{atmosfera técnica métrica (atm)}$$

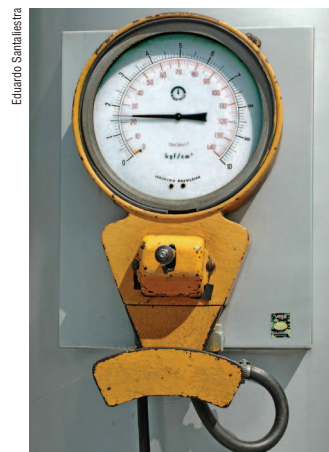
$$1\,\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = \frac{9{,}8\,\text{N}}{10^{-4}\,\text{m}^2} = 9{,}8 \cdot 10^4\,\frac{N}{m^2}$$

Logo:

$$1\ \text{atm} = 9{,}8 \cdot 10^4\,\frac{N}{m^2} \cong 1 \cdot 10^5\ \text{Pa}$$

Uma unidade inglesa de pressão bastante difundida no Brasil é o **psi**.

$$1\ \text{psi} = 1\,\frac{\text{libra-força}}{(\text{polegada})^2} = \frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2}$$

Eduardo Santaliestra

Calibrador de pneus analógico.

Nos calibradores de pneus encontrados em postos de gasolina, a pressão é geralmente expressa em psi.

$$1\ \text{psi} \cong 6{,}9 \cdot 10^3\ \text{Pa}$$

Por causa da atração gravitacional, a atmosfera terrestre pressiona a superfície da Terra. Verifica-se que, ao nível do mar, a pressão atmosférica é praticamente igual a 1 atm ou $1 \cdot 10^5$ Pa.

Representamos na ilustração a seguir a Terra e sua atmosfera. Observe as setas vermelhas. Elas indicam as forças radiais de natureza gravitacional que a atmosfera exerce sobre a superfície do planeta. São essas forças que produzem a pressão atmosférica.

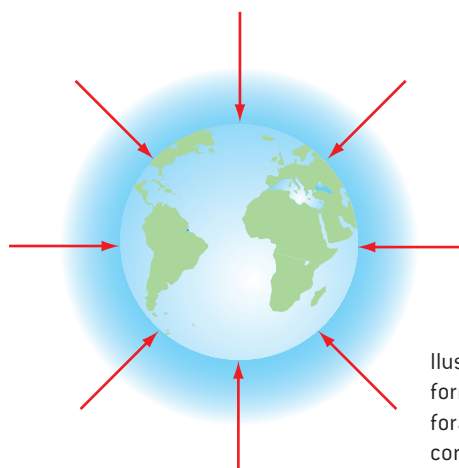



Ilustração com formas e distâncias fora de escala e em cores-fantasia.

Admitindo-se a Terra esférica e com raio igual a 6 400 km, faça uma estimativa da massa da atmosfera. Adote nos cálculos $g = 9,8\ m/s^2$ (valor médio da aceleração da gravidade) e veja que a área **A** de uma superfície esférica de raio **R** é calculada por:

$$A = 4\pi R^2$$

A pressão é uma grandeza que não tem orientação privilegiada. Uma evidência disso é o fato de ela ser a mesma, **em qualquer direção**, em um ponto situado no interior de um fluido em equilíbrio. Por isso, a pressão é uma **grandeza escalar**, ficando plenamente definida pelo valor numérico acompanhado da respectiva unidade de medida.

Para uma mesma força normal, a pressão média exercida sobre uma superfície é inversamente proporcional à área considerada. Isso significa que um prego, por exemplo, comprimido sempre perpendicularmente a uma parede e com a mesma intensidade, poderá exercer pressões diferentes. Tudo dependerá do modo como ele entrar em contato com a superfície, pela ponta ou pela cabeça. No primeiro caso, a força estará distribuída em uma área menor, o que provocará maior pressão.

Buggies atolam na areia?

Value Stock/Glow Images

Em algumas praias do Nordeste é tradicional o passeio de *buggy*. Esse veículo é geralmente equipado com pneus que apresentam banda de rodagem de largura maior que o normal (pneus tala larga). Em razão de uma área maior de contato com o solo, a pressão exercida pelos pneus sobre a areia torna-se menor, dificultando o atolamento.

Exercícios — nível 1

1. Em pressão e temperatura constantes, a massa específica de uma substância pura:

a) é diretamente proporcional à massa considerada;
b) é inversamente proporcional ao volume considerado;
c) é constante somente para pequenas porções da substância;
d) é calculada por meio do quociente da massa considerada pelo respectivo volume;
e) pode ser medida em kgf/m^3.

2. Num local em que a aceleração da gravidade tem intensidade $10\ m/s^2$, 1,0 kg de água ocupa um volume de 1,0 L. Determine:

a) a massa específica da água, em g/cm^3;
b) o peso específico da água, em N/m^3.

3. Nas mesmas condições de pressão e temperatura, as massas específicas da água e da glicerina valem, respectivamente, $1,00\ g/cm^3$ e $1,26\ g/cm^3$. Nesse caso, qual a densidade da glicerina em relação à água?

4. E.R. Um paralelepípedo de dimensões lineares respectivamente iguais a **a**, **b** e **c** ($a > c$) é apoiado sobre uma superfície horizontal, conforme representam as figuras 1 e 2.

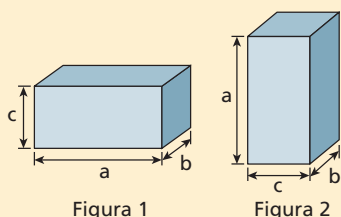



Figura 1 Figura 2

Sendo **M** a massa do paralelepípedo e **g** a intensidade da aceleração da gravidade, determine a pressão exercida por esse corpo sobre a superfície de apoio:

a) no caso da figura 1;
b) no caso da figura 2.

Resolução:

Em ambos os casos, a força normal de compressão exercida pelo paralelepípedo sobre a superfície horizontal de apoio tem intensidade igual à do seu peso.

$$|\vec{F}_n| = |\vec{P}| \Rightarrow |\vec{F}_n| = M\,g$$

a) $$p_1 = \frac{|\vec{F}_n|}{A_1} \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{M\,g}{a\,b}}$$

b) $$p_2 = \frac{|\vec{F}_n|}{A_2} \Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{M\,g}{b\,c}}$$

Nota:
• Como $a\,b > b\,c$, temos $p_1 < p_2$.

5. Uma bailarina de massa 60 kg dança num palco plano e horizontal. Na situação representada na figura 1, a área de contato entre os seus pés e o solo vale $3,0 \cdot 10^2\ cm^2$, enquanto na situação representada na figura 2 essa mesma área vale apenas $15\ cm^2$.

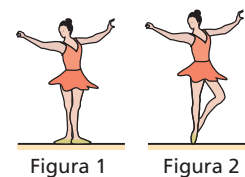



Figura 1 Figura 2

Adotando $g = 10\ m/s^2$, calcule a pressão exercida pelo corpo da bailarina sobre o solo:

a) na situação da figura 1;
b) na situação da figura 2.

Exercícios

nível 2

6. (Fuvest-SP) Os chamados "Buracos negros", de elevada densidade, seriam regiões do Universo capazes de absorver matéria, que passaria a ter a densidade desses Buracos. Se a Terra, com massa da ordem de 10^{27} g, fosse absorvida por um "Buraco negro" de densidade igual a 10^{24} g/cm³, ocuparia um volume comparável ao:

a) de um nêutron.
b) de uma gota d'água.
c) de uma bola de futebol.
d) da Lua.
e) do Sol.

7. E.R. Um volume V_A de um líquido **A** é misturado com um volume V_B de um líquido **B**. Sejam μ_A e μ_B as massas específicas dos líquidos **A** e **B**. Desprezando qualquer contração do volume no sistema e supondo que os líquidos **A** e **B** são miscíveis, determine a massa específica μ da mistura.

Resolução:

$$\mu = \frac{m_{total}}{V_{total}} \Rightarrow \mu = \frac{m_A + m_B}{V_A + V_B} \quad \text{(I)}$$

Em que: $\mu_A = \frac{m_A}{V_A} \Rightarrow m_A = \mu_A V_A$ (II)

$$\mu_B = \frac{m_B}{V_B} \Rightarrow m_B = \mu_B V_B \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$$\boxed{\mu = \frac{\mu_A V_A + \mu_B V_B}{V_A + V_B}}$$

Nota:

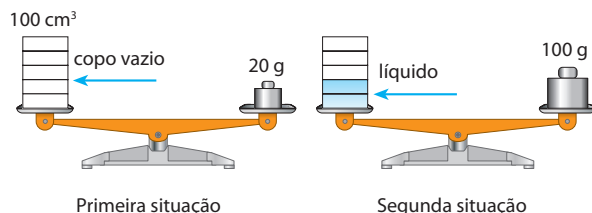
• No caso particular em que $V_A = V_B$, teremos:

$$\boxed{\mu = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}}$$

8. (UEL-PR) As densidades de dois líquidos **A** e **B**, que não reagem quimicamente entre si, são $d_A = 0{,}80$ g/cm³ e $d_B = 1{,}2$ g/cm³, respectivamente. Fazendo-se a adição de volumes iguais dos dois líquidos, obtém-se uma mistura cuja densidade é **x**. Adicionando-se massas iguais de **A** e de **B**, a mistura obtida tem densidade **y**. Os valores de **x** e **y**, em g/cm³, são, respectivamente, mais próximos de:

a) 1,1 e 1,1.
b) 1,0 e 1,1.
c) 1,0 e 0,96.
d) 0,96 e 1,0.
e) 0,96 e 0,96.

9. (UnB-DF)

Primeira situação — Segunda situação

Na figura acima, está esquematizado um processo que pode ser usado para determinar a densidade de um líquido, por meio de uma balança de braços iguais e um béquer graduado. Nas duas situações retratadas, a balança está perfeitamente equilibrada. Nesse contexto, a densidade do líquido é igual a:

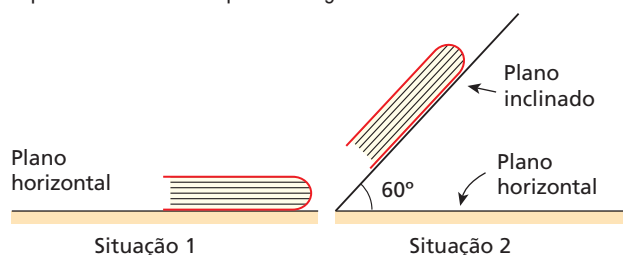
a) 10,0 g/cm³
b) 8,0 g/cm³
c) 4,0 g/cm³
d) 2,0 g/cm³
e) 0,25 g/cm³

10. Um cubo, feito de material rígido e poroso, tem densidade igual a 0,40 g/cm³. Quando mergulhado em água, e após absorver todo o líquido possível, sua densidade passa a ser de 1,2 g/cm³. Sendo **M** a massa do cubo quando seco e **M'** a massa de água que ele absorve, responda: qual é a relação entre **M** e **M'**? (Considere que o volume do cubo não se altera após absorver o líquido.)

11. Com uma faca bem afiada, um açougueiro consegue tirar bifes de uma peça de carne com relativa facilidade. Com essa mesma faca "cega" e com o mesmo esforço, entretanto, a tarefa fica mais difícil. A melhor explicação para o fato é que:

a) a faca afiada exerce sobre a carne uma pressão menor que a exercida pela faca "cega";
b) a faca afiada exerce sobre a carne uma pressão maior que a exercida pela faca "cega";
c) o coeficiente de atrito cinético entre a faca afiada e a carne é menor que o coeficiente de atrito cinético entre a faca "cega" e a carne;
d) a área de contato entre a faca afiada e a carne é maior que a área de contato entre a faca "cega" e a carne;
e) Nenhuma das anteriores explica satisfatoriamente o fato.

12. Dois blocos cúbicos **A** e **B**, extraídos de uma mesma rocha maciça e homogênea, têm arestas respectivamente iguais a **x** e **3x** e estão apoiados sobre um solo plano e horizontal. Sendo p_A e p_B as pressões exercidas por **A** e **B** na superfície de apoio, determine a relação p_A/p_B.

13. Um mesmo livro é mantido em repouso apoiado nos planos representados nos esquemas seguintes:

Sendo p_1 a pressão exercida pelo livro sobre o plano de apoio na situação 1 e p_2 a pressão exercida pelo livro sobre o plano de apoio na situação 2, qual será o valor da relação p_2/p_1?

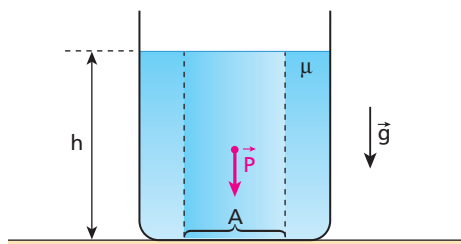
14. Seja uma caixa-d'água de massa igual a $8{,}0 \cdot 10^2$ kg apoiada em um plano horizontal. A caixa, que tem base quadrada de lado igual a 2,0 m, contém água ($\mu_a = 1{,}0$ g/cm³) até a altura de 1,0 m. Considerando $g = 10$ m/s², calcule, em N/m² e em atm, a pressão média exercida pelo sistema no plano de apoio.

15. (Unicamp-SP) Ao se usar um saca-rolhas, a força mínima que deve ser aplicada para que a rolha de uma garrafa comece a sair é igual a 360 N.

a) Sendo $\mu_e = 0{,}2$ o coeficiente de atrito estático entre a rolha e o bocal da garrafa, encontre a força normal que a rolha exerce no bocal da garrafa. Despreze o peso da rolha.
b) Calcule a pressão da rolha sobre o bocal da garrafa. Considere o raio interno do bocal da garrafa igual a 0,75 cm e o comprimento da rolha igual a 4,0 cm. Adote $\pi \cong 3$.

Bloco 2

7. Pressão exercida por uma coluna líquida

Considere a figura a seguir, que representa um reservatório contendo um líquido homogêneo de massa específica μ, em equilíbrio sob a ação da gravidade (de intensidade **g**). Seja **h** a altura do nível do líquido no reservatório. Isolemos, no meio fluido, uma coluna cilíndrica imaginária do próprio líquido, com peso de módulo **P** e área da base **A**.

A referida coluna exerce uma pressão média (**p**) na base do reservatório, que pode ser calculada por:

$$p = \frac{P}{A} \quad \text{(I)},$$

mas $P = m\,g$, e $\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \mu V$

Assim:

$$P = \mu\, V\, g \quad \text{(II)}$$

Como a coluna é cilíndrica, seu volume é dado por:

$$V = A\,h \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II), vem:

$$P = \mu\, A\, h\, g \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (I), obtemos:

$$p = \frac{\mu\, A\, h\, g}{A} \Rightarrow \boxed{p = \mu\, g\, h}$$

Observe que a pressão **p** independe da área **A** e que, com **μ** e **g** constantes, **p** é diretamente proporcional a **h**.

Visando obter um dado importante para a análise de situações hidrostáticas, vamos calcular o acréscimo de pressão Δp registrado por um mergulhador que se aprofunda verticalmente $\Delta h = 10$ m na água de um lago, admitida homogênea e com massa específica $\mu = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Supondo que a aceleração da gravidade local seja $g = 10$ m/s^2, temos:

$$\Delta p = \mu\, g\, \Delta h \Rightarrow \Delta p = 1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10 \text{ (Pa)}$$

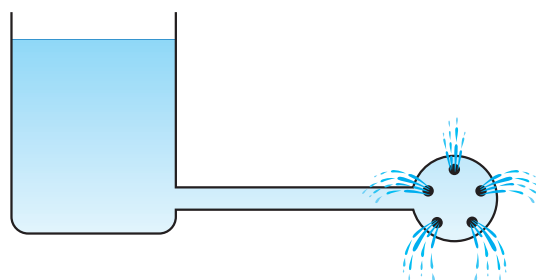
$$\boxed{\Delta p = 1{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 1{,}0 \text{ atm}}$$

Assim, concluímos que, para cada 10 m acrescentados à profundidade do mergulhador na água, há um aumento de $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm na pressão exercida sobre ele.

Juan Carlos Calvin/Grupo Keystone

Um mergulhador aprofunda-se na água agarrado a uma corda. Para cada 10 m percorridos no movimento descendente vertical, acrescenta-se uma pressão de $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm.

8. Forças exercidas nas paredes do recipiente por um líquido em equilíbrio

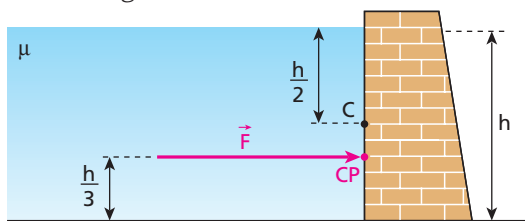
Suponhamos que o recipiente da figura a seguir esteja cheio, por exemplo, de água, em equilíbrio e sob a ação da gravidade. Se no balão localizado à direita fizermos alguns furos, notaremos que a água jorrará através deles, esguichando, de saída, radialmente (perpendicularmente) à superfície do balão.

Ao jorrar pelos orifícios, a água adquire movimento inicial normal à superfície do balão.

Chegamos, então, a uma importante conclusão:

> Um líquido em equilíbrio exerce nas paredes do recipiente que o contém forças perpendiculares a elas, no sentido líquido $\rightarrow$ parede.

Caso as paredes do recipiente sejam planas, pode-se verificar que:

> A intensidade (**F**) da força exercida por um líquido em equilíbrio contra uma parede plana do recipiente que o contém é igual ao produto da pressão no centro geométrico (**C**) da parede banhada pelo líquido (p_C) pela área (**A**) "molhada":
>
> $$F = p_C\,A$$

Considere, por exemplo, a barragem representada na figura abaixo, em que o nível livre da água está a uma altura **h**. Admita que a região "molhada" seja retangular e tenha largura ℓ (não indicada no esquema). Supondo que o módulo da aceleração da gravidade seja **g**, calculemos a intensidade **F** da resultante das forças exercidas pela água (massa específica **μ**) contra a barragem.

Temos que: $F = p_C\,A$ (I),

mas:

$$p_C = \mu\,g\,h_C \;\Rightarrow\; p_C = \mu\,g\,\frac{h}{2} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{e} \qquad A = h\,\ell \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), vem:

$$F = \mu\,g\,\frac{h}{2}\,h\,\ell \;\Rightarrow\; \boxed{F = \frac{1}{2}\,\mu\,g\,\ell\,h^2}$$

A barragem é, para o "recipiente" que contém o líquido em questão, uma parede lateral. Por isso, embora no cálculo de **F** tenhamos utilizado a pressão em **C** (centro geométrico da área "molhada"), a resultante das ações do líquido contra a barragem não se aplica em **C**, e sim em **CP**, ponto denominado **centro de pressões**.

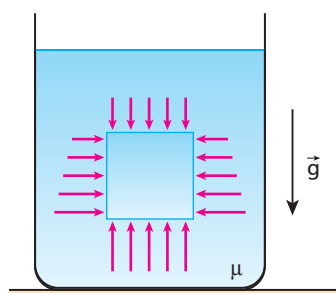
Pode-se demostrar que **CP** situa-se a uma altura $\frac{h}{3}$ em relação à base da barragem.

9. O Teorema de Stevin

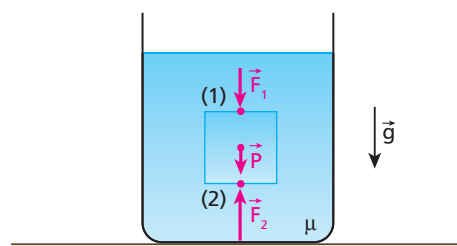
O teorema que enunciaremos a seguir, também conhecido por **Lei Fundamental da Hidrostática**, foi formulado por Simon Stevin:

> A diferença de pressões entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade é calculada pelo produto da massa específica do líquido pelo módulo da aceleração da gravidade no local e pelo desnível (diferença de cotas) entre os pontos considerados:
>
> $$p_2 - p_1 = \mu\,g\,h$$

Demonstração:

Considere o recipiente da figura a seguir, que contém um líquido homogêneo de massa específica **μ**, em equilíbrio sob a ação da gravidade ($\vec{g}$). Admita, para efeito de demonstração do teorema, um cilindro imaginário do próprio líquido, com área da base **A** e altura **h**.

O cilindro tem bases paralelas à superfície do líquido.

Pelo fato de estar envolvido pelo líquido, o cilindro recebe dele os conjuntos de forças indicados.

Em razão da simetria, as forças laterais ao cilindro (horizontais) equilibram-se duas a duas. As forças aplicadas segundo a vertical, no entanto, não se equilibram. Por isso, temos uma resultante $\vec{F}_1$ aplicada no ponto 1, na base superior do cilindro, e uma resultante $\vec{F}_2$ aplicada no ponto 2, na base inferior do cilindro.

Observe que, além de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_2$ também atua no cilindro a força da gravidade $\vec{P}$.

Como o líquido está em equilíbrio, o cilindro, que faz parte dele, também deve estar. Para que isso ocorra, devemos ter:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = \vec{0}$$

Ou, em módulo:

$$F_2 - F_1 = P$$

Dividindo todos os termos da igualdade anterior por **A** (área das bases do cilindro), obtemos:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \frac{P}{A},$$

mas:

$$\frac{F_2}{A} = p_2 \text{ (pressão no ponto } \mathbf{2}\text{)}$$

$$\frac{F_1}{A} = p_1 \text{ (pressão no ponto } \mathbf{1}\text{)}$$

Assim:

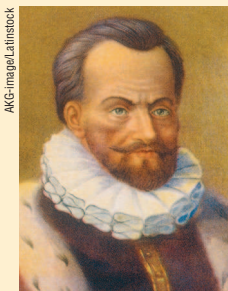
$$p_2 - p_1 = \frac{P}{A} \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{m\,g}{A}$$

A massa **m** pode ser expressa fazendo-se:

$$m = \mu\,V = \mu\,A\,h$$

Substituindo, vem:

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu\,A\,h\,g}{A} \Rightarrow \boxed{p_2 - p_1 = \mu\,h\,g}$$

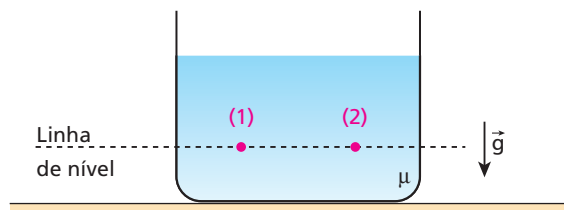
Uma mente inventiva

Simon Stevin (1548-1620) nasceu em Bruges, nos Países Baixos (hoje, Bélgica), e notabilizou-se como engenheiro militar. Estudou os números fracionários e a queda livre de corpos com diferentes massas, constatando a igualdade de suas acelerações, e propôs alguns inventos, como a carroça movida a vela. Uma de suas funções era inspecionar as condições de segurança dos diques holandeses, o que o levou a importantes conclusões sobre hidrostática. Pintura de autor desconhecido, 1590. Paris coleção particular.

10. Consequências do Teorema de Stevin

1ª Consequência

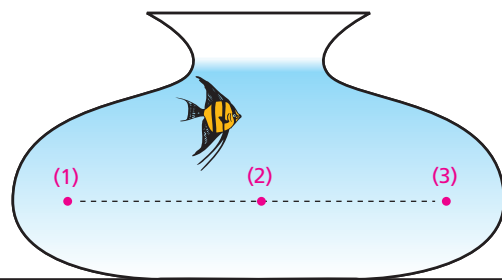
Todos os pontos de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade, situados em um mesmo nível horizontal, suportam a **mesma pressão**, constituindo uma **região isobárica**.

Verificação:

Consideremos a figura abaixo, na qual os pontos **1** e **2** pertencem a um mesmo nível (mesma horizontal). O líquido considerado é homogêneo e encontra-se em equilíbrio.

Aplicando o **Teorema de Stevin** aos pontos **1** e **2**, temos:

$$p_2 - p_1 = \mu\,g\,h$$

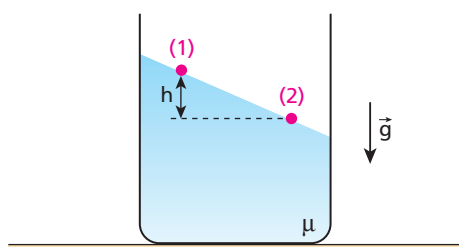
Entretanto, se os pontos estão no mesmo nível, o desnível entre eles (**h**) é nulo, levando-nos a escrever:

$$p_2 - p_1 = 0 \Rightarrow \boxed{p_2 = p_1}$$

No aquário esquematizado acima, o peixe se submeterá à mesma pressão, nos pontos **1**, **2** e **3**, situados no mesmo nível horizontal, não importando o fato de os pontos **1** e **3** situarem-se abaixo das paredes laterais do recipiente e de o ponto **2** situar-se sob a superfície livre da água.

2ª Consequência

> Desprezando fenômenos relativos à tensão superficial, a superfície livre de um líquido em equilíbrio sob a ação da gravidade é plana e horizontal.

Verificação:

Suponhamos que no recipiente da figura abaixo exista um líquido em equilíbrio, sob a ação da gravidade. Sejam **1** e **2** pontos da superfície livre do líquido, desnivelados de uma altura **h**.

Aplicando a esses pontos o **Teorema de Stevin**, obtemos:

$$p_2 - p_1 = \mu \, g \, h$$

Como os pontos **1** e **2** estão expostos diretamente ao ar, a pressão que se exerce sobre ambos é a pressão atmosférica ($\mathbf{p_0}$). Então, temos:

$$p_2 = p_1 = p_0$$

Assim:

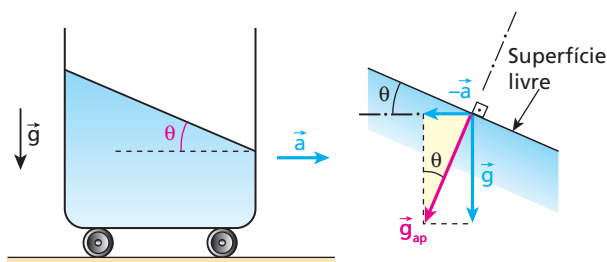
$$p_0 - p_0 = \mu \, g \, h \;\Rightarrow\; \mu \, h \, g = 0$$

Como o produto $\mu \, g \, h$ é nulo e sendo $\mu \neq 0$ e $g \neq 0$, concluímos que:

$$h = 0$$

Do exposto, observamos que os pontos **1** e **2** não podem estar desnivelados, sendo, portanto, absurda a figura proposta.

Se o recipiente estiver em movimento acelerado, com aceleração horizontal constante $\vec{a}$, a superfície livre do líquido ficará inclinada de um ângulo θ, conforme representa a figura a seguir. Podemos obter o valor de θ, como está demonstrado na sequência, fazendo $tg\,\theta = a/g$, em que **g** é o módulo da aceleração da gravidade. Isso ocorre porque, em razão da inércia, se estabelece no interior do recipiente uma **gravidade aparente** ($\vec{g}_{ap}$) perpendicular à superfície livre do líquido, dada pela soma vetorial $\vec{g}_{ap} = -\vec{a} + \vec{g}$.

No triângulo retângulo destacado, temos:

$$tg\,\theta = \frac{a}{g}$$

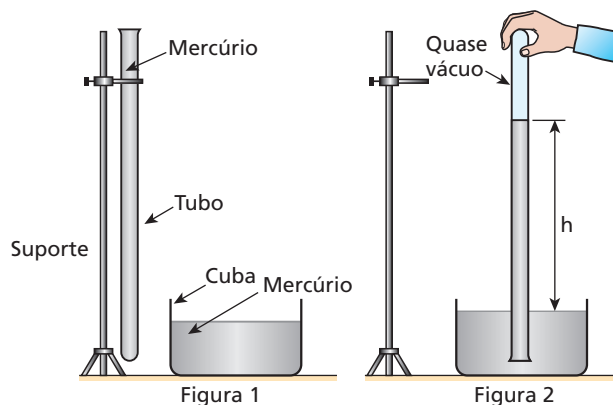
Observe que, aumentando o valor de *a*, aumenta-se também a $tg\,\theta$ e, consequentemente, o ângulo θ de inclinação da superfície livre do líquido em relação à horizontal.

11. A pressão atmosférica e o experimento de Torricelli

A **pressão atmosférica** influi de maneira decisiva em muitas situações. Um litro de água, por exemplo, pode ferver em maior ou em menor temperatura, dependendo da pressão atmosférica do local. A cidade de São Paulo, por estar a 731 m acima do nível do mar, suporta pressão atmosférica menor que Santos, no litoral. Por esse motivo, em São Paulo a água ferve a 98 °C, aproximadamente, enquanto em Santos ferve a 100 °C.

O cientista italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647), aluno de Galileu, propôs um critério bastante simples para a obtenção experimental do valor da pressão atmosférica. O aparato e o método utilizados por ele estão descritos a seguir.

Considere uma cuba e um tubo, de aproximadamente 1,0 m de comprimento, ambos contendo mercúrio (figura 1).

Figura 1 Figura 2

A princípio, o tubo encontra-se completamente tomado pelo fluido (mercúrio), até sua extremidade aberta.

Veda-se, então, a abertura do tubo e, posicionando-o de boca para baixo, introduz-se parte dele no mercúrio da cuba. Em seguida, destapa-se sua extremidade, tomando-se o cuidado de mantê-la sempre voltada para baixo (figura 2). Com isso, parte do mercúrio do tubo escoa para a cuba, até que seja estabelecido o equilíbrio fluidostático do sistema.

Vamos chamar de μ_{Hg} a massa específica do mercúrio, **g** o módulo da aceleração da gravidade, $\mathbf{p_0}$ a pressão atmosférica local e **h** a altura do nível do mercúrio no tubo em relação à superfície livre do mercúrio na cuba (figura 2).

Na figura 3, sejam $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$, respectivamente, as pressões nos pontos **1** e **2**.

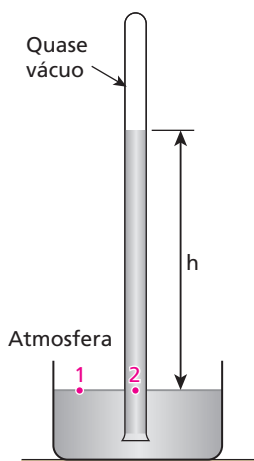



Figura 3 – Sistema em equilíbrio

Pelo fato de o ponto **1** pertencer ao nível livre do mercúrio na cuba e estar exposto diretamente à atmosfera, tem-se:

$$p_1 = p_0$$

No ponto **2**, a pressão se deve praticamente à coluna de mercúrio que aí se sobrepõe, pois acima do mercúrio do tubo temos quase o vácuo (apenas vapor de mercúrio muito rarefeito). Desse modo:

$$p_2 = \mu_{Hg}\, g\, h$$

Entretanto, no equilíbrio, as pressões nos pontos **1** e **2** são iguais, pois os referidos pontos pertencem ao mesmo fluido (mercúrio) e estão no mesmo nível (mesma região isobárica).

Assim, $p_1 = p_2$, ou seja:

$$p_0 = \mu_{Hg}\, g\, h$$

Fazendo o experimento de Torricelli ao nível do mar ($g \cong 9{,}81\ m/s^2$) e a 0 °C, obtém-se para **h** um valor muito próximo de 76,0 cm. Assim, com $\mu_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3\ kg/m^3$, calcula-se o valor de $\mathbf{p_0}$ no local:

$$p_0 = 13{,}6 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}760\ m$$

$$p_0 \cong 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{N}{m^2}$$

Na prática, para se evitar o incômodo da multiplicação $\mu_{Hg}\ g\ h$, é comum expressar-se a pressão atmosférica diretamente em cm ou mm de mercúrio. Dessa forma, ao nível do mar e a 0 °C, diz-se que a pressão atmosférica tem um valor próximo de 76,0 cmHg ou 760 mmHg.

Leitura

A sucção impossível

Não há nada melhor para os momentos de calor e sede que tomar uma bebida bem gelada!

Nessas ocasiões, é comum utilizarmos canudinhos, que permitem a ingestão do líquido de maneira confortável e gradual.

Os canudinhos encontrados no comércio têm comprimento próximo de 25 cm, sendo adequados para canalizar líquidos aquosos — de massa específica em torno de $1{,}0\ g/cm^3$ — de copos ou garrafas até a boca das pessoas.

Todavia, qual seria o comprimento máximo de um canudinho que, colocado na vertical, teoricamente permitiria a alguém sugar um líquido aquoso até o nível de sua boca?

Para responder a essa questão, considere o esquema a seguir, em que um garoto se utiliza de um longo canudinho, de comprimento maior que 10 m, com a pretensão de sorver o refrigerante contido em um recipiente aberto ao ar.

À medida que ele for aspirando o ar contido no canudinho, o refrigerante irá subindo ao longo do duto, empurrado pelas forças devidas à pressão atmosférica.

A subida do refrigerante, entretanto, cessará quando o garoto tiver retirado todo o ar do canudinho (supondo que isso seja possível), provocando praticamente o vácuo entre sua boca e a superfície livre do líquido já elevado.

Chamemos de $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ as pressões totais nos pontos **1** e **2** indicados na figura. Essas pressões ficam determinadas por:

$p_1 = \mu g h$ e $p_2 = p_0$ em que μ é a massa específica do refrigerante (1,0 g/cm^3);

g é a intensidade da aceleração da gravidade (10 m/s^2); e

$\mathbf{p_0}$ é a pressão atmosférica local ($1{,}0 \cdot 10^5$ Pa).

Como os pontos **1** e **2** pertencem ao mesmo nível horizontal (mesma região isobárica), suportam pressões iguais.

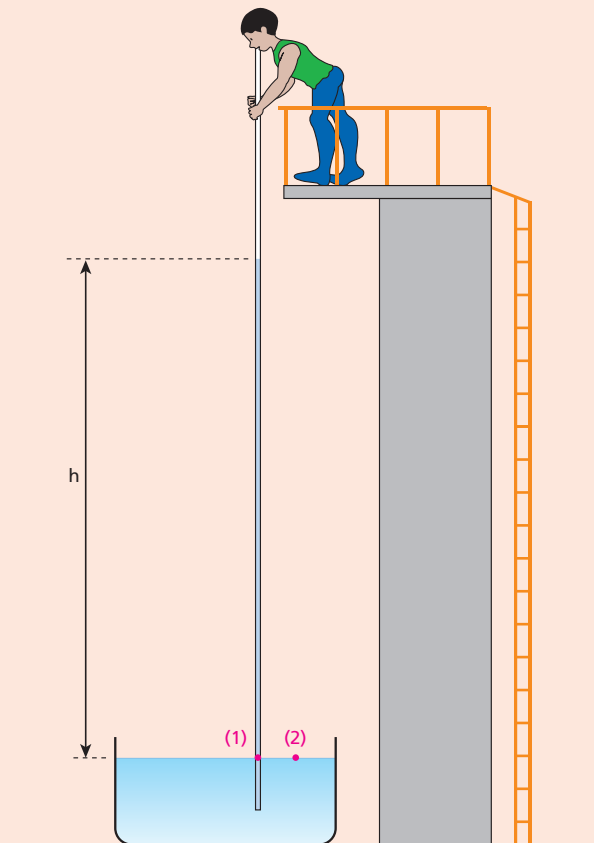
Assim: $p_1 = p_2 \Rightarrow \mu g h = p_0$

Substituindo os dados numéricos apresentados, calculemos a altura máxima **h** procurada:

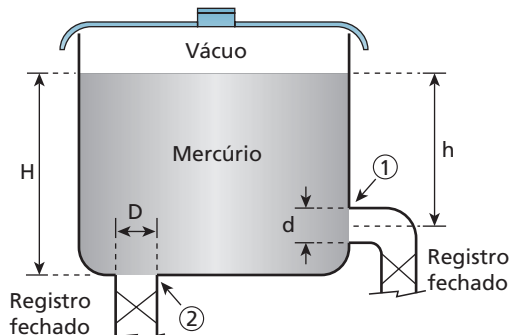
$$1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot h = 1{,}0 \cdot 10^5 \Rightarrow \boxed{h = 10 \text{ m}}$$

Concluímos, então, que o garoto conseguiria elevar o refrigerante, no máximo, até uma altura de 10 m a contar da superfície livre do líquido no recipiente.

Bombas hidráulicas que eventualmente recalcam água de poços com profundidades maiores que 10 m não desempenham essa tarefa por simples sucção, já que isso seria impossível, como acabamos de demonstrar. Para isso há um compressor que aumenta a pressão do ar sobre a água a ser elevada, favorecendo a operação.

Nota: Em situações reais, uma pessoa, por melhor que fosse sua capacidade de sucção, jamais conseguiria elevar, por meio de um canudinho, líquidos aquosos a alturas próximas de 10 m.

Exercícios

nível 1

16. (Ufop-MG) Considere o reservatório hermeticamente fechado esquematizado na figura:

No equilíbrio hidrostático, determine a relação entre as pressões **p** e **P**, respectivamente, na entrada dos tubos ① (diâmetro **d**) e ② (diâmetro **D**):

a) $\frac{p}{P} = \frac{d}{D}$

b) $\frac{p}{P} = \frac{D}{d}$

c) $\frac{p}{P} = \frac{h}{H}$

d) $\frac{p}{P} = \frac{H}{h}$

e) $\frac{p}{P} = \frac{d\,h}{D\,H}$

17. (Unesp-SP) Um vaso de flores, cuja forma está representada na figura, está cheio de água. Três posições, **A**, **B** e **C**, estão indicadas na figura.

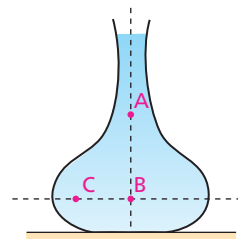
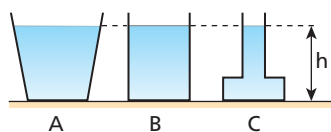
A relação entre as pressões p_A, p_B e p_C, exercidas pela água respectivamente nos pontos **A**, **B** e **C**, pode ser descrita como:

a) $p_A > p_B > p_C$

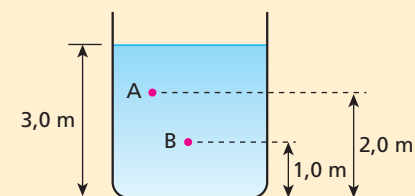
b) $p_A > p_B = p_C$

c) $p_A = p_B > p_C$

d) $p_A = p_B < p_C$

e) $p_A < p_B = p_C$

18. Considere os recipientes **A**, **B** e **C** da figura, cujas áreas das paredes do fundo são iguais. Os recipientes contêm o mesmo líquido homogêneo em equilíbrio, e em todos eles o nível livre do líquido atinge a altura **h**.

Sejam p_A, p_B e p_C e F_A, F_B e F_C, respectivamente, as pressões e as intensidades das forças exercidas pelo líquido nas paredes do fundo dos recipientes **A**, **B** e **C**. Compare:

a) p_A, p_B e p_C b) F_A, F_B e F_C.

19. E.R. O tanque representado na figura seguinte contém água ($\mu = 1,0$ g/cm^3) em equilíbrio sob a ação da gravidade ($g = 10$ m/s^2):

Determine, em unidades do Sistema Internacional:

a) a diferença de pressão entre os pontos **B** e **A** indicados;

b) a intensidade da força resultante devido à água na parede do fundo do tanque, cuja área vale 2,0 m^2.

Resolução:

a) A diferença de pressão entre os pontos **B** e **A** pode ser calculada pelo **Teorema de Stevin**: $p_B - p_A = \mu\, g\, h$

Fazendo $p_B - p_A = \Delta p$, vem: $\Delta p = \mu\, g\, h$

Sendo $\mu = 1,0$ g/cm^3 $= 1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3, $g = 10$ m/s^2 e $h = 2,0$ m $- 1,0$ m $= 1,0$ m, calculemos Δp:

$$\Delta p = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1,0 \text{ (N/m}^2)$$

$$\boxed{\Delta p = 1,0 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2}$$

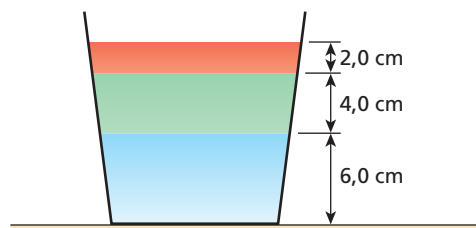
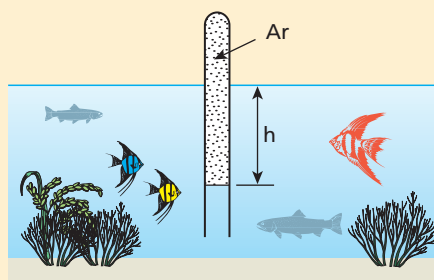
b) A intensidade **F** da força resultante que a água exerce na parede do fundo do tanque é dada por:

$$F = p_{fundo}\, A = \mu\, g\, H\, A$$

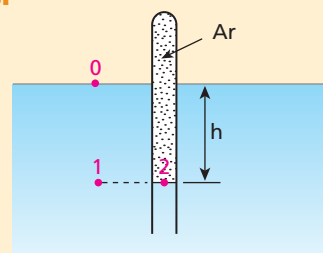
Sendo $H = 3,0$ m e $A = 2,0$ m^2, vem:

$$F = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 3,0 \cdot 2,0 \text{ (N)}$$

$$\boxed{F = 6,0 \cdot 10^4 \text{ N}}$$

20. (PUC-RJ) Em um vaso em forma de cone truncado, são colocados três líquidos imiscíveis. O menos denso ocupa um volume cuja altura vale 2,0 cm; o de densidade intermediária ocupa um volume de altura igual a 4,0 cm, e o mais denso ocupa um volume de altura igual a 6,0 cm. Supondo que as densidades dos líquidos sejam 1,5 g/cm^3, 2,0 g/cm^3 e 4,0 g/cm^3, respectivamente, responda: qual é a força extra exercida sobre o fundo do vaso devido à presença dos líquidos? A área da superfície inferior do vaso é 20 cm^2 e a área da superfície livre do líquido que está na primeira camada superior vale 40 cm^2. A aceleração gravitacional local é 10 m/s^2.

21. E.R. Um longo tubo de vidro, fechado em sua extremidade superior, é cuidadosamente mergulhado nas águas de um lago ($\mu_{água} = 1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3) com seu eixo longitudinal coincidente com a direção vertical, conforme representa a figura.

No local, a pressão atmosférica vale $p_0 = 1,0$ atm e adota-se $g = 10$ m/s^2.

Se o nível da água no interior do tubo sobe até uma profundidade $h = 5,0$ m, medida em relação à superfície livre do lago, qual é a pressão do ar contido no interior do tubo?

Resolução:

Aplicando o **Teorema de Stevin** aos pontos 0 e 1, temos:

$$p_1 - p_0 = \mu_{água}\, g\, h \;\Rightarrow\; p_1 = \mu_{água}\, g\, h + p_0$$

Concluímos, então, que a pressão total no ponto 1 é constituída por duas parcelas:

$\mu_{água}\, g\, h$, que é a pressão efetiva exercida pela água, e p_0, que é a pressão atmosférica.

É importante notar que a pressão atmosférica manifesta-se não apenas na superfície livre da água, mas também em todos os pontos do seu interior, como será demonstrado no item 13.

No ponto 2, temos: $p_2 = p_{ar}$

Como os pontos 1 e 2 pertencem à água e estão situados no mesmo nível horizontal (mesma região isobárica), suportam pressões iguais. Assim:

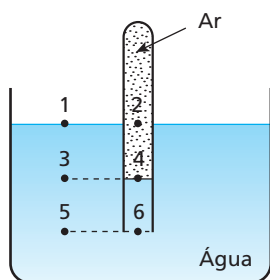
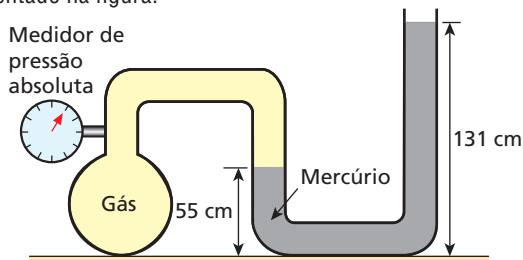
$$p_2 = p_1 \;\Rightarrow\; p_{ar} = \mu_{água}\, g\, h + p_0$$

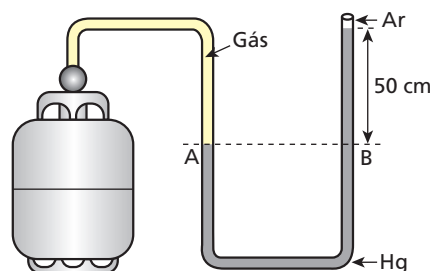
Sendo $\mu_{água} = 1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3, $g = 10$ m/s^2, $h = 5,0$ m e $p_0 = 1,0$ atm $\cong 1,0 \cdot 10^5$ Pa, calculemos p_{ar}:

$$p_{ar} = (1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 5,0 + 1,0 \cdot 10^5) \text{ Pa}$$

$$\boxed{p_{ar} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 1,5 \text{ atm}}$$

22. (Unesp-SP) Emborca-se um tubo de ensaio em uma vasilha com água, conforme a figura. Com respeito à pressão nos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, qual das opções abaixo é válida?

a) $p_1 = p_4$
b) $p_1 = p_2$
c) $p_5 = p_4$
d) $p_3 = p_2$
e) $p_3 = p_6$

23. A medição da pressão atmosférica reinante no interior de um laboratório de Física foi realizada utilizando-se o dispositivo representado na figura:

Sabendo que a pressão exercida pelo gás, lida no medidor, é de 136 cm Hg, determine o valor da pressão atmosférica no local.

24. (Faap-SP) Manômetro é um instrumento utilizado para medir pressões. A figura a seguir ilustra um tipo de manômetro, que consiste em um tubo em forma de **U**, contendo mercúrio (Hg), que está sendo utilizado para medir a pressão do gás dentro do botijão.

Se a pressão atmosférica local é igual a 72 cm Hg, qual é a pressão exercida pelo gás?

Exercícios nível 2

25. (UFRJ) A figura ao lado ilustra dois recipientes de formas diferentes, mas de volumes iguais, abertos e apoiados em uma mesa horizontal. Os dois recipientes têm a mesma altura **h** e estão cheios, até a borda, com água.

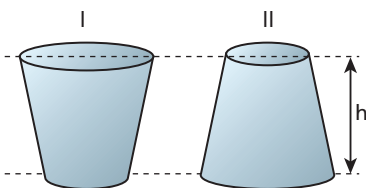
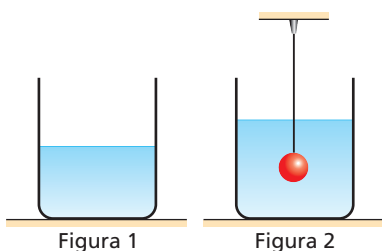
Calcule a razão $|\vec{f}_1|/|\vec{f}_2|$ entre os módulos das forças exercidas pela água sobre o fundo do recipiente I ($\vec{f}_1$) e sobre o fundo do recipiente II ($\vec{f}_2$), sabendo que as áreas das bases dos recipientes I e II valem, respectivamente, **A** e **4A**.

26. (UFRJ) Um recipiente cilíndrico contém água em equilíbrio hidrostático (figura 1). Introduz-se na água uma esfera metálica maciça de volume igual a $5{,}0 \cdot 10^{-5}$ m³, suspensa, por um fio ideal de volume desprezível, de um suporte externo. A esfera fica totalmente submersa na água sem tocar as paredes do recipiente (figura 2).

Figura 1 Figura 2

Restabelecido o equilíbrio hidrostático, verifica-se que a introdução da esfera na água provocou um acréscimo de pressão Δp no fundo do recipiente. A densidade da água é igual a $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³ e a área da base do recipiente é igual a $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ m². Considere $g = 10$ m/s². Calcule o acréscimo de pressão Δp.

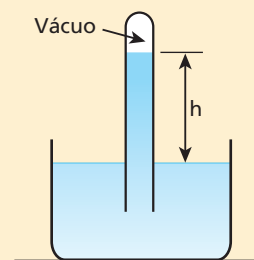
27. (Unesp-SP) O esfigmomanômetro de Riva-Rocci foi um dos primeiros aparelhos desenvolvidos para se medir a pressão arterial. Atualmente, em razão do mercúrio presente nesses aparelhos, eles vêm sendo substituídos por esfigmomanômetros eletrônicos, sem mercúrio, para reduzir impactos ambientais.

Para uma pessoa saudável, a pressão arterial máxima equilibra a coluna de mercúrio a uma altura máxima de 120 mm e a pressão arterial mínima equilibra a coluna de mercúrio a uma altura mínima de 80 mm. Se o esfigmomanômetro de Riva-Rocci utilizasse água ao invés de mercúrio, quais seriam as alturas máxima e mínima, em milímetros, da coluna de água que seria equilibrada pelos valores máximos e mínimos da pressão arterial de uma pessoa saudável? Considere que a densidade do mercúrio é 13 vezes a da água.

a) $H_{mín} = 1\,040$ mm ; $H_{máx} = 1\,560$ mm
b) $H_{mín} = 80$ mm ; $H_{máx} = 120$ mm
c) $H_{mín} = 6{,}2$ mm ; $H_{máx} = 9{,}2$ mm
d) $H_{mín} = 1\,040$ mm ; $H_{máx} = 2\,080$ mm
e) $H_{mín} = 860$ mm ; $H_{máx} = 1\,560$ mm

28. E.R. Se o experimento de Torricelli para a determinação da pressão atmosférica (p_0) fosse realizado com água ($\mu_{H_2O} = 1{,}0$ g/cm³) no lugar de mercúrio, que altura da coluna de água no tubo (em relação ao nível livre da água na cuba) faria o equilíbrio hidrostático ser estabelecido no barômetro? Desprezar a pressão exercida pelo vapor d'água e adotar, nos cálculos, $g = 10$ m/s². A pressão atmosférica local vale $p_0 = 1{,}0$ atm.

Resolução:

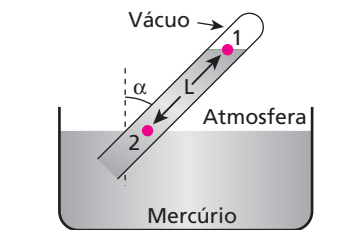
Na figura ao lado, está representado o barômetro de Torricelli. Tendo em conta o equilíbrio hidrostático do sistema, podemos afirmar que a pressão exercida pela coluna de água de altura **h** em sua base (p_{H_2O}) é igual à pressão atmosférica (p_0).

$$p_{H_2O} = p_0 \Rightarrow \mu_{H_2O}\, g\, h = p_0$$

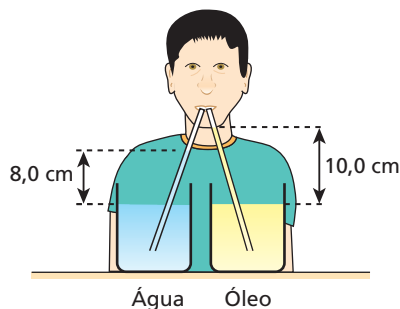
Em que:

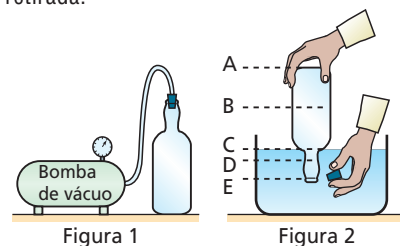
$$h = \frac{p_0}{\mu_{H_2O}\, g}$$

Sendo $p_0 = 1{,}0$ atm $\cong 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, $\mu_{H_2O} = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³ e $g = 10$ m/s², calculemos a altura **h**:

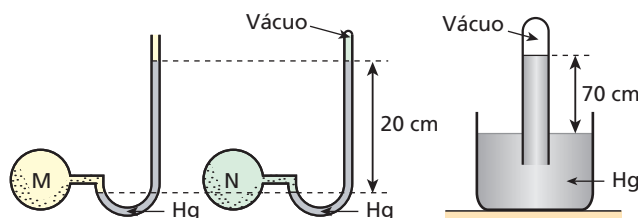
$$h = \frac{1{,}0 \cdot 10^5}{1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 10} \text{ (m)} \Rightarrow \boxed{h = 10 \text{ m}}$$

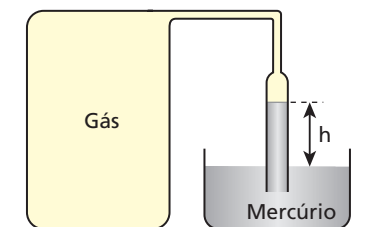
29. Numa região ao nível do mar, a pressão atmosférica vale $1{,}01 \cdot 10^5$ N/m² e $g = 9{,}81$ m/s². Repete-se o experimento de Torricelli, dispondo-se o tubo do barômetro conforme representa a figura.

A distância **L** entre os pontos 1 e 2 vale 151 cm e a massa específica do mercúrio é $\mu = 13{,}6$ g/cm³. Estando o sistema em equilíbrio, calcule o valor aproximado do ângulo α que o tubo forma com a direção vertical.

30. (Cesgranrio-RJ) Um rapaz aspira ao mesmo tempo água e óleo, por meio de dois canudos de refrigerante, como mostra a figura. Ele consegue equilibrar os líquidos nos canudos com uma altura de 8,0 cm de água e de 10,0 cm de óleo.

Qual a relação entre as massas específicas do óleo e da água?

31. Considere o experimento descrito a seguir:
Figura 1: Uma garrafa de vidro de altura igual a 40 cm é conectada a uma bomba de vácuo, que suga todo o ar do seu interior. Uma rolha de borracha obtura o gargalo, impedindo a entrada de ar.
Figura 2: A garrafa é emborcada em um recipiente contendo água e a rolha é retirada.

Dados: pressão atmosférica = 1,0 atm; densidade absoluta da água = 1,0 g/cm³; intensidade da aceleração da gravidade = 10 m/s²
Qual o nível da água na garrafa, depois de estabelecido o equilíbrio hidrostático?

a) A b) B c) C d) D e) E

32. Os três aparelhos abaixo estão situados no interior da mesma sala:

Fundamentado nas indicações das figuras, determine as pressões exercidas pelos gases contidos em **M** e **N**.

33. O sistema da figura encontra-se em equilíbrio sob a ação da gravidade, cuja intensidade vale 10 m/s²:

Dados: pressão atmosférica $p_0 = 1{,}0$ atm; massa específica do mercúrio $\mu = 13{,}6$ g/cm³; $h = 50$ cm.
Considerando $1{,}0$ atm $= 1{,}0 \cdot 10^5$ N/m², calcule, em atm, a pressão do gás contido no reservatório.

Bloco 3

12. O Teorema de Pascal

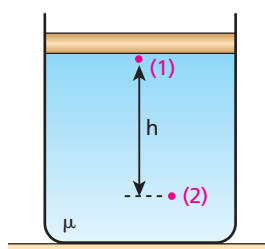
A Blaise Pascal devemos o teorema enunciado a seguir, que encontra várias aplicações práticas.

> Um incremento de pressão comunicado a um ponto qualquer de um líquido incompressível em equilíbrio **transmite-se integralmente** a todos os demais pontos do líquido, bem como às paredes do recipiente.

Demonstração:

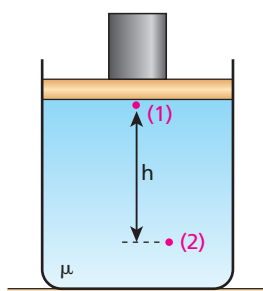
Consideremos o cilindro da figura a seguir, que contém um líquido homogêneo, incompressível e em equilíbrio sob a ação da gravidade. O líquido encontra-se aprisionado por um êmbolo livre, de peso **P**. Consideremos dois pontos no líquido: o ponto **1**, situado imediatamente sob o êmbolo, e o ponto **2**, situado a uma profundidade **h** em relação a **1**.

Aplicando o **Teorema de Stevin** aos pontos **1** e **2**, temos: $p_2 - p_1 = \mu\, g\, h$

Então: $p_2 = p_1 + \mu\, g\, h$ (I)

Se um corpo for depositado sobre o êmbolo, a pressão no ponto **1** será incrementada de Δp.

Tendo em vista esse incremento de pressão Δp, a nova pressão no ponto **1** ($\mathbf{p'_1}$) será dada por:

$$p'_1 = p_1 + \Delta p$$

Com base na expressão indicada por (I), podemos constatar que a variação de $\mathbf{p_1}$ acarreta também uma variação em $\mathbf{p_2}$, já que a parcela $\mu\, g\, h$ não se altera (h = constante, pois o líquido é incompressível). Calculemos, então, a nova pressão ($\mathbf{p'_2}$) exercida no ponto **2**:

$$p'_2 = p'_1 + \mu\, g\, h$$

$$p'_2 = p_1 + \Delta p + \mu\, g\, h \Rightarrow p'_2 = p_1 + \mu\, g\, h + \Delta p$$

Lembrando que $p_2 = p_1 + \mu\, g\, h$, concluímos que:

$$p'_2 = p_2 + \Delta p$$

Esse último resultado permite-nos verificar que o incremento de pressão Δp, dado ao ponto **1**, se transmitiu, manifestando-se também no ponto **2**.

Vejamos a seguir exemplos de mecanismos que se baseiam no Teorema de Pascal.

Cristina Xavier

Elevador hidráulico de automóveis (prensa hidráulica).

Ron Brown/Grupo Keystone

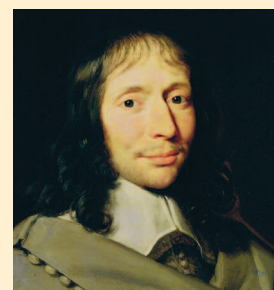
Mecanismo hidráulico de abaixamento e recolhimento de trem de pouso de aviões.

BSIP/Grupo Keystone

Multiplicadores hidráulicos de forças em retroescavadeiras.

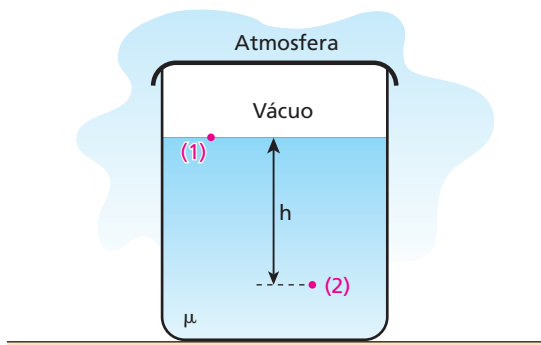
O coração tem razões...

The Bridgeman Art Library/Getty Images

Blaise Pascal (1623-1662), cujo retrato, de uma coleção particular, foi pintado por Philippe de Champoigne no século XVII, nasceu em Clermont-Ferrand, França, tendo manifestado, ainda criança, grande habilidade em Matemática. Estudou Geometria, Probabilidade e Física, chegando a importantes descobertas. Aos 19 anos, depois de dois anos de trabalho intenso, terminou a construção de uma revolucionária calculadora mecânica que permitia a realização de operações aritméticas sem que o usuário precisasse saber os respectivos algoritmos. Buscando outros conhecimentos, embrenhou-se na Filosofia e na Teologia, tendo legado uma frase memorável, em que deixou clara sua insatisfação com as coisas meramente racionais: “O coração tem razões que a própria razão desconhece”.

13. Consequência do Teorema de Pascal

Todos os pontos de um líquido em equilíbrio exposto à atmosfera ficam submetidos à pressão atmosférica.

Verificação:

No esquema a seguir temos um líquido em equilíbrio dentro de um recipiente fechado por uma tampa.

Admitamos, por hipótese, que entre a base da tampa e a superfície livre do líquido haja vácuo. Sejam os pontos **1** e **2** pertencentes ao líquido, tal que **1** se encontre na superfície livre e **2** a uma profundidade **h**.

Nas condições descritas, a pressão no ponto **1** é nula, pois a esse ponto sobrepõe-se o vácuo. Assim:

$$p_1 = 0$$

No ponto **2**, a pressão deve-se exclusivamente à camada líquida de altura **h**. Então:

$$p_2 = \mu\, g\, h$$

O mergulhador submerso está livre da pressão atmosférica?

Kelvin Aitken/Grupo Keystone

Nesse tranquilo mergulho oceânico, a pressão total sofrida pelo mergulhador é obtida somando-se a pressão hidrostática que a água exerce sobre ele com a pressão atmosférica, que se manifesta em todos os pontos do líquido.

Se destamparmos o recipiente, a pressão no ponto **1** ficará incrementada de $\Delta p = p_0$, em que $\mathbf{p_0}$ é a pressão atmosférica do local. A nova pressão $\mathbf{p'_1}$ no ponto **1** será dada por:

$$p'_1 = \Delta p \quad \Rightarrow \quad p'_1 = p_0$$

Conforme o Teorema de Pascal, entretanto, esse incremento de pressão deverá transmitir-se integralmente também ao ponto **2**. Por isso, a nova pressão $\mathbf{p'_2}$ no ponto **2** será dada por:

$$p'_2 = \mu\, g\, h + \Delta p \quad \Rightarrow \quad p'_2 = \mu\, g\, h + p_0$$

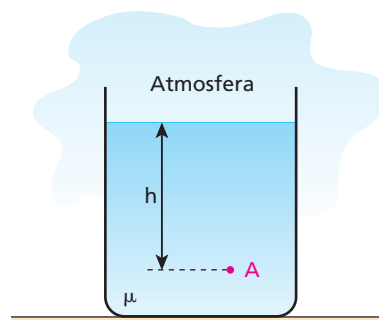
Vimos que uma camada (ou coluna) de água de espessura (ou altura) 10 m exerce em sua base uma pressão equivalente a $1,0 \cdot 10^5$ Pa ou 1,0 atm.

Assim, a uma profundidade de 30 m, por exemplo, um mergulhador submerso em um lago detectará uma pressão total de 4,0 atm, sendo 3,0 atm exercidas pela água e 1,0 atm exercida pelo ar externo.

Você seria capaz de determinar a profundidade de um mergulhador que, submerso nas águas de um lago, detectasse uma pressão total de 3,8 atm?

Se você disse 28 m, acertou, pois das 3,8 atm mencionadas, 2,8 atm são devidas à água, o que corresponde a uma profundidade de 28 m.

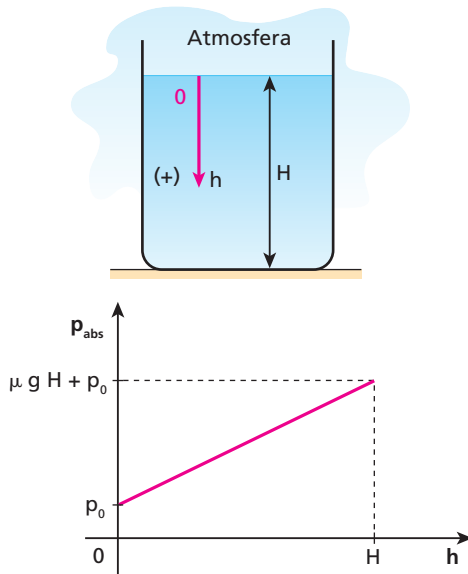
14. Pressão absoluta e pressão efetiva

Vamos admitir um recipiente como o representado a seguir, aberto, contendo um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade. Seja um ponto **A** situado a uma profundidade **h**.

Conceituaremos a seguir a **pressão absoluta** e a **pressão efetiva** em **A**.

Pressão absoluta

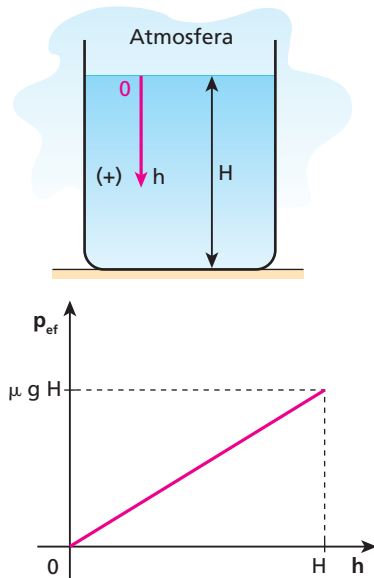
É a pressão total verificada no ponto **A**. Em outras palavras, é a soma da pressão exercida pela coluna líquida com a pressão atmosférica (transmitida até esse ponto).

$$p_{abs} = \mu\, g\, h + p_0$$

Graficamente temos a seguinte representação:

Pressão efetiva (ou hidrostática)

É a pressão exercida exclusivamente pela camada líquida que se sobrepõe ao referido ponto:

$$p_{ef} = \mu \, g \, h$$

Graficamente temos a seguinte representação:

15. Vasos comunicantes

Um líquido em equilíbrio

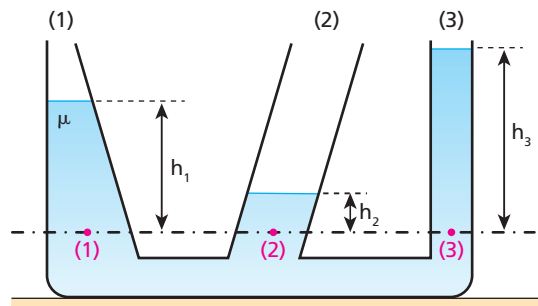
Considere os recipientes da figura a seguir, que se comunicam pelas bases. Admita que um mesmo líquido homogêneo preencha os três ramos existentes no sistema, suposto em equilíbrio.

Os ramos têm diâmetros suficientemente grandes, de modo que os efeitos ligados à capilaridade possam ser considerados desprezíveis.

Em relação à linha de nível indicada, sejam $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$ e $\mathbf{h_3}$, respectivamente, as alturas das colunas líquidas nos ramos (1), (2) e (3). As pressões absolutas nos pontos **1**, **2** e **3** são calculadas por:

$$p_1 = \mu \, g \, h_1 + p_0 \Rightarrow h_1 = \frac{p_1 - p_0}{\mu \, g}$$

$$p_2 = \mu \, g \, h_2 + p_0 \Rightarrow h_2 = \frac{p_2 - p_0}{\mu \, g}$$

$$p_3 = \mu \, g \, h_3 + p_0 \Rightarrow h_3 = \frac{p_3 - p_0}{\mu \, g}$$

Nos três casos, $\mathbf{p_0}$ (pressão atmosférica), μ (massa específica do líquido) e **g** (aceleração da gravidade) são constantes, e, como os pontos **1**, **2** e **3** estão no mesmo nível, deve-se ter (pelo **Teorema de Stevin**) $p_1 = p_2 = p_3$. Assim, podemos constatar que:

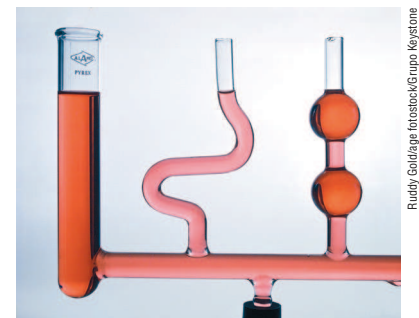
$$h_1 = h_2 = h_3$$

Concluímos, então, que a figura proposta é absurda. Disso, podemos dizer que:

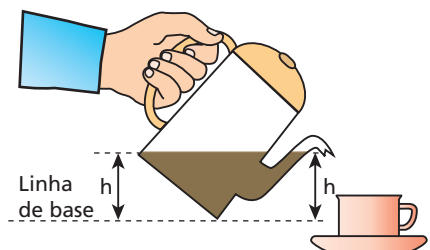
Em um sistema de vasos comunicantes abertos nas extremidades superiores, situados em um mesmo ambiente e preenchidos por um mesmo líquido em equilíbrio, tem-se, em todos os vasos, a **mesma altura** para o nível livre do líquido.

Vamos ver alguns exemplos de vasos comunicantes.

Exemplo 1:

Ruddy Gold/age fotostock/Grupo Keystone

Fotografia mostrando um sistema de vasos comunicantes.

Na fotografia do exemplo 1, o sistema de vasos comunicantes está preenchido com um mesmo líquido. Observe que, independentemente da forma dos tubos, a altura atingida pelo líquido em cada um deles, medida a partir de um determinado nível, é sempre a mesma.

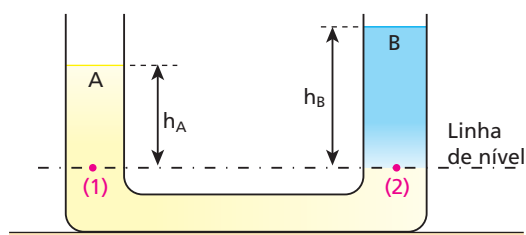
Exemplo 2:

Um bule é um sistema de vasos comunicantes em que o bico do recipiente se comunica com o corpo principal. Ao tombarmos um bule para servir um café, por exemplo, a superfície livre da bebida fica à mesma altura **h** em relação à linha de base do sistema, tanto no bico como no corpo principal, apresentando-se praticamente plana e horizontal, conforme representa a figura.

Dois líquidos imiscíveis em equilíbrio

Como já foi citado na seção 1 deste capítulo, um exemplo tradicional de dois líquidos imiscíveis (que não se misturam) é o da água e do óleo, que não têm afinidade molecular. Colocando essas duas substâncias em um mesmo recipiente, observa-se que o óleo sobe enquanto a água desce. Estabelecido o equilíbrio, nota-se uma nítida superfície de separação entre os dois líquidos.

De acordo com o Teorema de Arquimedes (que será apresentado no item 17):

> Em um recipiente em que comparecem vários líquidos imiscíveis em equilíbrio, as várias camadas líquidas apresentam massa específica crescente da superfície para o fundo.

Considere o tubo em **U** da figura a seguir, com os ramos abertos em um mesmo ambiente, contendo dois líquidos imiscíveis, **A** (massa específica μ_A) e **B** (massa específica μ_B), em equilíbrio.

Estando o líquido **B** acima do líquido **A**, temos $\mu_B < \mu_A$.

Passando uma linha de nível pela superfície de separação dos líquidos, temos:

h_A = altura da superfície livre de **A**;
h_B = altura da superfície livre de **B**.

Os pontos 1 e 2 pertencentes ao líquido **A**, por estarem no mesmo nível, devem suportar pressões iguais. Assim, temos:

$$\text{Ponto 1: } p_1 = \mu_A\, g\, h_A + p_0$$
$$\text{Ponto 2: } p_2 = \mu_B\, g\, h_B + p_0$$

mas

$$p_1 = p_2$$

Logo:

$$\mu_A\, g\, h_A + p_0 = \mu_B\, g\, h_B + p_0$$

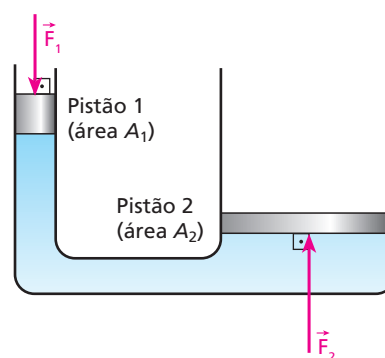
Assim:

$$\frac{h_B}{h_A} = \frac{\mu_A}{\mu_B}$$

Na situação de equilíbrio, as alturas das superfícies livres são inversamente proporcionais às respectivas massas específicas.

16. Prensa hidráulica

É um dispositivo largamente utilizado, cuja finalidade principal é a multiplicação de forças.

Em sua versão mais elementar, a prensa hidráulica é um tubo em **U**, cujos ramos têm áreas da seção transversal diferentes. Normalmente esse tubo é preenchido com um líquido viscoso (em geral, óleo) aprisionado por dois pistões, conforme indica a figura abaixo.

Ao exercermos uma força $\vec{F}_1$ no pistão 1, provocamos um incremento de pressão Δp nos pontos do líquido vizinhos da base desse pistão. Esse acréscimo de pressão é transmitido integralmente aos demais pontos do líquido, o que é justificado pelo Teorema de Pascal. Isso significa que os pontos vizinhos da base do pistão 2 também recebem o acréscimo de pressão Δp e, por isso, exercem uma força $\vec{F}_2$ na base desse pistão.

Temos, então:

$$\textbf{Pistão 1:}\ \Delta p = \frac{F_1}{A_1}$$

$$\textbf{Pistão 2:}\ \Delta p = \frac{F_2}{A_2}$$

Logo: $\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow \boxed{\frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}}$

Supondo que os pistões **1** e **2** sejam circulares, com raios respectivamente iguais a $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, temos:

$$A_2 = \pi R_2^2 \quad \text{e} \quad A_1 = \pi R_1^2$$

Logo: $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} \Rightarrow \boxed{\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$

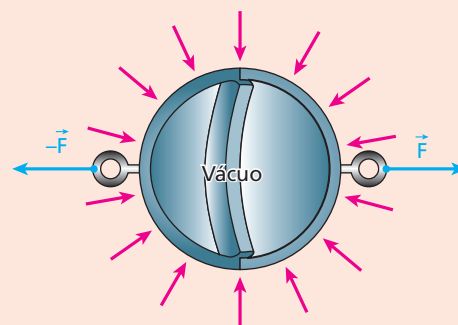
As forças aplicadas nos pistões da prensa hidráulica têm intensidades diretamente proporcionais aos quadrados dos respectivos raios desses pistões. Se, por exemplo, $R_2 = 10\ R_1$, teremos $F_2 = 100\ F_1$.

Notas:

- Embora a prensa hidráulica multiplique forças, não multiplica trabalho (Princípio da Conservação de Energia). Desprezando dissipações, os trabalhos realizados sobre os dois êmbolos têm valores absolutos iguais.
- O número $\frac{A_2}{A_1}$ ou $\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$ define a **vantagem mecânica** da prensa hidráulica, que é o fator de multiplicação de força oferecido pela máquina.

Leitura

O dispositivo de Von Guericke

O dispositivo da figura ao lado representa, em corte, os hemisférios que o físico alemão Otto von Guericke (1602-1686) usou em 1654, na localidade de Magdeburgo, para demonstrar um dos efeitos da pressão atmosférica. Os hemisférios foram acoplados, e, em seguida, sugou-se praticamente todo o ar de seu interior, estabelecendo-se um razoável vácuo dentro da esfera. Em razão das forças provenientes da pressão atmosférica (setas menores), dois grupos de oito cavalos cada, puxando os hemisférios em sentidos opostos (setas maiores, em azul), não conseguiram separar esses dois corpos.

A atmosfera terrestre

O manto fundamental que envolve o planeta Terra, viabilizando a vida, apresenta, dos gases que o constituem, as seguintes porcentagens: nitrogênio (N_2: 78,084%), oxigênio (O_2: 20,948%), argônio (A: 0,934%), dióxido de carbono (CO_2: 0,031%), neônio (Ne: 0,001818%), hélio (He: 0,000524%), metano (CH_4: 0,0002%), criptônio (Kr: 0,000114%), hidrogênio (H_2: 0,00005%) e xenônio (Xe: 0,0000087%). Além desses gases, há outras substâncias e também muito vapor de água, um dos fatores determinantes do clima e dos fenômenos meteorológicos típicos de cada região.

Thinkstock/Getty Images

Visão espacial da Terra na qual podemos ver nuvens, que indicam a presença da atmosfera.

Camadas de nomes distintos e de diferentes constituições compõem a atmosfera da Terra. A camada mais baixa, que se estende do nível do mar até altitudes da ordem de 10 km, denomina-se **troposfera**. Aí se concentra praticamente todo o vapor de água.

Acima da troposfera vem a **estratosfera**, de ar muito rarefeito, mas rica em ozônio. Essa camada, que alcança altitudes próximas de 50 km, bloqueia grande parte das radiações solares, nocivas aos organismos vivos.

Sobre a estratosfera vêm, respectivamente, a **mesosfera**, a **ionosfera** e a **exosfera**, sendo as duas últimas camadas as principais responsáveis pela desintegração diária de milhões de meteoritos e pequenos asteroides que, provenientes do espaço, submetem-se à atração gravitacional terrestre.

No esquema abaixo aparecem alguns dados interessantes sobre a atmosfera terrestre, como pressões e temperaturas em diversas altitudes.

40 km — 0,2 cm Hg — 40 km

Sondas meteorológicas

–20 °C

0,7 cm Hg — 99% da atmosfera está abaixo deste nível

30 km — 1,0 cm Hg — 30 km

Murray (1954)

2,4 cm Hg

Estratosfera

Stevens e Anderson (1935)

20 km — –52 °C — 20 km

Piccard (1934)

8,0 cm Hg — 90% da atmosfera está abaixo deste nível

Donatti (1934)

Aviões estratosféricos

Cirros

10 km — –40 °C 21 cm Hg — 10 km

55% da atmosfera está abaixo deste nível

Monte Everest (Nepal)

Cúmulos-nimbos

–12 °C

Troposfera

Pico da Neblina (Brasil)

0 — 20 °C 76 cm Hg

CJT/Zapt

(Ilustração com tamanhos e distâncias fora de escala.)

Exercícios — nível 1

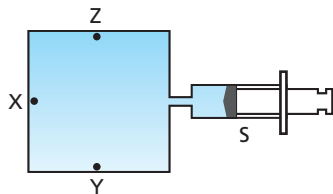
34. (UFSE) Na figura, está representado um recipiente rígido, cheio de água, conectado a uma seringa **S**. **X**, **Y** e **Z** são pontos no interior do recipiente. Se a pressão que o êmbolo da seringa exerce sobre o líquido sofrer um aumento ΔP, a variação de pressão hidrostática nos pontos **X**, **Y** e **Z** será, respectivamente, igual a:

a) ΔP, ΔP e ΔP.

b) ΔP, zero e zero.

c) $\frac{\Delta P}{3}$, $\frac{\Delta P}{3}$ e $\frac{\Delta P}{3}$.

d) zero, $\frac{\Delta P}{2}$ e $\frac{\Delta P}{2}$.

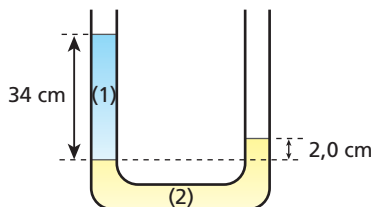
e) zero, ΔP e zero.

35. (Fuvest-SP) O organismo humano pode ser submetido, sem consequências danosas, a uma pressão de, no máximo, $4{,}0 \cdot 10^5$ N/m² e a uma taxa de variação de pressão de, no máximo, $1{,}0 \cdot 10^4$ N/m² por segundo. Nessas condições, responda:

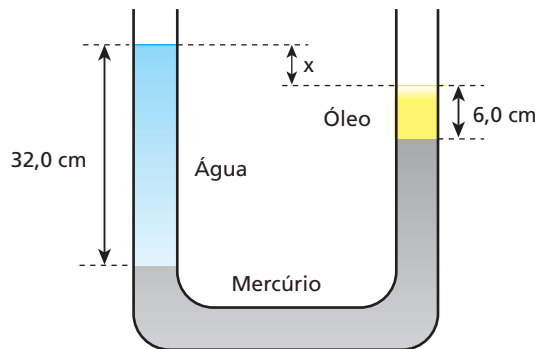
a) qual é a máxima profundidade recomendada a um mergulhador?

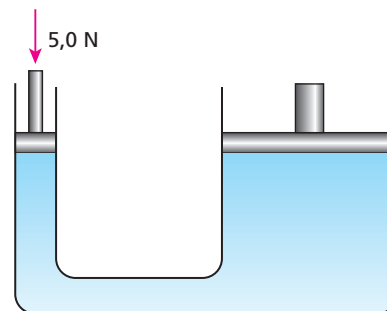
b) qual é a máxima velocidade de movimentação na vertical recomendada para um mergulhador?

Adote os dados:

- pressão atmosférica: $1{,}0 \cdot 10^5$ N/m²;
- densidade da água: $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³;
- intensidade da aceleração da gravidade: 10 m/s².

36. (UFRJ) Um tubo em **U**, aberto em ambos os ramos, contém dois líquidos não miscíveis em equilíbrio hidrostático. Observe, como mostra a figura, que a altura da coluna do líquido (1) é de 34 cm e que a diferença de nível entre a superfície livre do líquido (2), no ramo da direita, e a superfície de separação dos líquidos, no ramo da esquerda, é de 2,0 cm.

Considere a densidade do líquido (1) igual a 0,80 g/cm³.
Calcule a densidade do líquido (2).

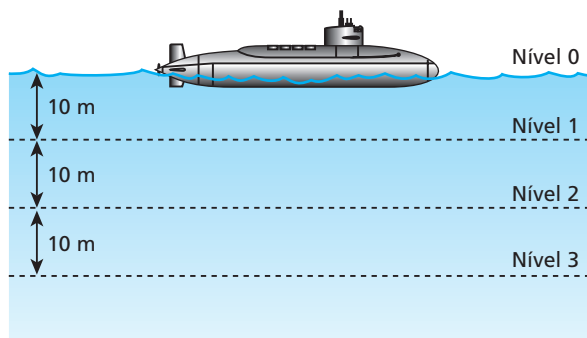
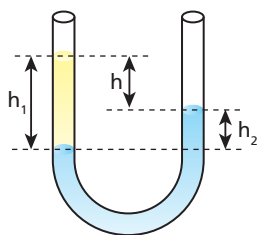
37. Na situação esquematizada fora de escala na figura, um tubo em **U**, longo e aberto nas extremidades, contém mercúrio, de densidade 13,6 g/cm³. Em um dos ramos desse tubo, coloca-se água, de densidade 1,0 g/cm³, até ocupar uma altura de 32,0 cm. No outro ramo, coloca-se óleo, de densidade 0,80 g/cm³, que ocupa uma altura de 6,0 cm.

Qual é o desnível **x** entre as superfícies livres da água e do óleo nos dois ramos do tubo?

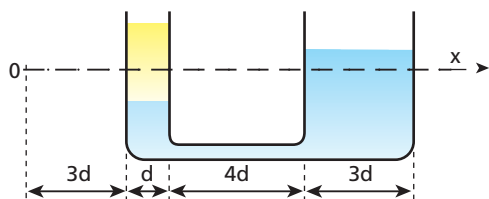
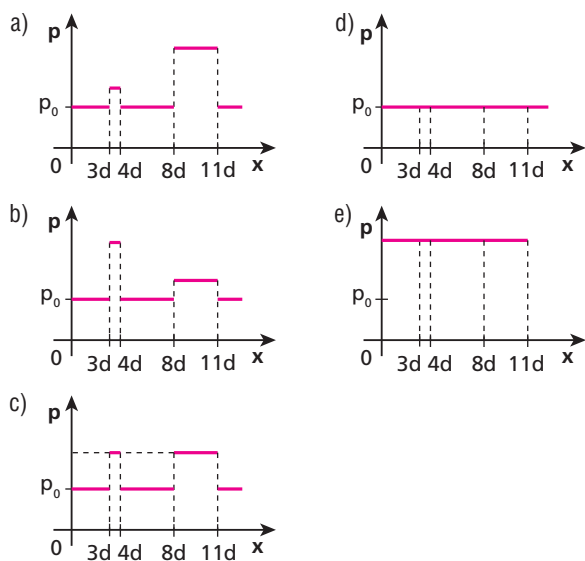
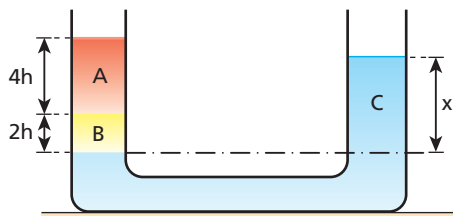
38. (UFPE) Dois tubos cilíndricos interligados, conforme a figura, estão cheios de um líquido incompressível. Cada tubo tem um pistão capaz de ser movido verticalmente e, assim, pressionar o líquido. Se uma força de intensidade 5,0 N é aplicada no pistão do tubo menor, conforme a figura, qual a intensidade da força, em newtons, transmitida ao pistão do tubo maior? Os raios internos dos cilindros são de 5,0 cm (tubo menor) e 20 cm (tubo maior).

Exercícios — nível 2

39. Um submarino, inicialmente em repouso em um ponto do nível 0 (superfície da água), indicado na figura, inunda seus compartimentos de lastro e afunda verticalmente, passando pelos níveis 1, 2 e 3.

No local, a pressão atmosférica é normal (1,0 atm) e $|\vec{g}| = 10$ m/s².
Sabendo que a densidade absoluta da água, suposta homogênea, é de $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³ e considerando 1,0 atm $= 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa:

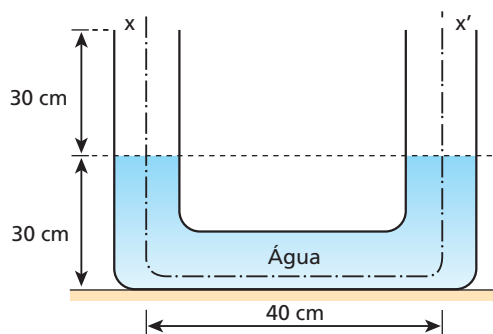
a) calcule o acréscimo de pressão registrado pelos aparelhos do submarino quando ele desce de um dos níveis referidos para o imediatamente inferior;

b) trace o gráfico da pressão total (em atm) em função da profundidade quando o submarino desce do nível 0 ao nível 3.

40. (Mack-SP) No tubo em **U** da figura, de extremidades abertas, encontram-se dois líquidos imiscíveis, de densidades iguais a 0,80 g/cm^3 e 1,0 g/cm^3. O desnível entre as superfícies livres dos líquidos é $h = 2,0$ cm.
As alturas h_1 e h_2 são, respectivamente:

a) 4,0 cm e 2,0 cm.
b) 8,0 cm e 4,0 cm.
c) 10 cm e 8,0 cm.
d) 12 cm e 10 cm.
e) 8,0 cm e 10 cm.

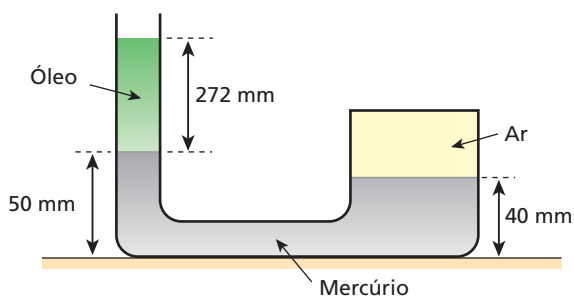
41. No esquema abaixo, representa-se um tubo em **U**, aberto nas extremidades, contendo dois líquidos imiscíveis em equilíbrio fluidostático sob a ação da gravidade:

Considere o eixo 0x indicado, que atravessa o sistema. Sendo p_0 a pressão atmosférica, qual dos gráficos a seguir representa qualitativamente a variação da pressão absoluta em função da posição **x**?

a)
d)
b)
e)
c)
42. Na figura, representa-se o equilíbrio de três líquidos não miscíveis **A**, **B** e **C**, confinados em um sistema de vasos comunicantes:

Os líquidos **A**, **B** e **C** têm densidades μ_A, μ_B e μ_C, que obedecem à relação:

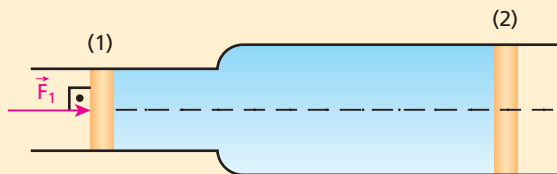
$$\frac{\mu_A}{1} = \frac{\mu_B}{2} = \frac{\mu_C}{3}$$

Supondo o valor de **h** conhecido, responda: qual é o valor do comprimento **x** indicado?

43. Na figura seguinte, é representado um tubo em **U**, cuja secção transversal tem área constante de 4,0 cm^2. O tubo contém, inicialmente, água ($\mu_a = 1,0$ g/cm^3) em equilíbrio.

Supõe-se que a pressão atmosférica local seja de $1,00 \cdot 10^5$ Pa e que $g = 10$ m/s^2.

a) Determine o máximo volume de óleo ($\mu_0 = 0,80$ g/cm^3) que poderá ser colocado no ramo esquerdo do tubo.
b) Trace o gráfico da pressão absoluta em função da posição ao longo da linha xx', supondo que no ramo esquerdo do tubo foi colocado o máximo volume de óleo, calculado no item **a**.

44. Um tubo cilíndrico contendo óleo (0,80 g/cm^3) e mercúrio (13,6 g/cm^3) é ligado a um reservatório que contém ar e mercúrio, conforme a figura abaixo:

Sendo de 760 mm Hg a pressão atmosférica local, qual é, em mm Hg, a pressão do ar dentro do reservatório?

45. E.R. Na figura seguinte, está representado um recipiente constituído pela junção de dois tubos cilíndricos co-axiais e de eixos horizontais. O recipiente contém um líquido incompressível aprisionado pelos êmbolos 1 e 2, de áreas respectivamente iguais a 0,50 m^2 e 2,0 m^2.

Empurrando-se o êmbolo 1 para a direita com a força $\vec{F}_1$ de intensidade 100 kgf, obtém-se, nesse êmbolo, um deslocamento de 80 cm. Desprezando os atritos, determine:

a) a intensidade da força horizontal $\vec{F}_2$ com que o líquido empurra o êmbolo 2;
b) o deslocamento do êmbolo 2.

Resolução:

a) Seja Δp o acréscimo de pressão que os pontos do líquido, vizinhos do êmbolo 1, recebem devido à aplicação de $\vec{F_1}$. Temos:

$$\Delta p = \frac{F_1}{A_1} \quad \text{(I)}$$

Conforme o **Teorema de Pascal**, esse acréscimo de pressão transmite-se a todos os demais pontos do líquido, manifestando-se no êmbolo 2 por uma força $\vec{F_2}$, perpendicular ao êmbolo:

$$\Delta p = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), vem: $\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$

Sendo $A_2 = 2{,}0\ m^2$, $A_1 = 0{,}50\ m^2$ e $F_1 = 100$ kgf, calculamos F_2:

$$F_2 = \frac{2{,}0}{0{,}50} \cdot 100\ \text{(kgf)} \Rightarrow \boxed{F_2 = 400\ \text{kgf}}$$

b) Ao se deslocar, o êmbolo 1 expulsa do tubo de menor diâmetro um volume de líquido ΔV, dado por:

$$\Delta V = A_1\, L_1 \quad \text{(III)}$$

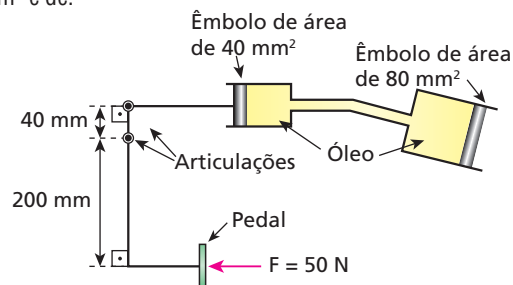
Como o líquido é incompressível, esse volume ΔV é integralmente transferido para o tubo de maior diâmetro, provocando no êmbolo 2 um deslocamento L_2. Temos, então, que:

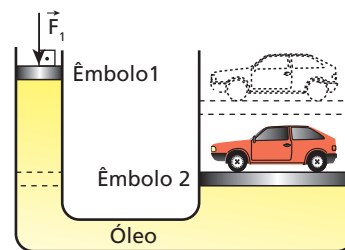
$$\Delta V = A_2\, L_2 \quad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV), vem: $A_2 L_2 = A_1 L_1 = L_2 = \frac{A_1}{A_2} L_1$

Lembrando que $L_1 = 80$ cm, vem:

$$L_2 = \frac{0{,}50}{2{,}0} \cdot 80\ \text{(cm)} \quad \boxed{L_2 = 20\ \text{cm}}$$

46. (Mack-SP) O diagrama abaixo mostra o princípio do sistema hidráulico do freio de um automóvel. Quando uma força de 50 N é exercida no pedal, a força aplicada pelo êmbolo de área igual a $80\ mm^2$ é de:

a) 100 N. b) 250 N. c) 350 N d) 400 N. e) 500 N.

47. Por meio do dispositivo da figura, pretende-se elevar um carro de massa $1{,}0 \cdot 10^3$ kg a uma altura de 3,0 m em relação à sua posição inicial. Para isso, aplica-se sobre o êmbolo 1 a força $\vec{F_1}$ indicada e o carro sobe muito lentamente, em movimento uniforme.

As áreas dos êmbolos 1 e 2 valem, respectivamente, $1{,}0\ m^2$ e $10\ m^2$. No local, $g = 10\ m/s^2$. Desprezando a ação da gravidade sobre os êmbolos e sobre o óleo e também os atritos e a compressibilidade do óleo, determine:

a) a intensidade de $\vec{F_1}$;

b) o trabalho da força que o dispositivo aplica no carro, bem como o trabalho de $\vec{F_1}$.

Bloco 4

17. O Teorema de Arquimedes

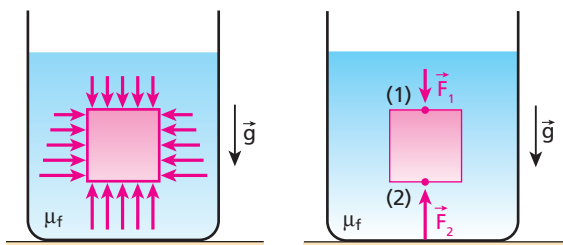
Qual é a força vertical e dirigida para cima que equilibra o peso de um navio permitindo que ele flutue? Que força arrebatadora vertical e dirigida para cima colabora para que uma bola de plástico, mergulhada totalmente na água de uma piscina, quando largada, aflore rapidamente à superfície? Reflita ainda sobre a força vertical e dirigida para cima responsável pela manutenção de um balão suspenso no ar...

Qual a origem dessas forças? Teriam elas algo em comum? Sim, elas advêm do fluido que envolve total ou parcialmente os corpos citados. Essa força vertical e dirigida para cima que os corpos recebem quando imersos na água, no ar ou em outros líquidos ou gases tem fundamental importância na compreensão de fenômenos hidrostáticos. Seu nome é **empuxo**, tendo sido descrita por Arquimedes de Siracusa no século III a.C.

Veja o enunciado do Teorema de Arquimedes:

> Quando um corpo é imerso total ou parcialmente em um fluido em equilíbrio sob a ação da gravidade, ele recebe do fluido uma força denominada **empuxo** (ou impulsão de Arquimedes). Tal força tem sempre direção vertical, sentido de baixo para cima e intensidade igual à do peso do fluido deslocado pelo corpo.

Demonstração:

Vamos admitir um líquido homogêneo de massa específica μ_f, contido no recipiente da figura. O sistema acha-se em equilíbrio sob a ação da gravidade ($\vec{g}$). Seja também um cilindro, de altura **h** e bases de área **A**, totalmente imerso no líquido.

Por estar envolvido pelo líquido, o cilindro recebe forças deste, indicadas pelo esquema. As forças horizontais (laterais) equilibram-se devido à simetria. Na vertical, entretanto, temos duas forças a considerar: uma, $\vec{F}_1$, aplicada no ponto **1**, resultante na base superior do cilindro, e outra, $\vec{F}_2$, aplicada no ponto **2**, resultante na base inferior desse cilindro.

Devido à maior profundidade do ponto **2**, devemos ter $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$, o que significa que as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ admitem uma resultante vertical e dirigida para cima. Essa resultante que o líquido exerce no cilindro, suposto em repouso, denomina-se **empuxo** ($\vec{E}$).

Temos, então, que:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{E}$$

Em módulo:

$$F_2 - F_1 = E \quad \text{(I)}$$

A intensidade de $\vec{E}$ pode ser obtida aplicando-se aos pontos **1** e **2** o **Teorema de Stevin**:

$$p_2 - p_1 = \mu_f \, g \, h$$

Sendo $p_2 = \dfrac{F_2}{A}$ e $p_1 = \dfrac{F_1}{A}$, vem:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \mu_f \, h \, g \Rightarrow F_2 - F_1 = \mu_f \, g \, h \, A$$

O produto h A traduz o volume do cilindro imerso no líquido (**V**). Assim:

$$F_2 - F_1 = \mu_f \, V \, g \quad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), segue que:

$$E = \mu_f \, V \, g$$

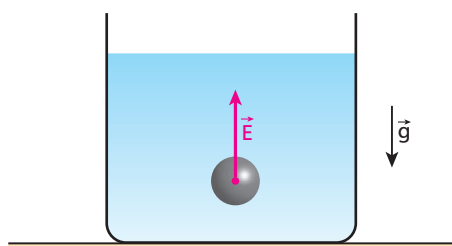
Seja $\mathbf{V_{fd}}$ o volume de fluido deslocado em razão da imersão do cilindro. É fundamental notar que esse volume é exatamente igual ao volume do cilindro imerso no fluido.

$$V_{fd} = V$$

Diante disso, podemos escrever:

$$E = \mu_f \, V_{fd} \, g$$

Entretanto, $\mu_f \, V_{fd} = m_{fd}$ (massa do fluido deslocado). Assim, obtemos, finalmente:

$$E = \mu_f \, V_{fd} \, g \Rightarrow E = m_{fd} \, g \Rightarrow E = P_{fd}$$

Na situação representada na figura acima, temos uma esfera em repouso totalmente imersa na água. A resultante das ações da água sobre a esfera é o empuxo $\vec{E}$, força vertical e dirigida para cima. A intensidade de $\vec{E}$ é igual à do peso do fluido deslocado pela esfera.

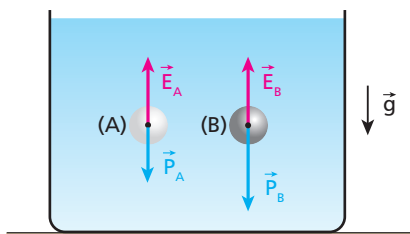
Entre alavancas e a lei do empuxo

Giraudon/Grupo Keystone

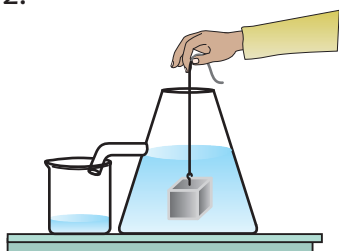
Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) nasceu em Siracusa, na ilha da Sicília, cidade que na época pertencia à Magna Grécia. Em viagem de estudos a Alexandria (Egito), conheceu Euclides e seus discípulos, tornando-se entusiasta de sua obra. Determinou a área da superfície esférica, obteve com precisão o centro de gravidade de várias figuras planas, construiu engenhos bélicos de notável eficiência e também um parafuso capaz de elevar a água de poços e estudou o mecanismo das alavancas. O que realmente o celebrizou, no entanto, foi a formulação da lei do empuxo. Morreu em plena atividade, na Primeira Guerra Púnica, durante o massacre realizado pelos romanos quando da tomada de Siracusa.

Tenha em mente os seguintes pontos:

- O empuxo só pode ser considerado a resultante das ações do fluido sobre o corpo se este estiver em repouso.
- A linha de ação do empuxo passa sempre pelo centro de gravidade da porção fluida que ocupava o local em que está o corpo.
- O empuxo não tem nenhuma relação geral com o peso do corpo imerso, cuja intensidade pode ser maior que a do empuxo, menor que ela ou igual à do empuxo.
- Para μ_f e **g** constantes, **E** é diretamente proporcional a **V**.
  Se uma bola for inflada debaixo da água, por exemplo, a intensidade do empuxo exercido sobre ela aumentará. Quanto maior for o volume da bola, maior será o volume de água deslocado e maior será a intensidade do empuxo.
- Para **V** e **g** constantes, **E** é diretamente proporcional a μ_f.
  Um corpo totalmente imerso na água do mar receberá um empuxo mais intenso que o recebido quando totalmente imerso na água límpida de um lago. Isso ocorre porque a água salgada do mar tem densidade absoluta maior que a da água “doce” do lago.

Exemplo 1:

Na figura, temos uma bola de pingue-pongue (**A**) e uma esfera maciça de aço (**B**), de mesmo volume externo. Esses dois corpos estão totalmente imersos na água. É claro que a esfera **B** é mais pesada que a bola **A**, porém, por terem o mesmo volume externo, **A** e **B** deslocam volumes iguais de água e, por isso, recebem **empuxos de mesma intensidade**:

$$|\vec{P}_A| < |\vec{P}_B|, \text{ mas } |\vec{E}_A| = |\vec{E}_B|$$

Exemplo 2:

No experimento ilustrado anteriormente, quando o bloco (sem porosidades) é introduzido na jarra preenchida com água até o nível do seu bico, certo volume do líquido extravasa, sendo recolhido no recipiente lateral. O volume de água extravasado é igual ao volume do bloco, e a intensidade do empuxo recebido por ele é igual à do peso do líquido deslocado (Teorema de Arquimedes).

Exemplo 3:

Na fotografia a seguir, um balão inflado com um gás menos denso que o ar mantém suspensa, em repouso, uma pedra presa por um barbante.

Balão inflado mantendo uma pedra suspensa, em repouso.

Nesse caso, o sistema apresenta-se em equilíbrio e a intensidade do seu peso total é igual à intensidade do empuxo exercido pelo ar.

É interessante observar que, como a densidade do ar é bem menor que a da água ($\mu_{ar} \cong 1{,}3$ kg/m^3 e $\mu_{água} \cong 1\,000$ kg/m^3), para se obter no ar empuxos equivalentes aos obtidos na água é necessário utilizar, no meio gasoso, corpos de grandes volumes. É por isso que os balões atmosféricos são tão grandes.

18. Uma verificação da lei do empuxo

Consideremos a situação representada na figura 1, em que se tem uma balança de travessão de braços iguais em equilíbrio. Nessas condições, o peso pendente na extremidade esquerda do travessão tem intensidade igual à do peso pendente na extremidade direita.

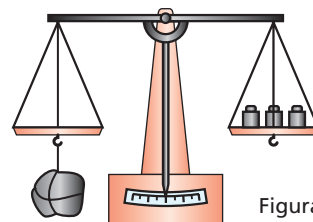



Figura 1

Admitamos, agora, a situação representada na figura 2. Introduzindo o corpo de ferro não poroso (dependurado no prato esquerdo) em um recipiente contendo água, verificamos certo desequilíbrio da balança. Isso ocorre porque, ao ser imerso na água, o corpo de ferro recebe desta uma força vertical e dirigida para cima – o empuxo –, que provoca uma redução na intensidade da força que traciona a extremidade esquerda do travessão.

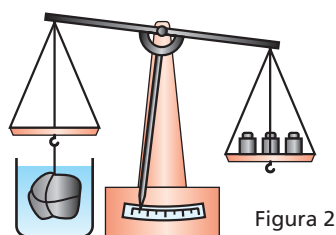



Figura 2

Na situação mostrada na figura 3, o travessão encontra-se novamente em equilíbrio, tendo retornado à sua posição inicial. Para isso, foi necessário reduzir a intensidade do peso pendente à direita, retirando-se um dos massores do prato.

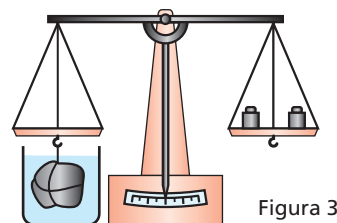



Figura 3

Supondo que a retirada de um massor do prato à direita tenha sido suficiente para recolocar o travessão na horizontal, podemos afirmar que a intensidade do peso desse objeto é igual à do empuxo recebido pelo corpo de ferro imerso na água.

Faça você mesmo

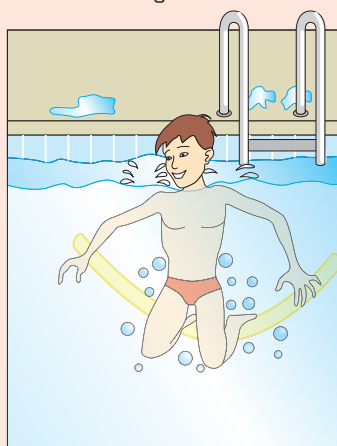
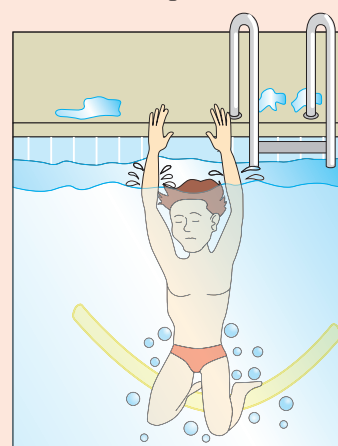
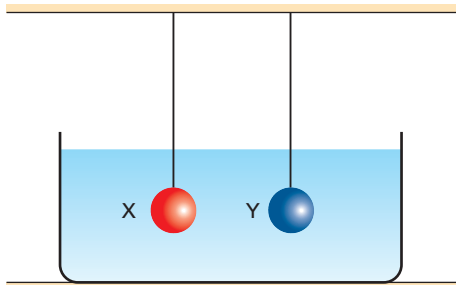
Você sabe nadar? Então, que tal testar um aspecto importante do Princípio de Arquimedes, sentindo no próprio corpo a ação do empuxo exercido pela água? Para isso, você deverá estar em uma piscina não muito profunda, de preferência que dê pé, para não haver nenhuma possibilidade de afogamento. Consiga um flutuador roliço de isopor, conhecido por "espaguete", e, com as pernas flexionadas, apoie-se sobre ele, acomodando-o na região sob seus tornozelos. Estabeleça uma situação de equilíbrio em que seu corpo se mantenha em repouso sobre o flutuador, com braços, pernas e abdômen totalmente imersos na água, deixando apenas a cabeça emersa, como sugere a **figura 1**. Nesse caso, o empuxo aplicado pela água terá intensidade igual à do seu peso.

ATENÇÃO!
Só faça este experimento se você souber nadar!

Figura 1
Figura 2
Agora, ainda apoiado sobre o "espaguete", inspire profundamente, prenda a respiração e erga simultaneamente os dois braços de modo que fiquem para fora da água, posicionando-os na vertical, como indica a **figura 2**. Você sairá da situação de equilíbrio, o que prontamente o fará afundar, como resultado da brusca diminuição na intensidade do empuxo aplicado sobre seu corpo.

A explicação para sua "ida a pique" reside no fato de a intensidade da força empuxo ser diretamente proporcional ao volume de fluido deslocado. Ao elevar os braços, retirando-os da água, o volume de água desalojado por seu corpo sofre uma sensível redução, o mesmo ocorrendo com a intensidade do empuxo. Como seu peso é constante, ele predomina inicialmente sobre o empuxo, fazendo com que você afunde na piscina.

48. As esferas, **X** e **Y**, da figura têm volumes iguais e são constituídas do mesmo material. **X** é oca e **Y**, maciça, estando ambas em repouso no interior de um líquido homogêneo em equilíbrio, presas a fios ideais.

Nessas condições, é correto afirmar que as esferas:

a) têm massas iguais;
b) possuem pesos de mesma intensidade;
c) apresentam a mesma densidade;
d) são sustentadas por fios igualmente tracionados;
e) estão submetidas a empuxos iguais.

49. (UFPA) Quando um peixe morre em um aquário, verifica-se que, imediatamente após a morte, ele permanece no fundo e, após algumas horas, com a decomposição, são produzidos gases dentro de seu corpo e o peixe vem à tona (flutua). A explicação correta para esse fato é que, com a produção de gases:

a) o peso do corpo diminui, diminuindo o empuxo.
b) o volume do corpo aumenta, aumentando o empuxo.
c) o volume do corpo aumenta, diminuindo o empuxo.
d) a densidade do corpo aumenta, aumentando o empuxo.
e) a densidade do corpo aumenta, diminuindo o empuxo.

50. (UFV-MG) Consegue-se boiar na água salgada do Mar Morto com maior facilidade que em uma piscina de água doce. Isso ocorre porque:

a) os íons Na^+, presentes em elevada concentração na água do Mar Morto, tendem a repelir os íons positivos encontrados na pele do banhista, levando-o a flutuar facilmente.
b) a densidade da água do Mar Morto é maior que a da água doce, o que resulta em um maior empuxo sobre o corpo do banhista.
c) a elevada temperatura da região produz um aumento do volume do corpo do banhista, fazendo com que sua densidade seja inferior à da água desse mar.
d) o Mar Morto se encontra à altitude de 390 m abaixo do nível dos oceanos e, consequentemente, o peso do banhista será menor e este flutuará com maior facilidade.
e) a alta taxa de evaporação no Mar Morto produz um colchão de ar que mantém o corpo do banhista flutuando sobre a água.

51. E.R. Um balão indeformável de massa 2,0 kg apresenta, num local em que $g = 10\ m/s^2$, peso específico de 25 N/m^3. Supondo que o balão esteja totalmente imerso na água ($\mu_a = 1,0\ g/cm^3$), determine:

a) o volume de água deslocado;
b) o módulo do empuxo que o balão recebe da água.

Resolução:

a) Chamando de ρ o peso específico do balão, temos:

$$\rho = \frac{|\vec{P}|}{V} \Rightarrow \rho = \frac{m\,g}{V}$$

Sendo $\rho = 25\ N/m^3$, $m = 2,0$ kg e $g = 10\ m/s^2$, calculemos o volume **V** do balão.

$$25 = \frac{2,0 \cdot 10}{V} \Rightarrow V = \frac{20}{25}\,(m^3)$$

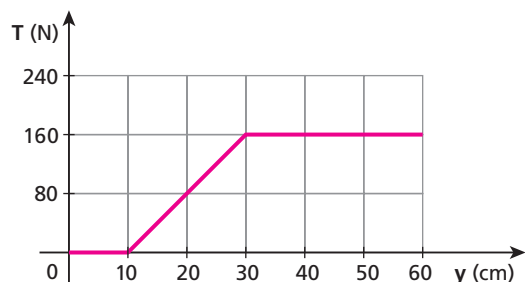
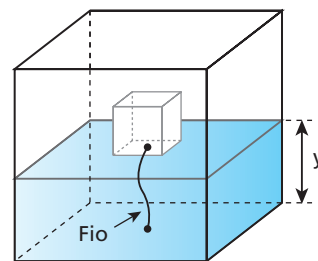
$$\boxed{V = 0,80\ m^3}$$

b) O empuxo recebido pelo balão tem intensidade **E**, dada por:

$$E = \mu_a\, V\, g$$

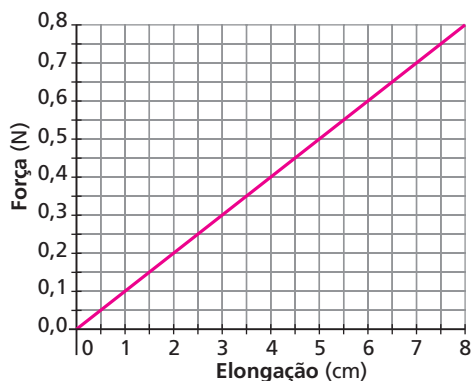
Sendo $\mu_a = 1,0\ g/cm^3 = 1,0 \cdot 10^3\ kg/m^3$, vem:

$$E = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 0,80 \cdot 10\ (N) \Rightarrow \boxed{E = 8,0 \cdot 10^3\ N}$$

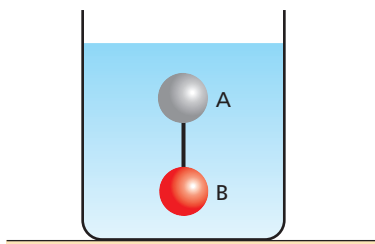
52. (UFPE-mod.) Um cubo de isopor, de massa desprezível, é preso por um fio no fundo de um recipiente que está sendo preenchido com um fluido. O gráfico abaixo representa como a intensidade da força de tração no fio varia em função da altura **y** do fluido no recipiente.

Adotando $g = 10\ m/s^2$, determine:

a) o comprimento **L** do fio e a aresta **A** do cubo, em cm;
b) a densidade do fluido em g/cm^3.

53. (Unesp-SP) Um bloco de certo material, quando suspenso no ar por uma mola de massa desprezível, provoca uma elongação de 7,5 cm na mola. Quando o bloco está totalmente imerso em um líquido desconhecido, desloca $5,0 \cdot 10^{-5}\ m^3$ de líquido e a

elongação da mola passa a ser 3,5 cm. A força exercida pela mola em função da elongação está dada no gráfico da figura:

Despreze o empuxo do ar e considere g = 10 m/s². Nessas condições, determine:

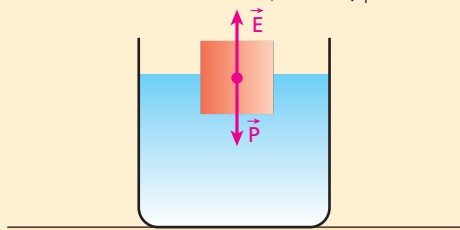
a) a intensidade do empuxo que o líquido exerce no bloco;
b) a massa específica (densidade) do líquido em kg/m³.

54. (Unip-SP) Para medirmos a densidade do álcool, utilizado como combustível nos automóveis, usamos duas pequenas esferas, **A** e **B**, de mesmo raio, unidas por um fio de massa desprezível. As esferas estão em equilíbrio, totalmente imersas, como mostra a figura, e o álcool é considerado homogêneo.

Sendo a densidade de **A** igual a 0,50 g/cm³ e a densidade de **B** igual a 1,0 g/cm³, podemos concluir que:

a) não há dados suficientes para obtermos a densidade do álcool.
b) a densidade do álcool vale 1,5 g/cm³.
c) a densidade do álcool vale 0,50 g/cm³.
d) a densidade do álcool vale 0,75 g/cm³.
e) a densidade do álcool vale 1,0 g/cm³.

55. E.R. Um bloco de madeira flutua inicialmente na água com metade do seu volume imerso. Colocado a flutuar no óleo, o bloco apresenta $\frac{1}{4}$ do seu volume emerso. Determine a relação entre as massas específicas da água (μ_a) e do óleo (μ_0).

Resolução:

Analisemos, inicialmente, o equilíbrio do bloco parcialmente imerso em um fluido de massa específica μ_f:

Para que se verifique o equilíbrio, o empuxo recebido pelo volume imerso do bloco ($\vec{E}$) deve equilibrar a força da gravidade ($\vec{P}$):

$$\vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$$

Ou, em módulo:

$$E = P$$

Lembrando que $E = \mu_f V_i g$, vem:

$$\mu_f V_i g = P$$

Para a flutuação na água, temos:

$$\mu_a \frac{1}{2} V g = P \quad (I)$$

Para a flutuação no óleo, temos:

$$\mu_o \frac{3}{4} V g = P \quad (II)$$

Comparando (I) e (II), vem:

$$\mu_a \frac{1}{2} V g = \mu_0 \frac{3}{4} V g \Rightarrow \mu_a = \frac{3}{2} \mu_0$$

Assim:

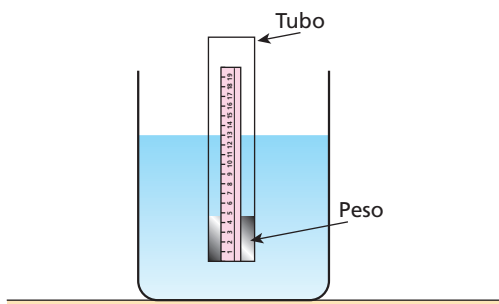
$$\boxed{\frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{3}{2}}$$

56. Um bloco de gelo (densidade de 0,90 g/cm³) flutua na água (densidade de 1,0 g/cm³). Que porcentagem do volume total do bloco permanece imersa?

57. (Unesp-SP) Um bloco de madeira de massa 0,63 kg é abandonado cuidadosamente sobre um líquido desconhecido, que se encontra em repouso dentro de um recipiente. Verifica-se que o bloco desloca 500 cm³ do líquido, até que passa a flutuar em repouso.

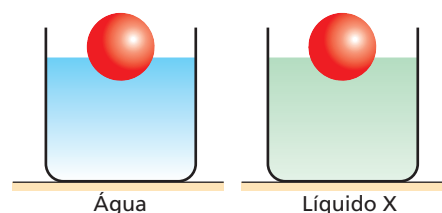
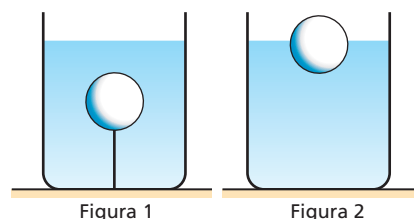
a) Considerando g = 10,0 m/s², determine a intensidade (módulo) do empuxo exercido pelo líquido no bloco.
b) Qual é o líquido que se encontra no recipiente? Para responder, consulte a tabela seguinte, após efetuar seus cálculos.

Líquido	Massa específica a temperatura ambiente (g/cm³)
Álcool etílico	0,79
Benzeno	0,88
Óleo mineral	0,92
Água	1,00
Leite	1,03
Glicerina	1,26

58. (Unifesp-SP) Um estudante adota um procedimento caseiro para obter a massa específica de um líquido desconhecido. Para isso, utiliza um tubo cilíndrico transparente e oco, de secção circular, que flutua tanto na água quanto no líquido desconhecido. Uma pequena régua e um pequeno peso são colocados no interior desse tubo e ele é fechado. Qualquer que seja o líquido, a função da régua é registrar a porção submersa do tubo, e a do peso, fazer com que o tubo fique parcialmente submerso, em posição estática e vertical, como ilustrado na figura a seguir.

No recipiente com água, a porção submersa da régua é de 10,0 cm e, no recipiente com o líquido desconhecido, a porção submersa da régua é de 8,0 cm. Sabendo que a massa específica da água é 1,0 g/cm^3, o estudante deve afirmar que a massa específica procurada é:

a) 0,08 g/cm^3.
b) 0,12 g/cm^3.
c) 0,8 g/cm^3.
d) 1,0 g/cm^3.
e) 1,25 g/cm^3.

59. (UFC-CE) Um corpo flutua em água com $\frac{7}{8}$ do seu volume emersos. O mesmo corpo flutua em um líquido **X** com $\frac{5}{6}$ do seu volume emersos.

Qual a relação entre a massa específica do líquido **X** e a massa específica da água?

60. Uma esfera de isopor de volume $2,0 \cdot 10^2$ cm^3 encontra-se inicialmente em equilíbrio presa a um fio inextensível, totalmente imersa na água (figura 1). Cortando-se o fio, a esfera aflora, passando a flutuar na superfície da água (figura 2).

Sabendo que as massas específicas do isopor e da água valem, respectivamente, 0,60 g/cm^3 e 1,0 g/cm^3 e que $|\vec{g}| = 10$ m/s^2, calcule:

a) a intensidade da força de tração no fio na situação da figura 1;
b) a porcentagem do volume da esfera que permanece imersa na situação da figura 2.

Exercícios nível 2

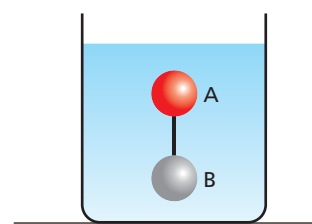
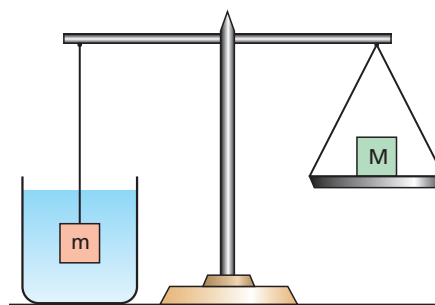
61. Quando a esfera de aço representada na figura é imersa inteiramente na água, observa-se que o ponteiro, rigidamente fixado à mola de constante elástica $K = 1,0 \cdot 10^2$ N/m, sofre um deslocamento vertical de 1,0 cm.

Adote $|\vec{g}| = 10$ m/s^2 e admita que a densidade absoluta da água vale 1,0 g/cm^3.

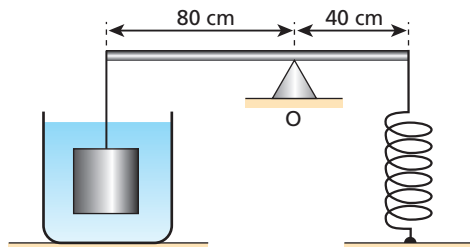
a) O deslocamento sofrido pelo ponteiro é para cima ou para baixo?
b) Qual o volume da esfera?

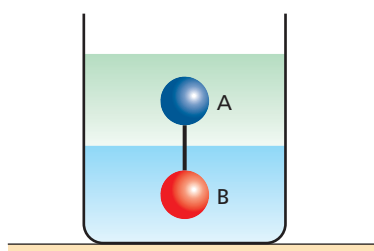
62. (UFPB) Dois corpos maciços e uniformes, ligados por um fio de massa e volume desprezíveis, estão em equilíbrio totalmente imersos em água, conforme ilustra a figura a seguir. Sabendo que o volume do corpo **A** é $3,0 \cdot 10^{-3}$ m^3, que sua densidade é $6,0 \cdot 10^2$ kg/m^3 e que a intensidade do empuxo sobre o corpo **B** vale 8,0 N, determine:

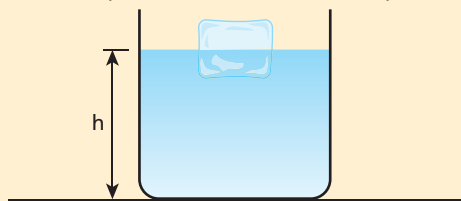
a) a intensidade do empuxo sobre o corpo **A**;
b) a intensidade da força que traciona o fio;
c) a massa do corpo **B**.

Dados: módulo da aceleração da gravidade $g = 10$ m/s^2; densidade da água: $d = 1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3.

63. (UFPE) Um bloco de massa $m = 5,0 \cdot 10^2$ g e volume igual a 30 cm^3 é suspenso por uma balança de braços iguais, apoiada em seu centro de gravidade, sendo completamente imerso em um líquido. Sabendo que para equilibrar a balança é necessário colocar uma massa $M = 2,0 \cdot 10^2$ g sobre o prato suspenso pelo outro braço, determine:

a) a intensidade do empuxo que o líquido exerce no bloco;
b) a densidade do líquido.

Adote $g = 10$ m/s^2 e despreze o efeito do ar, bem como o peso do prato da balança.

64. Na situação da figura, uma barra rígida e de peso desprezível está em equilíbrio na posição horizontal. Na extremidade esquerda da barra está pendurado um bloco de ferro (densidade de $8,0 \cdot 10^3$ kg/m³), de volume igual a $1,0 \cdot 10^{-3}$ m³, que está totalmente imerso em água (densidade de $1,0 \cdot 10^3$ kg/m³). A extremidade direita da barra está presa a uma mola ideal de constante elástica $K = 2,8 \cdot 10^3$ N/m.

Adotando $g = 10$ m/s², calcule:
a) a intensidade do empuxo recebido pelo bloco;
b) a deformação da mola.

65. (Unip-SP) Na figura, as esferas maciças **A** e **B** estão ligadas por um fio ideal e o sistema está em equilíbrio. A esfera **A** está no interior de um líquido homogêneo de densidade **2d** e a esfera **B** está no interior de outro líquido homogêneo de densidade **3d**.

Sabendo que as esferas têm raios iguais e que a esfera **A** tem densidade **d**, podemos concluir que a densidade da esfera **B** vale:
a) d. b) 2d. c) 3d. d) 4d. e) 5d.

66. E.R. Um bloco de gelo flutua na água, conforme representa a figura a seguir. O gelo e a água encontram-se em equilíbrio térmico, num local em que a pressão atmosférica é normal. Demonstre que, se o gelo se fundir, o nível da água no recipiente na situação final não se alterará. Admita que na situação final a temperatura do sistema ainda seja de 0 °C.

Resolução:

Para que o gelo permaneça em equilíbrio, flutuando na água, seu peso deve ter módulo igual ao do empuxo recebido pela fração imersa de seu volume. Assim:

$$m_G\ g = \mu_A V_i\, g \Rightarrow m_G = \mu_A V_i \quad \text{(I)}$$

Para que a água proveniente da fusão do gelo permaneça em equilíbrio, seu peso deve ter módulo igual ao do empuxo recebido. Assim:

$$m_A\ g = \mu_A V_A\, g \Rightarrow m_A = \mu_A V_A \quad \text{(II)}$$

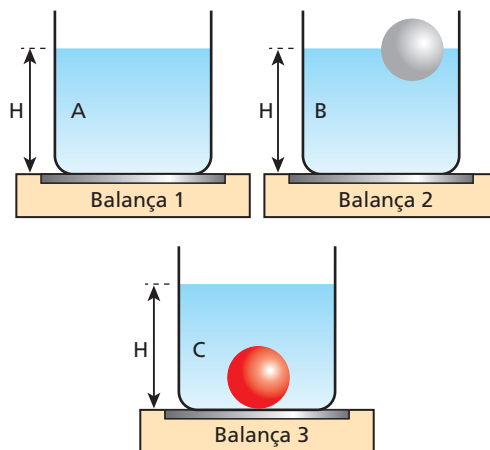
Considerando, entretanto, a conservação da massa do gelo que se funde, podemos escrever:

$$m_A = m_G$$

Portanto, de (I) e (II), vem:

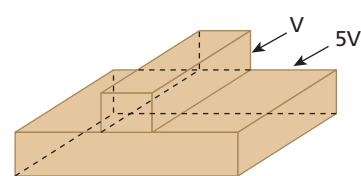
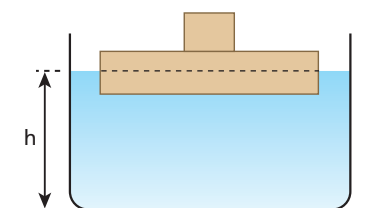
$$\mu_A V_A = \mu_A V_i \Rightarrow \boxed{V_A = V_i}$$

Temos, então, que o volume de água proveniente da fusão do gelo (V_A) é igual ao volume da fração do gelo imersa inicialmente na água (V_i). Assim, se o volume de água deslocado pelo gelo e pela água oriunda de sua fusão é o mesmo, podemos afirmar que o nível da água no recipiente não se alterará.

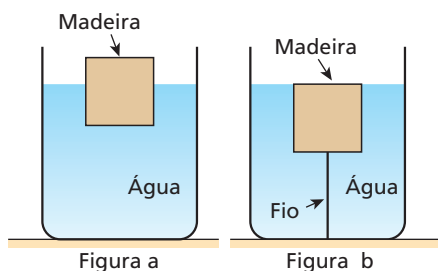
67. (Unip-SP) Considere três recipientes idênticos, contendo um mesmo líquido homogêneo, até a mesma altura **H**, colocados em cima de balanças idênticas em um plano horizontal. O recipiente **A** só contém líquido. O recipiente **B**, além do líquido, contém uma esfera homogênea que está em equilíbrio flutuando em sua superfície. O recipiente **C**, além do líquido, contém uma esfera homogênea que, por ser mais densa que o líquido, afundou e está comprimindo o fundo do recipiente.

As balanças 1, 2 e 3, calibradas em newtons, indicam, respectivamente, F_1, F_2 e F_3. Podemos afirmar que:
a) $F_1 = F_2 = F_3$.
b) $F_3 > F_2 > F_1$.
c) $F_3 < F_2 < F_1$.
d) $F_1 = F_2 > F_3$.
e) $F_1 = F_2 < F_3$.

68. (Unesp-SP) Um bloco de madeira, de volume **V**, é fixado a outro bloco, construído com madeira idêntica, de volume 5V, como representa a figura 1.

Em seguida, o conjunto é posto para flutuar na água, de modo que o bloco menor fique em cima do maior. Verifica-se, então, que $\frac{3}{5}$ do volume do bloco maior ficam imersos e que o nível da água sobe até a altura **h**, como mostra a figura 2.

Se o conjunto for virado, de modo a flutuar com o bloco menor embaixo do maior:

a) a altura **h** diminuirá e $\frac{1}{5}$ do volume do bloco maior permanecerá imerso.
b) a altura **h** permanecerá a mesma e $\frac{2}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
c) a altura **h** aumentará e $\frac{3}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
d) a altura **h** permanecerá a mesma e $\frac{4}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.
e) a altura **h** aumentará e $\frac{5}{5}$ do volume do bloco maior permanecerão imersos.

69. (Mack-SP) Um cubo de madeira (densidade = 0,80 g/cm^3) de aresta 20 cm flutua em água (massa específica = 1,0 g/cm^3) com a face superior paralela à superfície livre da água. Adotando g = 10 m/s^2, a diferença entre a pressão na face inferior e a pressão na face superior do cubo é:
a) $1{,}2 \cdot 10^3$ Pa.
b) $1{,}6 \cdot 10^3$ Pa.
c) $2{,}4 \cdot 10^3$ Pa.
d) $3{,}0 \cdot 10^3$ Pa.
e) $4{,}0 \cdot 10^3$ Pa.

70. (UFPI) Um cubo de madeira, de aresta a = 20 cm, flutua, parcialmente imerso em água, com $\frac{2}{5}$ de cada aresta vertical fora d'água (a densidade da água é ρ_A = 1,0 g/cm^3), conforme a figura **a**. Um fio é então amarrado, prendendo a base do cubo ao fundo do recipiente, como na figura **b**. Se o módulo da aceleração da gravidade é 10 m/s^2, a intensidade da força tensora no fio é:

a) 64 N.
b) 48 N.
c) 32 N.
d) 16 N.
e) 8,0 N.

71. (UFF-RJ) Recentemente, alguns cubanos tentaram entrar ilegalmente nos Estados Unidos. Usaram um caminhão Chevrolet 1951 amarrando-o em vários tambores de óleo vazios, utilizados como flutuadores. A guarda costeira norte-americana interceptou o caminhão próximo ao litoral da Flórida e todos os ocupantes foram mandados de volta para Cuba.

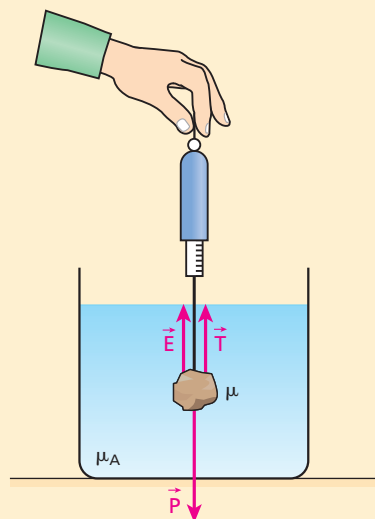
U.S. Coast Guard, Gregory Wald/AP Photo/Glow Images

Dados:
- massa do caminhão M_C = 1 560 kg;
- massa total dos tambores m_T = 120 kg;
- volume total dos tambores V_T = 2 400 litros;
- massa de cada um dos cubanos m = 70 kg;
- densidade da água ρ = 1,0 g/cm^3 = 1,0 kg/litro.

Supondo-se que apenas os tambores são responsáveis pela flutuação de todo o sistema, é correto afirmar que o número máximo de passageiros que o "caminhão-balsa" poderia transportar é igual a:
a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 11.
e) 12.

72. E.R. Um estudante, utilizando uma balança de mola tipo dinamômetro, faz no ar e na água a pesagem de um corpo maciço, constituído de um metal de massa específica μ. Sendo **P** a medida obtida no ar e μ_A a massa específica da água, determine a medida obtida na água.

Resolução:

O peso aparente P_{ap} registrado pela balança corresponde à intensidade da força de tração exercida em suas extremidades.
Com o corpo totalmente imerso na água, temos o esquema de forças da figura a seguir:

$\vec{T}$ = força de tração (peso aparente registrado pela balança);
$\vec{E}$ = empuxo;
$\vec{P}$ = peso.
Na situação de equilíbrio:
$\vec{T} + \vec{E} + \vec{P} = \vec{0}$
Em módulo:

$$T + E = P$$
$$T = P - E \Rightarrow P_{ap} = P - \mu_A V g \quad \text{(I)}$$

Sendo $\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\mu}$ (II)

Substituindo (II) em (I), vem:

$$P_{ap} = P - \mu_A \frac{m}{\mu} g \Rightarrow P_{ap} = P - \frac{\mu_A}{\mu} P$$

$$\boxed{P_{ap} = P\left(1 - \frac{\mu_A}{\mu}\right)}$$

73. (Unifor-CE) Na construção do Porto de Pecém, foram usados blocos de concreto deslocados por grandes guindastes a fim de empilhá-los na construção do atracadouro. Verificou-se que blocos que pesavam 8 000 N, quando suspensos no ar, pesavam 5 000 N quando totalmente submersos na água. Se a densidade volumétrica da água é $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³, então podemos concluir que a densidade volumétrica do concreto é:

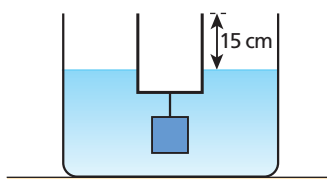
a) $\frac{5}{3} \cdot 10^3$ kg/m³

b) $\frac{8}{3} \cdot 10^3$ kg/m³

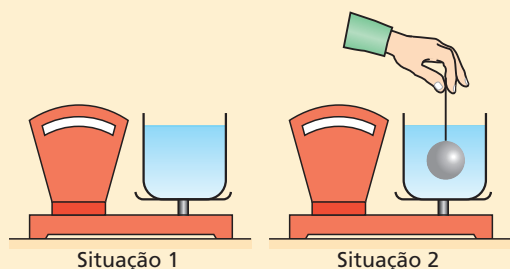
c) $\frac{5}{2} \cdot 10^3$ kg/m³

d) $\frac{13}{3} \cdot 10^3$ kg/m³

e) $\frac{8}{5} \cdot 10^3$ kg/m³

74. O esquema abaixo representa uma lata que flutua em água, de densidade igual a 1,0 g/cm³. A altura da parte emersa da lata é de 15 cm, e o corpo pendurado ao seu fundo é um bloco de forma cúbica de 10 cm de aresta.

Sabendo que a base da lata é um quadrado de 20 cm de lado, se o bloco for introduzido dentro da lata, a altura da parte emersa:

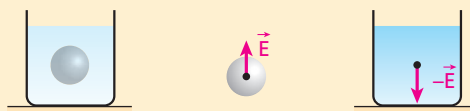
a) não será alterada.
b) passará a ser de 17,5 cm.
c) passará a ser de 14,5 cm.
d) passará a ser de 12,5 cm.
e) o sistema afundará.

75. E.R. Na situação 1 da figura a seguir, tem-se um recipiente com água em equilíbrio sobre o prato de uma balança que, nessas condições, indica 80 N. Na situação 2, uma esfera de chumbo de $2{,}0 \cdot 10^2$ cm³ de volume é totalmente imersa na água, permanecendo suspensa por um fio de espessura desprezível sem contactar as paredes do recipiente.

Sabendo que a densidade da água vale 1,0 g/cm³ e que $g = 10$ m/s², determine a indicação da balança no caso da situação 2.

Resolução:

Pelo fato de estar imersa na água, a esfera recebe o empuxo $\vec{E}$, força vertical e dirigida para cima, que corresponde à ação da água. Conforme a Terceira Lei de Newton, entretanto, ao empuxo $\vec{E}$ deve corresponder uma reação $-\vec{E}$, e isso se verifica. A esfera reage na água com uma força de mesma intensidade que o empuxo, vertical e dirigida para baixo, que provoca aumento na indicação da balança.

A esfera está em equilíbrio, totalmente imersa na água. Nessas condições, ela interage com a água, havendo troca de forças de ação e reação.

A água age na esfera, aplicando-lhe a força $\vec{E}$ (empuxo).
A esfera reage na água, aplicando-lhe a força $-\vec{E}$.

Sendo **I'** e **I**, respectivamente, as indicações final e inicial da balança, temos:

$$I' = I + E$$

em que a intensidade **E** da força que a esfera troca com a água é calculada por:

$$E = \mu_a V g$$

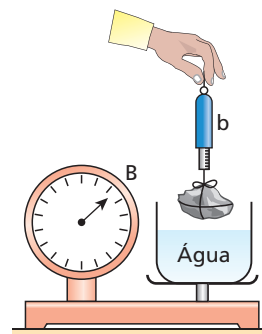
Como $\mu_a = 1{,}0$ g/cm³ $= 1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³,
$V = 2{,}0 \cdot 10^2$ cm³ $= 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m³ e $g = 10$ m/s², vem:

$$I' = I + \mu_a V g$$

$$I' = 80 + 1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \quad (N)$$

Assim:

$$\boxed{I' = 82 \text{ N}}$$

76. (FMPA-MG) Um vaso com água está sobre o prato de uma balança (**B**), a qual indica determinado peso. Acima do vaso, uma pedra está dependurada por um barbante em uma balança de mola (**b**), do tipo usado por verdureiros. Se abaixarmos (**b**) de modo a mergulhar a pedra na água, mas sem a encostar no fundo do vaso, o que ocorrerá com as indicações de (**B**) e (**b**)?

77. (Unifor-CE) Um corpo, constituído de um metal cuja densidade é 7,5 g/cm³, é abandonado no interior de um líquido de densidade 1,5 g/cm³. A aceleração que o corpo adquire no interior desse líquido assim que inicia o movimento, em m/s², vale:
(**Dado:** aceleração da gravidade = 10 m/s².)

a) 8,0. b) 6,0. c) 5,0. d) 4,0. e) 2,5.

78. Uma esfera de massa 1,0 kg e de volume $9{,}8 \cdot 10^{-4}$ m³ é abandonada na água de um tanque, percorrendo, em movimento vertical e acelerado, 2,5 m até chegar ao fundo. Sendo a densidade da água igual a $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³ e $g = 10$ m/s², calcule depois de quanto tempo a esfera chega ao fundo do tanque. Considere desprezível a força de resistência viscosa da água.

79. (Olimpíada Brasileira de Física) Uma bola homogênea de densidade igual a $\frac{2}{3}$ da densidade da água é solta de uma altura $h = 10$ m acima do nível da água de uma piscina bem profunda. Despreze o efeito do ar e adote $g = 10$ m/s².

a) Qual a profundidade máxima que a bola atinge em relação à superfície da água? Despreze quaisquer efeitos de turbulência que poderão ocorrer durante o movimento. Considere que a força que a água aplica na bola seja apenas o empuxo de Arquimedes, isto é, despreze a força de resistência viscosa. Não considere perdas de energia mecânica na colisão da bola com a água.
b) Qual é o tempo gasto pela bola durante a sua primeira permanência dentro da água?

Um banho revelador

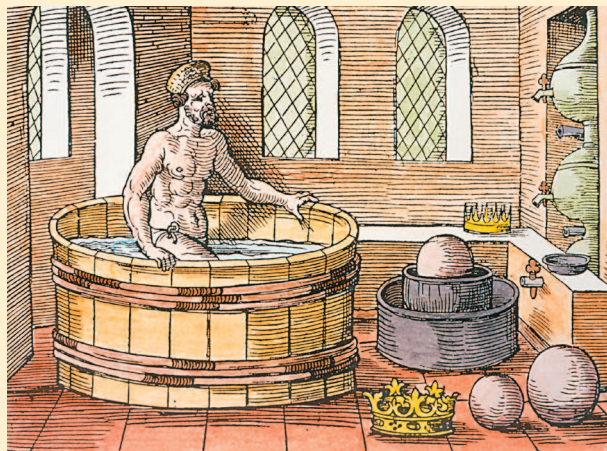
Thinstock/Getty Images

Hierão, tirano de Siracusa, no século III a.C., havia encomendado uma coroa de ouro para homenagear uma divindade, mas suspeitava de que o ourives o enganara, não utilizando ouro puro, conforme havia sido combinado. Ele queria descobrir, sem danificar o objeto, se em sua confecção não teriam sido utilizados outros metais, como, por exemplo, a prata. Só um homem talvez conseguisse resolver a questão: seu amigo Arquimedes — filho de Fidias, o astrônomo —, inventor de vários mecanismos e notabilizado por seus trabalhos em Matemática.

Hierão mandou chamá-lo e pediu-lhe que pusesse fim à sua dúvida. Arquimedes aceitou a incumbência e pôs-se a procurar uma solução para o problema, que lhe ocorreu durante um memorável banho. Enquanto se banhava, observou que o volume de água que se elevava na banheira, ao submergir, era igual ao volume do seu próprio corpo. Ali estava a chave que viria a desvendar o enigma do tirano. No entusiasmo da descoberta, Arquimedes teria saído nu pelas ruas, gritando a quem pudesse ouvir: *Eureka! Eureka!* (Encontrei! Encontrei!).

Agora bastaria aplicar ao problema em questão o método que descobrira. Então ele mediu o volume de água que transbordava de um recipiente totalmente cheio (volume deslocado) quando nele eram mergulhados, sucessivamente, um corpo de ouro de massa igual à da coroa, um corpo de prata de massa igual à da coroa e a própria coroa. Tendo verificado que o volume de água deslocado pela coroa era intermediário entre os outros dois, por análise das densidades, ele concluiu que a coroa não era de ouro puro e, desse modo, também determinou a porcentagem de prata utilizada em sua confecção.

Arquimedes foi um dos maiores gênios de todos os tempos. Incluídos nas suas muitas criações estão os espelhos ustórios (que queimam; que facilitam a combustão): superfícies côncavas refletoras com as quais os defensores de Siracusa teriam queimado a distância — pela "concentração" dos raios solares — navios romanos que sitiavam a região.

Além disso, Arquimedes foi um exímio conhecedor das leis das alavancas, resumindo a importância desses dispositivos dizendo: "Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e moverei o mundo".

Descubra mais

1. Na construção de barragens e diques, a espessura desses retentores de água cresce uniformemente do topo para a base. Explique por quê.

2. Explique detalhadamente o mecanismo que permite a sucção de um refrigerante utilizando-se um canudinho com comprimento próximo de 20 cm.

3. Por que razão os meios gasosos não são tão eficientes para transmitir acréscimos de pressão como os meios líquidos?

4. O que flutua em água com maior porcentagem de volume imerso, um cubo maciço de isopor com 1,0 m de aresta ou um cubo maciço de isopor com 10 cm de aresta? Justifique matematicamente sua resposta.

5. Como as plumas de cisnes, gansos e patos, entre outras aves aquáticas, colaboram na flutuação dessas aves?

6. Uma das etapas no treinamento de astronautas destinados à Estação Espacial Internacional (EEI) consiste em sua permanência dentro de uma enorme piscina onde são instaladas maquetes, em tamanho natural, de alguns engenhos que estarão presentes na missão. Vestidos em trajes semelhantes aos espaciais, os astronautas são levados a realizar operações delicadas e demoradas, que envolvem o uso de equipamentos sofisticados. Com isso, ficam minimizadas as possibilidades de erros nas situações reais. Por que esses treinamentos são realizados dentro da água?

Faça você mesmo

Apertou a garrafa? Afunda!

Vamos construir um **ludião**? Este é o nome de um dispositivo bastante simples que, além de divertido, serve para verificar os princípios de Pascal e Arquimedes.

Consiga uma garrafa de plástico transparente o mais flexível possível (garrafa PET) com capacidade de 2 L. Obtenha também uma caneta esferográfica e alguns clipes, desses utilizados para prender papel. Você deverá retirar a carga da caneta, mantendo, porém, a tampinha que veda a extremidade oposta à ponta devidamente alojada. A caneta, de preferência transparente, não poderá ter nenhum orifício ao longo de sua extensão. Se houver algum furo, por menor que seja, este deverá ser vedado com um pedaço de fita adesiva, por exemplo.

Encha a garrafa com água e emborque a caneta dentro do líquido com a extremidade aberta voltada para baixo. Observe que a caneta deverá receber previamente alguns clipes em sua extremidade aberta de modo a permanecer flutuando na água com um pequeno comprimento emerso. Veja as imagens ao lado: na fotografia ①, aparece o ludião; na ②, sua situação de equilíbrio na água.

Apertando-se agora o corpo da garrafa em sua região central, o nível livre da água sobe, comprimindo o ar confinado entre o líquido e a tampa do recipiente. Esse aumento de pressão provocado no ar é então trasmitido integralmente a todos os pontos da água (Princípio de Pascal), fazendo com que uma parte do interior da caneta seja invadida por líquido. Isso torna o ludião mais pesado e mais denso que a água e, dessa maneira, a intensidade do seu peso supera a intensidade do empuxo exercido pela água e o ludião afunda. Observe a fotografia ③.

Suprimindo-se a pressão sobre a garrafa, porém, a água sai do interior da caneta e o ludião, agora mais leve e menos denso que no caso anterior, volta a flutuar como na situação inicial. Isso ocorre porque a intensidade do empuxo supera a do peso, o que impele o ludião para cima.

Em resumo, pressionando-se a garrafa, o ludião desce e suprimindo-se o acréscimo de pressão, o ludião sobe.

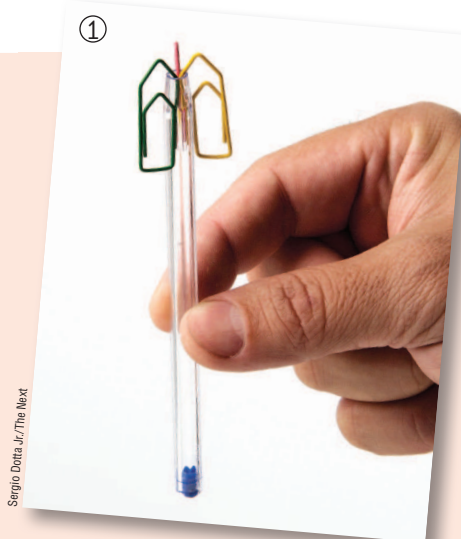
Os submarinos imergem e emergem de maneira semelhante. Para afundar, eles admitem água em seus compartimentos de lastro. Isso os torna mais pesados e mais densos que a água. A intensidade do peso supera a do empuxo, fazendo-os afundar. Para retornar à superfície, um sistema de bombas expulsa a água dos compartimentos de lastro e os submarinos ficam mais leves e menos densos que a água. Neste caso, a intensidade do empuxo predomina sobre a do peso, obrigando-os aflorar.

①

Sergio Dotta Jr./The Next

②

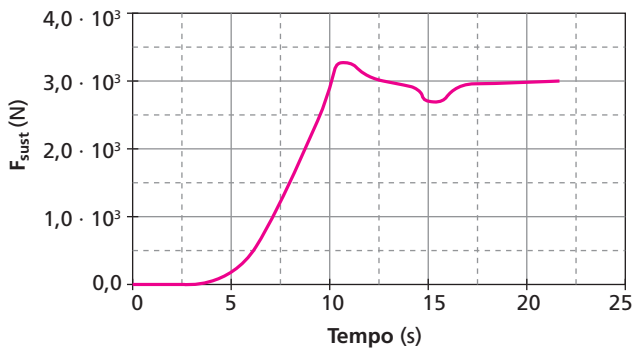
Sergio Dotta Jr./The Next

③

Sergio Dotta Jr./The Next

Exercícios nível 3

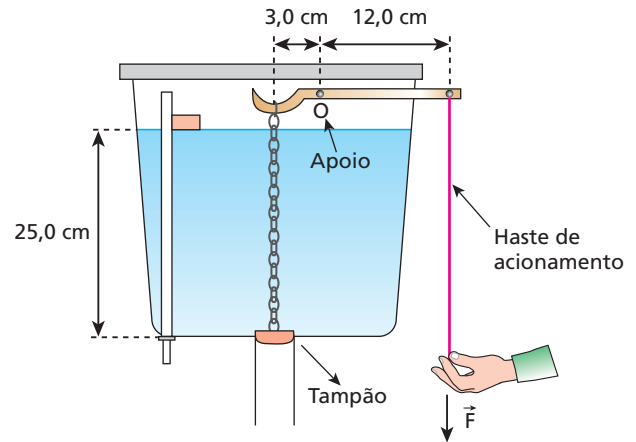
80. (Mack-SP) Num processo industrial de pintura, as peças recebem uma película de tinta de 0,1 mm de espessura. Considere a densidade absoluta da tinta igual a $0{,}8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. A área pintada com 10 kg de tinta é igual a:

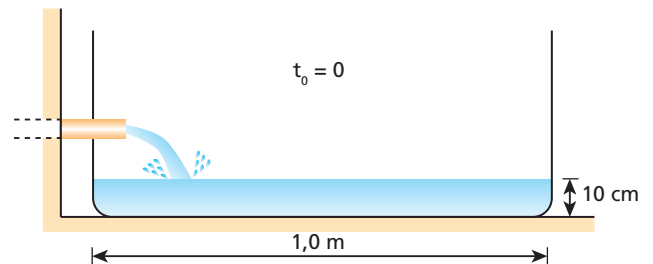
a) $1\,250 \text{ m}^2$.
b) 625 m^2.
c) 125 m^2.
d) 75 m^2.
e) 50 m^2.

81. (Unicamp-SP) O avião estabeleceu um novo paradigma nos meios de transporte. Em 1906, **Alberto Santos-Dumont** realizou em Paris um voo histórico com o 14-Bis. A massa desse avião, incluindo o piloto, era de 300 kg, e a área total das duas asas era de aproximadamente 50 m^2.
A força de sustentação de um avião, dirigida verticalmente de baixo para cima, resulta da diferença de pressão entre a parte inferior e a parte superior das asas. O gráfico representa, de forma simplificada, o módulo da força de sustentação aplicada ao 14-Bis em função do tempo, durante a parte inicial do voo.

a) Em que instante a aeronave decola, ou seja, perde contato com o chão?
b) Qual é a diferença de pressão entre a parte inferior e a parte superior das asa, $\Delta p = p_{inf} - p_{sup}$, no instante t = 20 s?

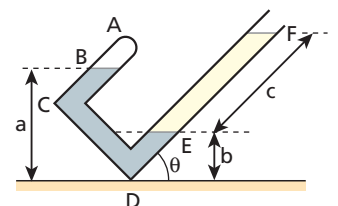
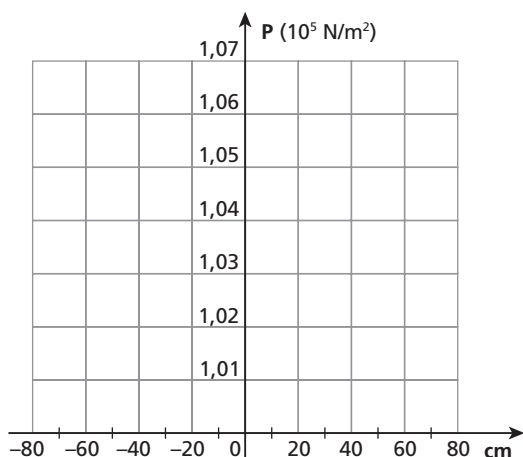
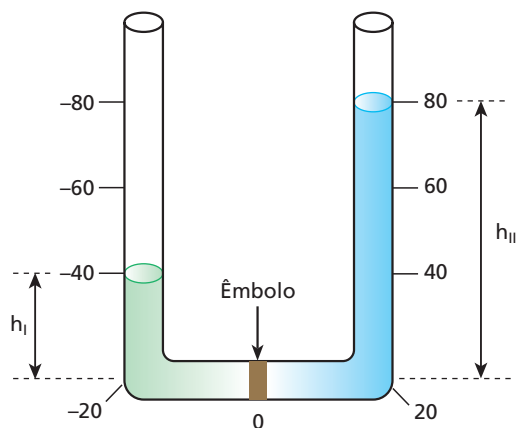
82. (UFSCar-SP) Quando efetuamos uma transfusão de sangue, ligamos a veia do paciente a uma bolsa contendo plasma, posicionada a uma altura **h** acima do paciente. Considerando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a densidade do plasma igual a $1{,}04 \text{ g/cm}^3$, se uma bolsa de plasma for colocada 2,0 m acima do ponto da veia por onde se fará a transfusão, a pressão hidrostática do plasma ao entrar na veia será de:

a) 0,0016 mm Hg.
b) 0,016 mm Hg.
c) 0,156 mm Hg.
d) 15,6 mm Hg.
e) 158 mm Hg.

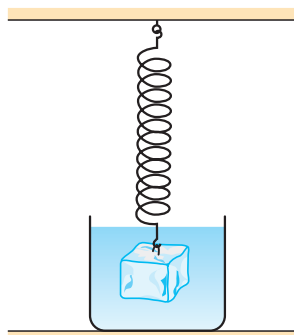
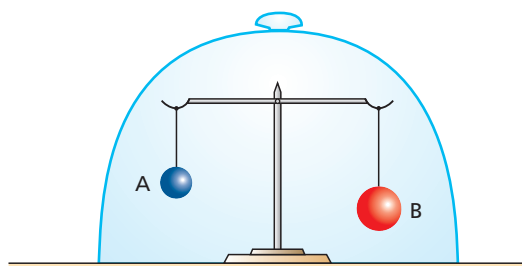
83. (Olimpíada Brasileira de Física) A superfície livre da água em uma caixa de descarga residencial está a uma altura de 25,0 cm de sua base, onde existe um orifício de diâmetro 4,0 cm para a saída da água. Um tampão de massa desprezível fecha o orifício, devido à ação das forças de pressão exercidas pela água. A descarga é disparada por meio de uma alavanca, também de massa desprezível, com apoio **O** a 3,0 cm da vertical sobre o tampão e a 12,0 cm da haste de acionamento. Um esboço da caixa está na figura a seguir.

A densidade da água vale $1{,}0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10 \text{ m/s}^2$. Adotando-se $\pi \cong 3$, responda:
Qual a intensidade da força vertical $\vec{F}$ necessária para liberar o tampão?

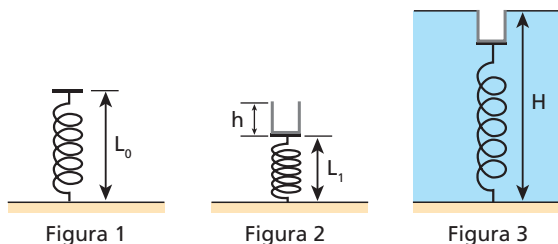
84. No esquema seguinte, está representada, no instante $t_0 = 0$, uma caixa-d'água, cuja base tem área igual a $1{,}0 \text{ m}^2$. A partir desse instante, a caixa passa a ser preenchida com a água proveniente de um tubo, que opera com vazão constante de $1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{min}$.

Desprezando-se as perturbações causadas pela introdução da água na caixa, adotando-se $g = 10 \text{ m/s}^2$ e considerando-se que a água tem densidade igual a $1{,}0 \text{ g/cm}^3$, pede-se:

a) traçar o gráfico quantitativo da pressão exercida pela água na base do reservatório, desde o instante $t_0 = 0$ até o instante t = 20 min (admita que não ocorram transbordamentos);
b) calcular, no instante t = 20 min, as intensidades das forças resultantes aplicadas pela água nas cinco paredes molhadas da caixa.

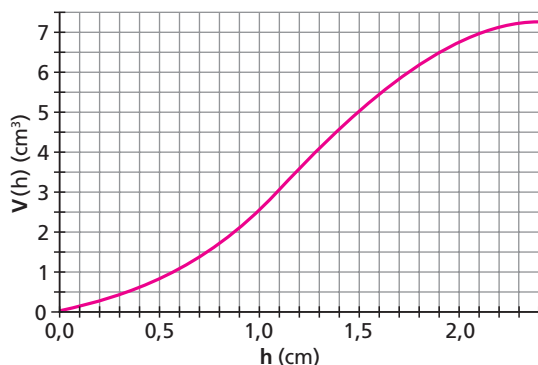
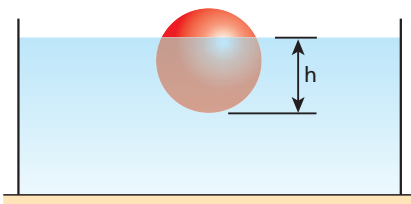
85. Um tubo de vidro, com uma extremidade fechada, **A**, e outra aberta, conforme a figura, apoia-se em **D** sobre um plano horizontal. O trecho AB do tubo contém ar, o trecho BCDE contém mercúrio e o trecho EF contém um líquido que não se mistura nem se combina com o mercúrio. Verifica-se que, girando o tubo em torno do ponto **D** num plano vertical, a pressão do trecho AB se torna igual à pressão atmosférica reinante, quando $\theta = 30°$. Nessa posição, tem-se a = 10 cm, b = 8 cm e c = 45 cm.
Sendo a densidade absoluta do mercúrio igual a $13{,}5 \text{ g/cm}^3$, calcule a densidade do líquido contido no trecho EF do tubo.

86. (Fuvest-SP – mod.) Um tubo em forma de **U**, graduado em centímetros, de pequeno diâmetro, secção constante, aberto nas extremidades, contém dois líquidos I e II, incompressíveis, em equilíbrio e que não se misturam. A densidade do líquido I é $\rho_I = 1,8 \cdot 10^3$ kg/m³ e as alturas $h_I = 20$ cm e $h_{II} = 60$ cm, dos respectivos líquidos, estão representadas na figura. A pressão atmosférica local vale $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ N/m². Os líquidos estão separados por um pequeno êmbolo que pode deslizar livremente sem atrito.

a) Determine o valor da densidade ρ_{II} do líquido II.
b) Utilizando um sistema de eixos semelhante ao desenhado anteriormente, faça um gráfico quantitativo da pressão **P** nos líquidos em função da posição ao longo do tubo. Considere zero (0) o ponto médio da base do tubo; à direita do zero, situam-se as marcas positivas no tubo e à esquerda, as marcas negativas.

87. Um cubo de gelo a 0 °C, preso a uma mola, é totalmente imerso em um recipiente com água a 25 °C, conforme representa a figura. À medida que o gelo for se fundindo, podemos afirmar que:

a) o comprimento da mola permanecerá constante.
b) o comprimento da mola irá aumentando.
c) o comprimento da mola irá diminuindo.
d) o nível livre da água no recipiente permanecerá inalterado.
e) o nível livre da água no recipiente irá subindo.

88. O esquema abaixo representa uma balança de travessão de braços iguais confinada no interior de uma campânula, na qual existe ar. A balança está em equilíbrio, tendo em suas extremidades os corpos **A** (volume V_A) e **B** (volume V_B). Sabe-se que $V_A < V_B$.

Se, por um processo qualquer, for retirado o ar de dentro da campânula:
a) a balança não sofrerá perturbações.
b) o travessão penderá para o lado do corpo **A**.
c) o travessão penderá para o lado do corpo **B**.
d) os corpos **A** e **B** perderão seus pesos.
e) os corpos **A** e **B** receberão empuxos diferentes.

89. (Fuvest-SP) Considere uma mola ideal de comprimento $L_0 = 35$ cm presa no fundo de uma piscina vazia (figura 1). Prende-se sobre a mola um recipiente cilíndrico de massa m = 750 g, altura h = 12,5 cm e secção transversal externa S = 300 cm², ficando a mola com comprimento $L_1 = 20$ cm (figura 2). Quando, enchendo-se a piscina, o nível da água atinge a altura **H**, começa a entrar água no recipiente (figura 3).

Dados: $\rho_{água} = 1,0$ g/cm³; g = 10 m/s².
a) Qual o valor da constante elástica da mola?
b) Qual o valor, em **N**, da intensidade da força que traciona a mola quando começa a entrar água no recipiente?
c) Qual o valor da altura **H** em cm?

90. (Fuvest-SP) Imagine que, no final deste século XXI, habitantes da Lua vivam em um grande complexo pressurizado, em condições equivalentes às da Terra, tendo como única diferença a aceleração da gravidade, que é menos intensa na Lua. Considere as situações imaginadas bem como as possíveis descrições de seus resultados, se realizadas dentro desse complexo, na Lua:
I. Ao saltar, atinge-se uma altura maior que quando o salto é realizado na Terra.
II. Se uma bola está boiando em uma piscina, essa bola manterá maior volume fora da água que quando o experimento é realizado na Terra.
III. Em pista horizontal, um carro, com velocidade v_0, consegue parar completamente em uma distância maior que quando o carro é freado na Terra.
Assim, pode-se afirmar que estão corretos apenas os resultados propostos em:
a) I. b) I e II. c) I e III. d) II e III. e) I, II e III.

91. (Unicamp-SP) Uma esfera de raio 1,2 cm e massa 5,0 g flutua sobre a água, em equilíbrio, deixando uma altura **h** submersa, conforme a figura. O volume submerso como função de **h** é dado no gráfico. Sendo a densidade da água 1,0 g/cm^3 e g = 10 m/s^2:

a) calcule o valor de **h** no equilíbrio;
b) ache a intensidade da força vertical para baixo necessária para afundar a esfera completamente.

92. (UFRJ) Uma esfera maciça flutua na água contida em um recipiente. Nesse caso, a superfície livre da água encontra-se a uma altura **h** do fundo do recipiente, como mostra a figura 1.

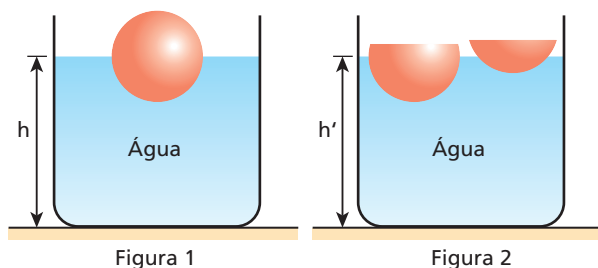
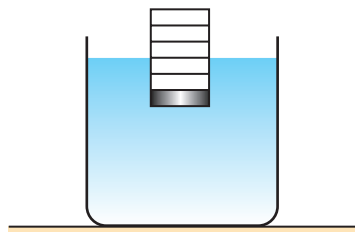
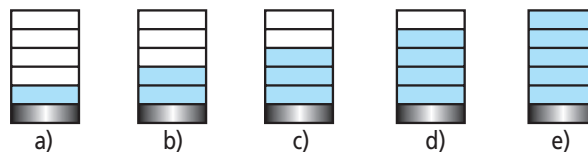
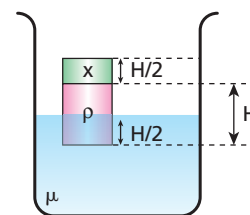
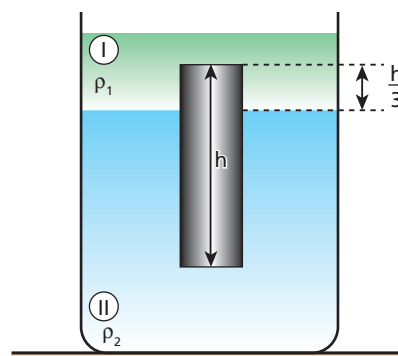



Figura 1 Figura 2

Corta-se a esfera em dois pedaços que, quando postos de volta na água, também flutuam, como mostra a figura 2. Nesse caso, a superfície livre da água encontra-se a uma altura h' do fundo do recipiente. Verifique se h' > h, h' = h ou h' < h. Justifique.

93. (Fuvest-SP) Um recipiente cilíndrico vazio flutua em um tanque de água com parte de seu volume submerso, como na figura abaixo.

O recipiente possui marcas graduadas igualmente espaçadas, paredes laterais de volume desprezível e um fundo grosso e pesado.

Quando o recipiente começa a ser preenchido, lentamente, com água, a altura máxima que a água pode atingir em seu interior, sem que ele afunde totalmente, é mais bem representada por:

94. (UFF-RJ) Um cilindro, formado por duas substâncias de massas específicas **x** e **ρ**, flutua em equilíbrio na superfície de um líquido de massa específica **μ** na situação representada na figura. A massa específica **x** pode ser obtida em função de **μ** e **ρ** por meio da expressão:

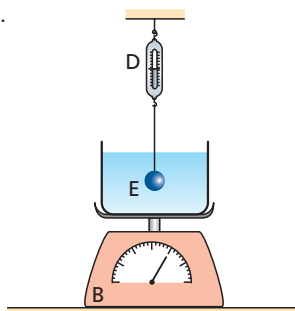
a) $2\mu + \rho$
b) $\mu - 2\rho$
c) $\frac{\mu}{2} + \rho$
d) $\mu + 2\rho$
e) $\frac{\mu}{2} - \rho$

95. (Fuvest-SP) Um recipiente contém dois líquidos, I e II, de massas específicas (densidades) ρ_1 e ρ_2, respectivamente. Um cilindro maciço de altura **h** encontra-se em equilíbrio, na região da interface entre os líquidos, como mostra a figura.

Podemos afirmar que a massa específica do material do cilindro vale:

a) $\frac{(\rho_1 + 2\rho_2)}{2}$
b) $\frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2}$
c) $\frac{(2\rho_1 + \rho_2)}{3}$
d) $\frac{(\rho_1 + 2\rho_2)}{3}$
e) $\frac{2(\rho_1 + \rho_2)}{3}$

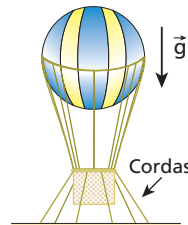
96. Um corpo aparenta ter massa de 45 g no ar e de 37 g quando totalmente imerso na água (massa específica de 1,0 g/cm^3). Sabendo que a massa específica do material de que é feito o corpo vale 9,0 g/cm^3, calcule o volume da cavidade que, certamente, deve existir no corpo. Considere desprezível o empuxo do ar, bem como o ar existente na cavidade do corpo.

97. Um barco de madeira de massa 500 kg é transportado de um rio para o mar. Supondo que a densidade da água do rio valha 1,00 g/cm^3 e que a da água do mar valha 1,03 g/cm^3, calcule a massa adicional que deve ser colocada sobre o barco para que o volume da parte imersa seja o mesmo, no rio e no mar.

98. Um barqueiro dispõe de uma chata que permite o transporte fluvial de cargas até 10 000 N. Ele aceitou um trabalho de transporte de um lote de 50 barras maciças de ferro (10 g/cm³) de 200 N cada. Por um erro de contagem, a firma enviou 51 barras. Não querendo perder o freguês, mas também procurando não ter prejuízo com duas viagens, o barqueiro resolveu amarrar certo número **n** de barras embaixo do barco, completamente submersas. Qual deve ser o número **n** mínimo para que a travessia das 51 barras seja feita numa só viagem? Densidade da água: 1,0 g/cm³.

99. Na montagem experimental abaixo, o dinamômetro **D** e a balança **B** têm escalas calibradas em kgf. No local, a gravidade é normal. A esfera **E**, de 20,0 kg de massa e volume igual a 2,40 litros, encontra-se em equilíbrio totalmente imersa na água (densidade de $1{,}00 \cdot 10^3$ kg/m³).

A esfera, inicialmente sustentada pelo fio ideal, não toca as paredes do frasco. Sabendo que o peso do conjunto frasco-água vale 40,0 kgf:

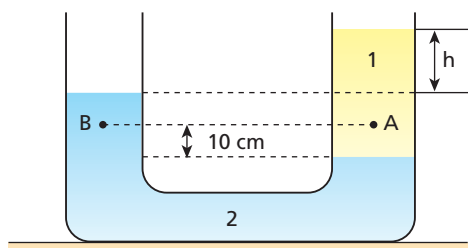
a) determine as indicações de **D** e de **B**;
b) calcule a nova indicação de **B** supondo que o fio que sustenta **E** seja cortado (admita **E** em repouso no fundo do frasco).

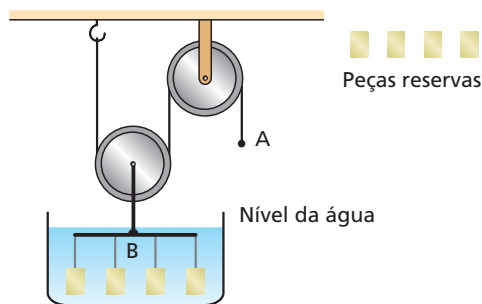
100. (Fuvest-SP) Um balão de pesquisa, cheio de gás hélio, está sendo preparado para sua decolagem. A massa do balão vazio (sem gás) é M_B e a massa do gás hélio no balão é M_H. O balão está parado devido às cordas que o prendem ao solo. Se as cordas forem soltas, o balão iniciará um movimento de subida vertical com aceleração de 0,2 m/s².

Para que o balão permaneça parado, sem a necessidade das cordas, deve-se adicionar a ele um lastro de massa igual a:
(Adote $|\vec{g}| = 10$ m/s².)

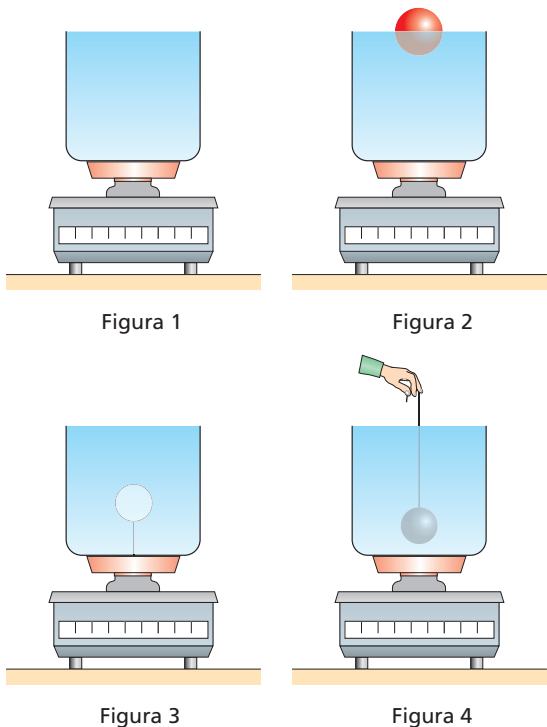
a) $0{,}2\ M_B$
b) $0{,}2\ M_H$
c) $0{,}02\ M_H$
d) $0{,}02\ (M_B + M_H)$
e) $0{,}02\ (M_B - M_H)$

101. Um corpo constituído de um material de peso específico de $2{,}4 \cdot 10^4$ N/m³ tem volume externo de $2{,}0 \cdot 10^3$ cm³. Abandonado no interior da água (densidade de 1,0 g/cm³), ele move-se verticalmente, sofrendo a ação de uma força resistente cuja intensidade é dada pela expressão $F_r = 56\ V$ (SI), em que **V** é o módulo de sua velocidade. Sendo $g = 10$ m/s², calcule a velocidade-limite do corpo, isto é, a máxima velocidade atingida em todo o movimento.

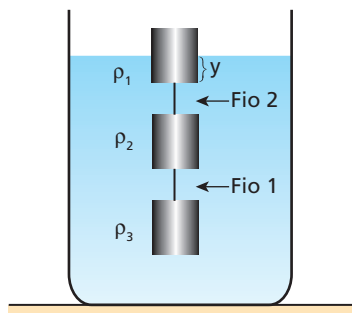
Para raciocinar um pouco mais

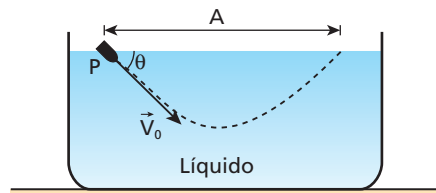
102. (Vunesp-FMJ-SP) O sistema de vasos comunicantes representado na figura contém dois líquidos imiscíveis, 1 e 2, de densidades ρ_1 e ρ_2, respectivamente. A diferença de pressão entre os pontos **A** e **B** é igual a $1{,}0 \cdot 10^3$ Pa e a densidade do líquido mais denso é igual a $2{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³.
Dado: $g = 10$ m/s²

a) Determine a densidade do líquido menos denso.
b) Estabeleça a relação entre a distância da superfície de separação dos líquidos e a superfície livre de cada líquido e o desnível **h**.

103. No sistema de polias da figura, considere que no ponto **B** estão presas quatro peças iguais de metal, as quais estão mergulhadas em água, e que no ponto **A**, inicialmente livre, pode-se também fixar peças de metal reservas, iguais às citadas anteriormente. Desprezando-se as massas dos fios, dos conectores e das polias, assim como todos os atritos, pode-se afirmar que:

a) o ponto **B** se movimentará para baixo se colocarmos duas peças reservas no ponto **A**;
b) o ponto **B** se movimentará para cima se colocarmos duas peças reservas no ponto **A**;
c) o ponto **B** se manterá em equilíbrio se deslocarmos duas peças desse ponto para o ponto **A**;
d) o ponto **B** se movimentará para baixo se colocarmos as quatro peças reservas no ponto **A**;
e) o ponto **B** se manterá em equilíbrio se colocarmos duas peças reservas no ponto **A**.

104. Nas quatro situações esquematizadas a seguir, um mesmo recipiente contém água até a boca e está em repouso sobre a plataforma de uma balança. Na figura 1, apenas o líquido preenche o recipiente; na figura 2, uma esfera de madeira flutua na superfície livre da água; na figura 3, uma esfera maciça de isopor (menos densa que a água) está presa ao fundo do recipiente por meio de um fio inextensível de massa desprezível e, na figura 4, uma esfera também maciça de aço (mais densa que a água) é mantida em equilíbrio, totalmente submersa, presa em um fio ideal.

Sendo I_1, I_2, I_3 e I_4 as indicações da balança nas situações das figuras 1, 2, 3 e 4 respectivamente, aponte a alternativa correta:

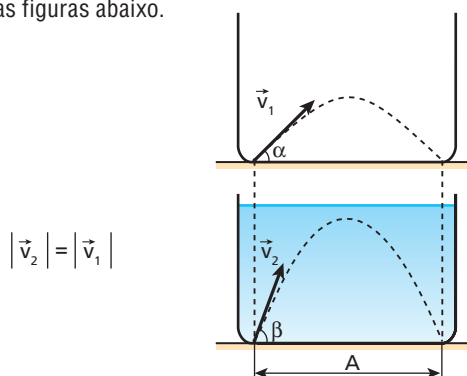
a) $I_3 < I_1 = I_2 < I_4$
b) $I_3 < I_1 = I_2 = I_4$
c) $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$
d) $I_3 < I_1 < I_2 < I_4$
e) $I_3 < I_1 < I_2 = I_4$

105. (Olimpíada Brasileira de Física) Três cilindros de mesma área da base **A** e altura **h** têm densidades $\rho_1 = 0{,}3\rho$, $\rho_2 = 1{,}1\rho$ e $\rho_3 = 1{,}2\rho$, em que ρ é a densidade da água. Esses três objetos estão ligados entre si por fios de massas desprezíveis e estão em equilíbrio num reservatório com água, como representado na figura abaixo.

Calcule as intensidades das trações nos fios 1 e 2 e o comprimento **y** da parte submersa do cilindro de densidade ρ_1. A aceleração da gravidade tem módulo **g**.

106. (Aman-RJ) Mergulha-se a boca de uma espingarda de rolha no ponto **P** da superfície de um líquido de densidade 1,50 g/cm^3 contido em um tanque. Despreze o atrito viscoso e considere que no local a aceleração da gravidade tem módulo 10,0 m/s^2. O cano da espingarda forma um ângulo (θ) de 45° abaixo da horizontal.

Supondo-se que a velocidade inicial ($\vec{V}_0$) da rolha tenha módulo igual a 6,0 m/s e que sua densidade seja igual a 0,60 g/cm^3, pode-se afirmar que a rolha irá aflorar à superfície da água a uma distância (**A**) do ponto **P** igual a:

a) 1,4 m.
b) 1,8 m.
c) 2,4 m.
d) 2,5 m.
e) 2,8 m.

107. Um projétil de densidade ρ_p é lançado com um ângulo α em relação à horizontal no interior de um recipiente vazio. A seguir, o recipiente é preenchido com um superfluido de densidade ρ_s, e o mesmo projétil é novamente lançado dentro dele, só que sob um ângulo β em relação à horizontal. Observa-se, então, que, para uma velocidade inicial $\vec{v}$ do projétil, de mesmo módulo que a do experimento anterior, não se altera seu alcance horizontal **A**.

Veja as figuras abaixo.

$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1|$

Sabendo-se que são nulas as forças de atrito num superfluido, pode-se então afirmar, com relação ao ângulo β de lançamento do projétil, que:

a) $\text{sen}\,\beta = \left(1 - \dfrac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen}\,\alpha$

b) $\text{sen}\,2\beta = \left(1 - \dfrac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen}\,2\alpha$

c) $\text{sen}\,2\beta = \left(1 + \dfrac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen}\,2\alpha$

d) $\cos\beta = \left(1 - \dfrac{\rho_s}{\rho_p}\right) \cos\alpha$

e) $\cos 2\beta = \left(1 + \dfrac{\rho_s}{\rho_p}\right) \text{sen}\,2\alpha$

Apêndice

Dinâmica dos fluidos

1. Preliminares

O estudo da **estática dos fluidos** ou **hidrostática** é sequenciado pelo da **dinâmica dos fluidos** ou **hidrodinâmica**. Essa abordagem, no entanto, é reservada ao Ensino Superior, mais especificamente aos cursos de ciências exatas, como Física e Engenharia. O desenvolvimento que faremos aqui será superficial e simplificado. Daremos ênfase a alguns conceitos que julgamos apropriados ao Ensino Médio.

A hidrodinâmica estuda o movimento dos fluidos em geral, como o escoamento da água em rios e tubulações, a circulação sanguínea no corpo humano, o deslocamento da fumaça expelida por chaminés etc.

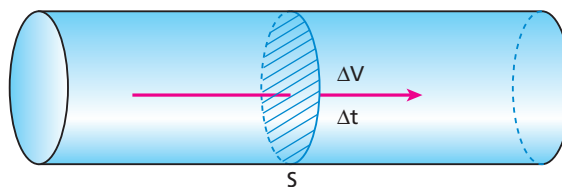
Nossa análise será restrita a algumas situações particulares em que estarão envolvidos fluidos ideais, particularmente líquidos **incompressíveis, não viscosos** e em **regime permanente de escoamento**.

Líquido incompressível: apresenta a mesma massa específica (ou densidade absoluta) em qualquer ponto, independentemente de acréscimos de pressão. Essa hipótese é aceitável, já que os líquidos em geral têm baixa compressibilidade.

Escoamento não viscoso: é o deslocamento em que as diversas camadas fluidas não trocam forças de atrito entre si, tampouco com as paredes da tubulação. Quanto maior for a viscosidade de um líquido, maior será a dissipação de energia mecânica durante seu escoamento, o que não será objeto de nosso estudo. O óleo lubrificante de motores, por exemplo, é mais viscoso que a água. Por isso, seu escoamento em idênticas condições é mais "moroso" que o da água, implicando maior produção de energia térmica.

Regime permanente (ou estacionário) de escoamento: a velocidade verificada em um dado ponto do fluxo é constante para qualquer valor de tempo, independentemente da partícula do fluido que esteja passando por esse local.

2. Vazão (Z)

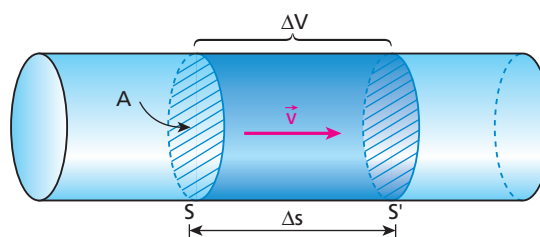
Consideremos um trecho de uma tubulação cilíndrica por onde escoa um líquido incompressível, não viscoso e em regime permanente. Por uma seção transversal **S** dessa tubulação passa um volume de líquido ΔV durante um intervalo de tempo Δt, conforme a ilustração a seguir.

Por definição, a vazão **Z** verificada em **S** é expressa por:

$$Z = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a vazão é medida em m^3/s.

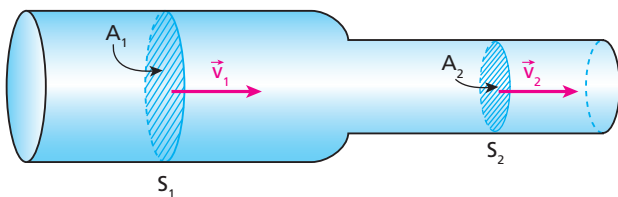
Paulo Fridman/Pulsar Imagens

Um dos vinte tubos da hidrelétrica de Itaipu. Esse duto despeja água sobre uma turbina acoplada a um gerador de tensão elétrica. Em cada tubo da usina a vazão de água é de 700 m^3/s, em média.

Durante um intervalo de tempo Δt, o volume de líquido que atravessa a seção de referência **S** pode ser calculado fazendo-se $\Delta V = A\,\Delta s$, em que **A** é a área de **S** e Δs é o deslocamento das partículas do líquido nesse intervalo de tempo.

Sendo **v** a intensidade da velocidade de escoamento do líquido, segue que:

$$Z = \frac{A\,\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow Z = A\,v$$

3. Equação da continuidade

Consideremos o trecho de tubulação esquematizado a seguir por onde escoa um líquido incompressível, não viscoso e em regime permanente. Sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, e v_1 e v_2 as intensidades da velocidade de escoamento do fluido em S_1 e S_2, respectivamente.

Levando-se em conta a conservação da massa, a vazão determinada em S_1 deve ser igual à determinada em S_2; logo:

$$Z_1 = Z_2 \Rightarrow A_1\,v_1 = A_2\,v_2$$

A última expressão é denominada **Equação da Continuidade**, e ela nos permite notar que as intensidades das velocidades de escoamento são inversamente proporcionais às respectivas áreas das seções transversais da tubulação:

$$A_1 > A_2 \Rightarrow v_1 < v_2$$

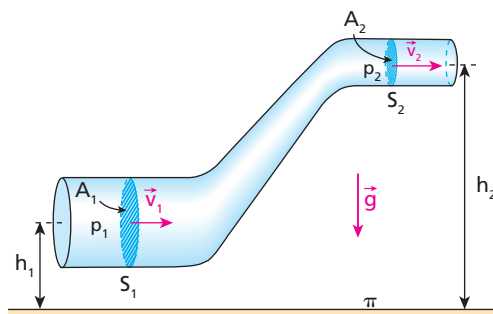
Ron Chapple/Corbis/Latinstock

Neste rio de profundidade admitida constante, a velocidade da correnteza na parte mais estreita (região central da fotografia) deve ser maior que nas partes mais largas.

Thinkstock/Getty Images

À medida que a água escoa a partir da boca de uma torneira, a intensidade de sua velocidade aumenta devido à ação da gravidade. Por isso a espessura do filete de água diminui, conforme prevê a Equação da Continuidade: à maior velocidade corresponde a menor área.

4. Teorema de Bernoulli

Consideremos um trecho de tubulação disposto verticalmente, conforme representa a figura a seguir, por onde escoa um líquido incompressível, não viscoso, de massa específica igual a μ em regime permanente. Sejam S_1 e S_2 duas seções transversais da tubulação, com áreas iguais a A_1 e A_2. Por essas seções o líquido passa com velocidades de intensidade v_1 e v_2, respectivamente. Sejam, ainda, p_1 e p_2 as pressões nos centros de S_1 e S_2, h_1 e h_2 as alturas desses centros em relação a um plano horizontal de referência π, e **g** a intensidade da aceleração da gravidade.

O físico, médico e fisiologista suíço **Daniel Bernoulli** (1700-1782) relacionou as grandezas citadas por meio de uma expressão de grande importância, capaz de explicar vários fenômenos do dia a dia.

$$p_1 + \mu g\,h_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} = p_2 + \mu g\,h_2 + \frac{\mu v_2^2}{2}$$

Nessa expressão, conhecida como Teorema de Bernoulli, as parcelas p_1 e p_2 são denominadas **pressões estáticas**, enquanto as parcelas $\frac{\mu\,v_1^2}{2}$ e $\frac{\mu\,v_2^2}{2}$ são chamadas **pressões dinâmicas**.

Outra forma de apresentar o Teorema de Bernoulli é: em qualquer seção da tubulação,

$$p + \mu g\,h + \frac{\mu v^2}{2} = C \text{ (Constante)}$$

Smithsonian/Corbis/Latinstock

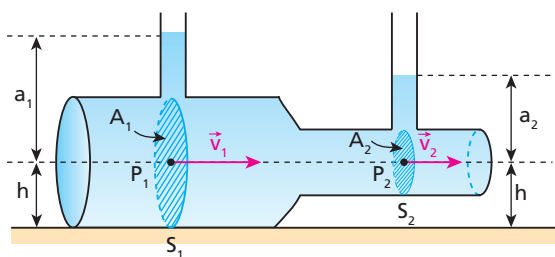
Daniel Bernoulli nasceu em uma família de físicos e matemáticos. Seu pai, seu tio e seus irmãos também deram importantes contribuições à ciência. Em 1738, Bernoulli publicou o livro *Hydrodynamica*, em que, entre outros estudos, está seu notável teorema. Gravura do século XVIII, por Johann J. Haid.

Casos particulares importantes

I. Se h_1 for igual a h_2, a tubulação será horizontal e, pela Equação da Continuidade, conclui-se que, sendo $A_1 > A_2$, então $v_1 < v_2$. O Teorema de Bernoulli reduz-se, nesse caso, a:

$$p_1 + \frac{\mu\, v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\mu\, v_2^2}{2}$$

Da desigualdade $v_1 < v_2$, decorre que $p_1 > p_2$. Assim, à menor velocidade de escoamento corresponde a maior pressão estática.

Isso pode ser verificado acoplando-se à tubulação dois tubos verticais abertos na extremidade superior, como está representado a seguir. Esses acessórios são denominados **tubos de Venturi** e permitem notar que na seção S_1 a altura atingida pelo líquido é maior que na seção S_2, o que é o indicador de uma pressão estática maior.

$$A_1 > A_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 > p_2$$

Na circulação sanguínea, por exemplo, admitindo-se condições ideais, verifica-se nas artérias e veias de maior diâmetro menor velocidade de escoamento do sangue e, consequentemente, maior pressão.

II. Se o líquido estiver em repouso, as pressões dinâmicas serão nulas e o Teorema de Bernoulli reduz-se ao Teorema de Stevin, da estática dos fluidos.

De fato, se $v_1 = v_2 = 0$, tem-se:

$$p_1 + \mu g h_1 = p_2 + \mu g h_2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \mu g (h_2 - h_1)$$

Efeitos Bernoulli

Relacionamos a seguir algumas situações práticas que podem ser explicadas com base no Teorema de Bernoulli.

I. Soprando-se sobre uma folha de papel, como sugerem as fotografias a seguir, a maior intensidade da velocidade de escoamento do ar sobre a folha faz com que a pressão nessa superfície fique menor que a pressão exercida sobre a face de baixo. Com isso a folha se eleva, adquirindo uma posição praticamente horizontal.

Fotografias: Sérgio Dotta Jr./The Next

Em caso de fortes ventanias, telhados de casas e galpões podem ser arremessados para cima. Isso ocorre porque a maior velocidade do ar sobre o telhado reduz a pressão nessa superfície. Dessa forma, predominam as forças de pressão de baixo para cima, o que pode deslocar a estrutura.

Cortinas instaladas em janelas abertas podem ser lançadas para fora pela ação do vento. A corrente de ar do lado de fora reduz a pressão do ambiente externo, fazendo com que elas sejam deslocadas no sentido da maior para a menor pressão.

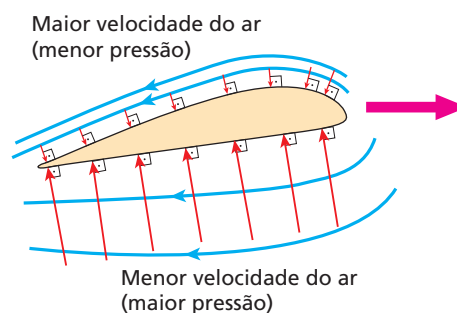
Lonas de caminhões em alta velocidade estufam, movendo-se também no sentido da maior para a menor pressão.

Bernoulli em todo lugar!

G. Evangelista / Opção Brasil Imagens

Nesta imagem, pode-se observar que a lona que reveste a carga do caminhão acha-se estufada na parte de cima. Esse é um dos muitos "efeitos Bernoulli".

Em relação a um referencial ligado ao caminhão, a velocidade com que o ar se desloca na parte de cima é relativamente grande, ocorrendo o oposto com o ar confinado entre a carga e o revestimento, que praticamente não se movimenta. Isso impõe, portanto, uma diferença de pressões entre os dois lados da lona, sendo que na parte de cima se estabelece a menor pressão e, na parte de baixo, a maior. Com isso, as forças de pressão exercidas de baixo para cima prevalecem, fazendo a lona estufar.

II. A força de sustentação de um avião é exercida principalmente nas asas da aeronave. Elas têm um desenho específico, de modo que o ar escoa com maior velocidade pela superfície de cima. Com isso, a pressão exercida nessa face é menor que a pressão verificada no lado de baixo. Obtém-se, então, uma força resultante que admite uma componente vertical dirigida para cima que se opõe à tendência de queda do avião.

Donal Philby/Age Fotostock/Grupo Keystone

A velocidade de escoamento do ar é maior na face de cima das asas do avião. Assim, predominam as forças de pressão de baixo para cima, o que dá sustentação à aeronave.

Leitura

Pesadelo dos goleiros

Situação difícil certamente foi a dos goleiros que depararam com cobradores de faltas como Rivelino, Zico, Marcelinho Carioca, Ronaldinho Gaúcho e Rogério Ceni, entre outros. Esses atletas, que inscreveram de forma definitiva seus nomes na história do futebol, notabilizaram-se pela maneira peculiar de desferir seus chutes. Eles imprimiam à bola grande "efeito", o que conferia ao percurso do projétil curvas espetaculares em lances decisivos. Durante o deslocamento, a bola girava em torno de um eixo central imaginário e isso determinava forte interação com o ar, com expressivas deflexões na trajetória. Nesse processo, a bola saía do previsível curso parabólico, fazendo os goleiros se desdobrarem em tentativas quase sempre frustradas de defender as cobranças.

Diomedia/Image Source /Alan Br

Uma bola lançada com efeito (rotação) realiza uma trajetória curva, o que dificulta sobremaneira a ação do goleiro.

Isso também pode ser notado no tênis quando um jogador imprime um *topspin*. Nessa maneira de golpear a bola, a pequena esfera amarela e felpuda segue rodopiando, o que impõe um itinerário imprevisível que engana o adversário, dificultando um possível contragolpe.

A irregularidade nas curvas exibidas por bolas que se deslocam através do ar em movimento conjunto de translação e rotação constitui o chamado efeito Magnus, que recebeu essa denominação em razão das explicações fundamentais dadas pelo físico-químico alemão Heinrich Gustav **Magnus** (1802-1870) à correta compreensão do fenômeno.

Fotografia de Heinrich Gustav Magnus; ele também apresentou importantes trabalhos sobre eletrólise, expansão de gases mediante recebimento de calor e termeletricidade.

Considere uma bola chutada por um jogador canhoto rumo ao gol. Veja a ilustração a seguir. A bola é disparada com rotação horária, como seria visto por um observador que a olhasse de cima. Representemos por ω a velocidade angular imprimida à bola no ato do chute.

Ela fará então uma curva para a direita, como justificamos a seguir.

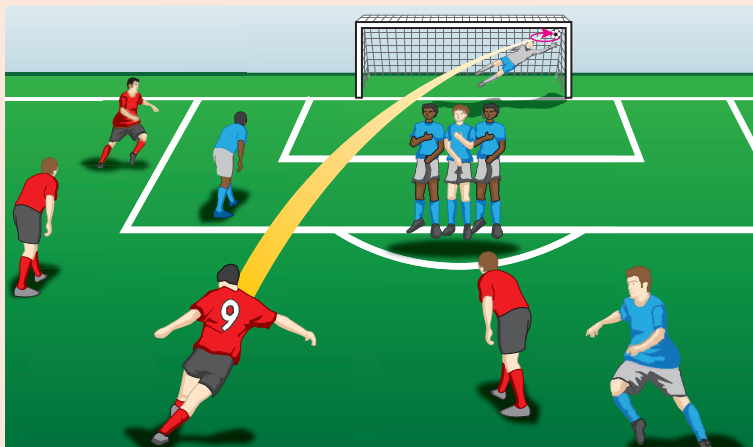
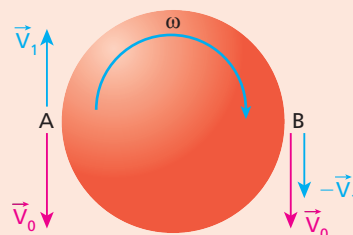



Ilustração representando o efeito Magnus em um chute de falta cobrada por um jogador canhoto.

Sendo $-\vec{V}_0$ a velocidade de translação da bola em relação ao ar, podemos dizer que o ar apresenta uma velocidade $\vec{V}_0$ em relação à bola. Tudo se passa como se a bola permanecesse em repouso e o ar passasse por ela com velocidade $\vec{V}_0$. Por outro lado, em relação a um referencial ligado ao centro da bola, a intensidade das velocidades $-\vec{V}_1$ e $\vec{V}_1$ das partículas do ar nas proximidades dos pontos **A** e **B** indicados no esquema a seguir é calculada por $V_1 = \omega R$, em que **R** é o raio da bola. É importante notar que $-\vec{V}_1$ e $\vec{V}_1$ são as velocidades impostas às partículas do ar vizinhas à bola devido ao arrastamento provocado por seu movimento de rotação.

Dessa forma, admitindo-se $V_0 > V_1$ e tendo em conta a composição de movimentos, conclui-se que nas vizinhanças do ponto **A** o ar tem, em relação à bola, uma velocidade vetorial $\vec{V}_A$, de intensidade $V_A = V_0 - V_1$, e, nas proximidades do ponto **B**, uma velocidade vetorial $\vec{V}_B$, de intensidade $V_B = V_0 + V_1$. Da análise de V_A e V_B, conclui-se que $V_A < V_B$.

Sendo assim, de acordo com o Teorema de Bernoulli, estabelece-se na região do ponto **A** uma pressão $\mathbf{p_A}$ maior que a pressão $\mathbf{p_B}$ verificada na região do ponto **B**.

De fato:

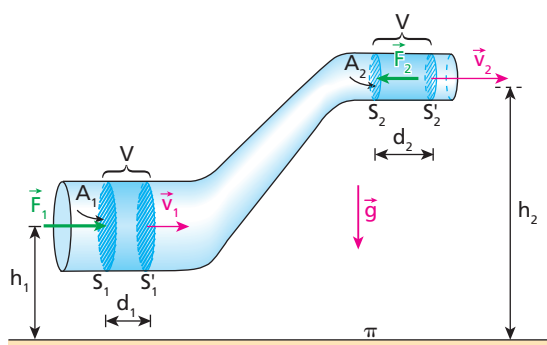
$$p_A + \frac{\mu V_A^2}{2} = p_B + \frac{\mu\, V_B^2}{2}$$

Sendo constante a densidade μ do ar, se $V_A < V_B$, então $p_A > p_B$.

Por causa disso, a bola recebe do ar na região do ponto **A** forças de pressão mais intensas que aquelas verificadas na região do ponto **B**, o que explica a deflexão de sua trajetória para a direita.

5. Demonstração do Teorema de Bernoulli

Consideremos a figura a seguir em que um líquido incompressível, não viscoso e de massa específica igual a μ escoa em regime permanente através de um trecho de tubulação disposto verticalmente em um local em que a aceleração da gravidade tem intensidade **g**. Estudemos o deslocamento da esquerda para a direita de uma porção de fluido compreendida em um determinado instante entre as seções $\mathbf{S_1}$ (área igual a $\mathbf{A_1}$) e $\mathbf{S_2}$ (área igual a $\mathbf{A_2}$). Nessas seções, as velocidades de escoamento têm intensidades $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, respectivamente.

Essa porção líquida recebe do resto do fluido as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aplicadas em S_1 e S_2, onde as pressões estáticas valem, respectivamente, $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$. Sejam $\mathbf{h_1}$ e $\mathbf{h_2}$ as alturas dos centros de S_1 e S_2 em relação a um plano horizontal π adotado como referência.

O líquido é então deslocado durante certo intervalo de tempo, migrando da região delimitada pelas seções S_1 e S_2 para outra, delimitada pelas seções S'_1 e S'_2.

O volume **V** de líquido que sai da parte baixa do duto é integralmente transferido para a parte alta. Tudo se passa, para efeito de cálculo, como se fossem deslocadas as mesmas partículas do fluido de uma região à outra. Esse volume fica determinado fazendo-se:

$$V = A_1\, d_1 \quad \text{ou} \quad V = A_2\, d_2$$

em que $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ são os deslocamentos da massa **m** de líquido, respectivamente, na parte baixa e na parte alta da tubulação.

I. Trabalho de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ (τ_{fd}):

$$\tau_{fd} = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} \Rightarrow \tau_{fd} = F_1\, d_1 - F_2\, d_2$$

$$\tau_{fd} = p_1 A_1 d_1 - p_2 A_2 d_2 \Rightarrow \tau_{fd} = p_1 V - p_2 V$$

Da qual:

$$\tau_{fd} = (p_1 - p_2)\, V \qquad \text{(I)}$$

II. Trabalho da gravidade (τ_{gr}):

$$\tau_{gr} = -\, m\, g\, (h_2 - h_1)$$

$$\tau_{gr} = -\, \mu\, V\, g\, (h_2 - h_1) \quad \text{(II)}$$

III. Teorema da Energia Cinética:

$$\tau_{fd} + \tau_{gr} = \tau_{total} \Rightarrow \tau_{fd} + \tau_{gr} = \frac{m\, v_2^2}{2} - \frac{m\, v_1^2}{2}$$

Assim:

$$\tau_{fd} + \tau_{gr} = \frac{\mu V}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \text{(III)}$$

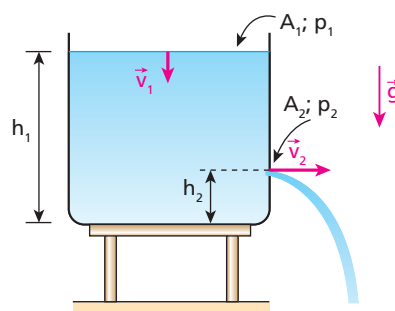
Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$(p_1 - p_2)\, V - \mu V\, g\, (h_2 - h_1) = \frac{\mu V}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Da qual:

$$p_1 + \frac{\mu\, v_1^2}{2} + \mu\, g\, h_1 = p_2 + \frac{\mu\, v_2^2}{2} + \mu\, g\, h_2$$

6. Equação de Torricelli

Vamos admitir um recipiente cilíndrico em repouso sobre um suporte horizontal. Suponhamos que dentro dele exista um líquido incompressível, não viscoso e de massa específica igual a μ. Se fizermos um pequeno furo próximo à base do recipiente, o líquido vazará pelo orifício com velocidade horizontal, como representa a figura a seguir.

Aplicando-se o Teorema de Bernoulli, é possível determinar a intensidade (**v**) da velocidade de escoamento do fluido através do orifício em função do módulo da aceleração da gravidade (**g**) e do desnível (**h**) entre a superfície livre do líquido e o plano horizontal que contém o furo.

$$p_2 + \frac{\mu\, v_2^2}{2} + \mu\, g\, h_2 = p_1 + \frac{\mu\, v_1^2}{2} + \mu\, g\, h_1$$

Devemos observar, porém, que, sendo o diâmetro do orifício muito pequeno em comparação com o do recipiente, é razoável considerarmos $v_1 \cong 0$.

Por outro lado, as pressões estáticas na superfície livre do líquido ($\mathbf{p_1}$) e na saída do furo ($\mathbf{p_2}$) são iguais à pressão atmosférica local.

Com isso, vem:

$$\frac{\mu\, v_2^2}{2} - \mu\, g\, (h_1 - h_2)$$

Fazendo $h_1 - h_2 = h$ e $v_2 = v$, obtemos a chamada Equação de Torricelli, em uma alusão ao físico italiano Evangelista **Torricelli** (1608-1647).

$$v = \sqrt{2g\,h}$$

Sérgio Dotta Jr./The Next

O alcance horizontal do líquido na fotografia cresce com a profundidade do furo. Isso está de acordo com a Equação de Torricelli, a qual estabelece que a intensidade da velocidade de saída do fluido dobra quando a profundidade do orifício quadruplica.

Exercícios — nível 1

1. E.R. Uma mangueira tem em sua extremidade um esguicho de boca circular cujo diâmetro pode ser ajustado. Admita que essa mangueira, operando com vazão constante, consiga encher um balde de 30 L em 2 min 30s.

a) Se a área da boca do esguicho for ajustada em 1,0 cm², com que velocidade a água sairá da mangueira?

b) Reduzindo-se o diâmetro da boca do esguicho à metade, com que velocidade a água sairá da mangueira nessa nova situação?

Resolução:

a) A vazão (**Z**) através da boca do esguicho é calculada por:

$$Z = A\,v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Sendo $A = 1{,}0\ cm^2 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\ m^2$; $\Delta V = 30\ L = 30 \cdot 10^{-3}\ m^3$ e $\Delta t = 2{,}5\ min = 150\ s$, calculemos a velocidade **v** de escoamento da água.

$$1{,}0 \cdot 10^{-4}\ v = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{150} \Rightarrow \boxed{v = 2{,}0\ m/s}$$

b) Como a área do círculo é diretamente proporcional ao quadrado do seu raio, ou do seu diâmetro $\left(A = \pi\, R^2 = \frac{\pi\, D^2}{4}\right)$, se reduzirmos o diâmetro à metade, a área será reduzida à quarta parte. Assim, aplicando-se a Equação da continuidade, vem:

$$A'\,v' = A\,v \Rightarrow \frac{A}{4}\,v' = A \cdot 2{,}0$$

Da qual:

$$\boxed{v' = 8{,}0\ m/s}$$

2. (UFPE) A velocidade do sangue na artéria aorta de um adulto, que possui em média 5,4 litros de sangue, tem módulo aproximadamente igual a 30 cm/s. A área transversal da artéria é cerca de 2,5 cm². Qual o intervalo de tempo, em segundos, necessário para a aorta transportar o volume de sangue de um adulto?

3. (Unama-AM) Uma piscina, cujas dimensões são 18 m × 10 m × 2 m, está vazia. O tempo necessário para enchê-la é 10 h, através de um conduto de seção A = 25 cm². A velocidade da água, admitida constante, ao sair do conduto, terá módulo igual a:

a) 1 m/s b) 2 km/s c) 3 cm/min d) 4 m/s e) 5 km/s

4. (UFPA) Considere duas regiões distintas do leito de um rio: uma larga **A**, com área de secção transversal de 200 m², e outra estreira **B**, com 40 m² de área de secção transversal.

A velocidade das águas do rio na região **A** tem módulo igual a 1,0 m/s.

De acordo com a equação da continuidade aplicada ao fluxo de água, podemos concluir que a velocidade das águas do rio na região **B** tem módulo igual a:

a) 1,0 m/s b) 2,0 m/s c) 3,0 m/s d) 4,0 m/s e) 5,0 m/s

5. (UFJF-MG) Um fazendeiro decide medir a vazão de um riacho que passa em sua propriedade e, para isso, escolhe um trecho retilíneo de 30,0 m de canal. Ele observa que objetos flutuantes gastam em média 60,0 s para percorrer esse trecho. No mesmo lugar, observa que a profundidade média é de 0,30 m e a largura média, 1,50 m. A vazão do riacho, em litros de água por segundo, é:

a) 1,35 b) 3,65 c) 225 d) 365 e) 450

6. E.R. O aneurisma é uma dilatação anormal verificada em um trecho de uma artéria pela distensão parcial de suas paredes. Essa patologia, de origem congênita ou adquirida, pode provocar o rompimento do duto sanguíneo com escape de sangue, o que em muitos casos é fatal. Trata-se do que popularmente se denomina *derrame*.

Admita que uma pessoa tenha um aneurisma de aorta, de modo que a área da secção reta de sua atéria dobre. Considere o sangue um fluido ideal, de massa específica 1,2 g/cm³, escoando inicialmente com velocidade 20 cm/s. Devido ao aneurisma, qual a variação da pressão estática do sangue no local da lesão, expressa em unidades do SI?

Resolução:

I. Pela **Equação da continuidade:**

$$Z_2 = Z_1 \Rightarrow A_2\,v_2 = A_1\,v_1 \Rightarrow 2\,A_1\,v_2 = A_1\,20$$

Assim: $\boxed{v_2 = 10\ \text{cm/s} = 0{,}10\ \text{m/s}}$

II. Pelo **Teorema de Bernoulli** aplicado a um mesmo ponto do interior da artéria, tem-se:

$$p + \frac{\mu v^2}{2} = C\,(\text{Constante})$$

$$p_2 + \frac{\mu v_2^2}{2} = p_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{\mu}{2}\,(v_1^2 - v_2^2)$$

$$\Delta p = \frac{1{,}2 \cdot 10^3}{2}\,(0{,}20^2 - 0{,}10^2)\ (\text{Pa}) \Rightarrow \boxed{\Delta p = 18\ \text{Pa}}$$

7. (ITA-SP) Durante uma tempestade, Maria fecha as janelas do seu apartamento e ouve o zumbido do vento lá fora. Subitamente o vidro de uma janela se quebra. Considerando-se que o vidro tenha soprado tangencialmente à janela, o acidente pode ser mais bem explicado pelo(a):

a) princípio de conservação da massa.
b) princípio de Bernoulli.
c) princípio de Arquimedes.
d) princípio de Pascal.
e) princípio de Stevin.

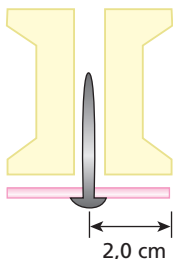
8. O ar de um furacão sopra sobre o telhado de uma casa com velocidade de módulo igual a 108 km/h. A densidade do ar vale 1,2 kg/m³. A diferença entre a pressão do lado interno e do lado externo do telhado vale:

a) zero b) 500 Pa c) 520 Pa d) 540 Pa e) 560 Pa

9. (Unicamp-SP) "**Tornado destrói telhado de ginásio da Unicamp**. Um tornado com ventos de 180 km/h destruiu o telhado do ginásio de esportes da Unicamp [...] Segundo engenheiros da universidade, a estrutura destruída pesa aproximadamente 250 toneladas." *(Folha de S.Paulo*, 29/11/95)

Uma possível explicação para o fenômeno seria considerar uma diminuição de pressão atmosférica, devida ao vento, na parte superior do telhado. Para um escoamento ideal de ar, essa redução de pressão é dada por: $\frac{\rho\, v^2}{2}$, em que $\rho = 1{,}2$ kg/m³ é a densidade do ar e **v** é a intensidade da velocidade do vento. Considere que o telhado do ginásio tem 5400 m² de área e que estava simplesmente apoiado sobre as paredes. Adote g = 10 m/s².

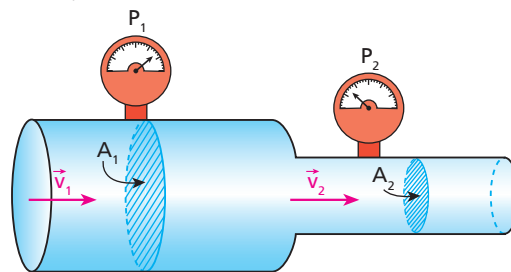
a) Calcule a variação da pressão externa devida ao vento.
b) Quantas toneladas poderiam ser levantadas pela força devida a esse vento?
c) Qual a menor intensidade da velocidade do vento (em km/h) que levantaria o telhado?

10. (UFBA) Um fenômeno bastante curioso, associado ao vôo dos pássaros e do avião, pode ser visualizado através de um experimento simples, no qual se utiliza um carretel de linha para empinar pipas, um prego e um pedaço circular de cartolina.

O prego é colocado no centro da cartolina e inserido no buraco do carretel, conforme a figura. Soprando de cima para baixo pelo buraco superior do carretel, verifica-se que o conjunto cartolina-prego não cai.

Considere a massa do conjunto cartolina-prego igual a 10 g, o raio do disco igual a 2,0 cm e a aceleração da gravidade local com módulo igual a 10 m/s².

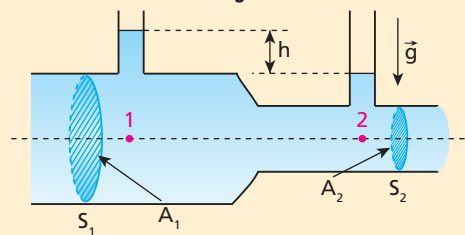
A partir dessas informações, apresente a lei física associada a esse fenômeno e calcule a diferença de pressão média mínima, entre as faces da cartolina, necessária para impedir que o conjunto caia.

11. (ITA-SP) Considere uma tubulação de água que consiste de um tubo de 2,0 cm de diâmetro por onde a água entra com velocidade de módulo 2,0 m/s sob uma pressão de $5{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Outro tubo de 1,0 cm de diâmetro encontra-se a 5,0 m de altura, conectado ao tubo de entrada. Considerando-se a densidade da água igual $1{,}0 \cdot 10^3$ kg/m³ e desprezando-se as perdas, calcule a pressão da água no tubo de saída. Adote g = 10 m/s².

12. (UnB-DF)

A figura acima ilustra uma tubulação que tinha, inicialmente, em toda a sua extensão, área seccional A_1. Após um acidente, parte da tubulação sofreu modificações no seu diâmetro, e a área da seção transversal passou a ser igual a $A_2 = \frac{A_1}{2}$, como mostrado na figura. Sabia-se que, no início do acidente, o sistema tubulação-fluido trabalhava em um regime de pressão (P_1) máxima permitida, acima da qual ocorreria rompimento da tubulação sempre que a pressão máxima do fluido fosse superior a P_1.

Com base nessas informações, considerando-se que não há variação de pressão com a altura e que a vazão do fluido é constante em toda a extensão da tubulação, assinale a opção correspondente à correta variação da pressão.

a) $P_1 - P_2 > 0$
b) $P_1 - P_2 < 0$
c) $P_1 - P_2 = 0$
d) $P_1 + P_2 = 0$
e) ΔP pode ser positivo ou negativo.

13. E.R. Considere a tubulação hidráulica esquematizada abaixo por onde escoa água em regime permanente. Os pontos **1** e **2** indicados, pertencentes a uma mesma horizontal, estão situados sob dois tubos verticais abertos em que se observa no líquido um desnível de altura **h**. No local a aceleração da gravidade tem intensidade **g**.

Supondo conhecidas as áreas A_1 e A_2 as secções retas S_1 e S_2, respectivamente, e considerando a água um fluido ideal, determine a intensidade da velocidade do líquido no ponto **1**.

Resolução:

I. **Equação da continuidade**:

$Z_2 = Z_1 \Rightarrow A_2 v_2 = A_1 v_1$

Assim:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad \text{(I)}$$

II. **Teorema de Bernoulli**:

$$p_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\mu v_2^2}{2}$$

$$\mu\, g\, h_1 + P_{atm} + \frac{\mu v_1^2}{2} = \mu\, g\, h_2 + P_{atm} + \frac{\mu v_2^2}{2}$$

Da qual:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_2^2}{2} \quad \text{(II)}$$

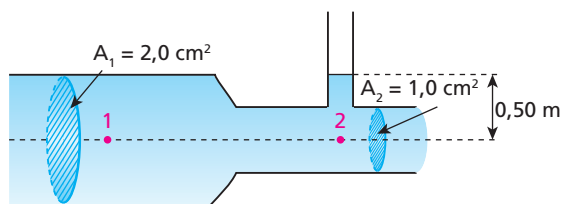
Observando-se que $h_1 - h_2 = h$ e substituindo-se (I) em (II), vem:

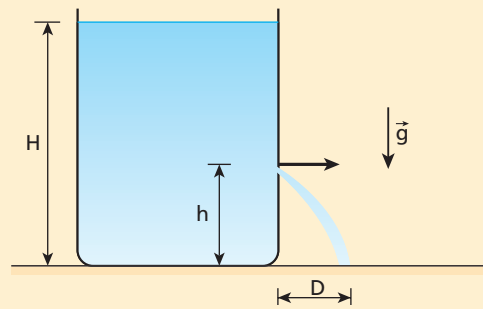
$$g\, h + \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{A_2} v_1\right)^2$$

$$2\, g\, h = v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

Assim:

$$\boxed{v_1 = \left[\frac{2\, g\, h}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

14. Na tubulação horizontal esquematizada na figura a seguir o líquido escoa com vazão de 400 cm^3/s e atinge a altura de 0,50 m no tubo vertical. A massa específica do líquido, admitido ideal,é 1,0 g/cm^3.

Adotando-se $g = 10 m/s^2$ e supondo-se o escoamento em regime permanente, pede-se calcular a pressão efetiva no ponto **1**, que é a diferença entre a pressão estática nesse ponto e a pressão atmosférica.

15. E.R. Em uma caixa-d'água cilíndrica de eixo vertical a superfície livre de água atinge uma altura **H**. Faz-se um pequeno furo na parede lateral da caixa, a uma altura **h**, por onde a água extravasa, projetando-se horizontalmente, conforme ilustra a figura. No local, a resistência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem intensidade **g**.

Sendo **D** o alcance horizontal atingido pela água, determine:

a) o máximo valor de **D**;

b) os valores de **h** para os quais se obtêm alcances horizontais iguais.

Resolução:

a) A intensidade da velocidade de escoamento da água através do furo é **v**, dada pela **Equação de Torricelli**:

$$v = \sqrt{2\, g\, (H - h)} \quad \text{(I)}$$

O movimento das gotas d'água a partir do furo é uniformemente variado na vertical; logo:

$$\Delta y = v_{0_y}\, t + \frac{\alpha_y}{2} t^2 \Rightarrow h = \frac{g}{2} t_q^2$$

Da qual:

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{(II)}$$

O movimento das gotas d'água a partir do furo é uniforme na horizontal; logo:

$$\Delta x = v\, t \Rightarrow D = v\, t_q \quad \text{(III)}$$

Substituindo-se (I) e (II) em (III), segue que:

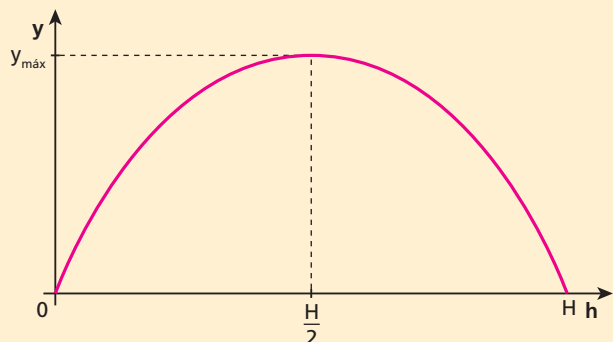
$$D = \sqrt{2\, g(H - h)} \sqrt{\frac{2\, h}{g}}$$

Assim:

$$\boxed{D = 2\sqrt{(H - h)h}}$$

Chamemos de **y** o radicando $(H - h)\, h$.

$$y = (H - h)\, h$$

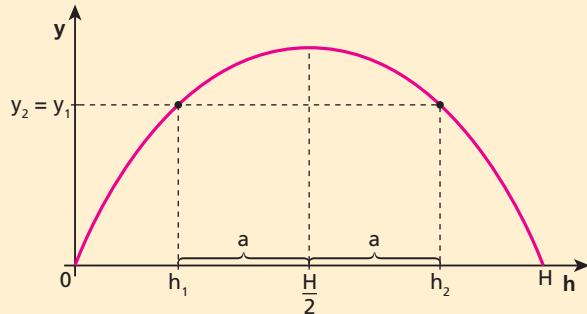
A função $y = f(h)$ é do segundo grau e sua representação gráfica é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo, conforme aparece a seguir:

Observando-se que $y = 0$ para $h = 0$ e $h = H$, tem-se:

Para $h = \frac{H}{2} \Rightarrow y_{máx} \Rightarrow d_{máx}$

Logo: $D_{máx} = 2\sqrt{\left(H - \frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}}$

Donde: $\boxed{D_{máx} = H}$

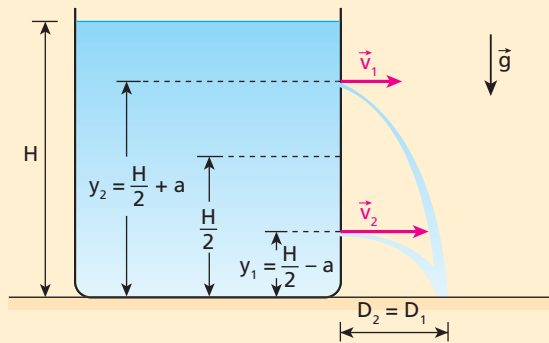
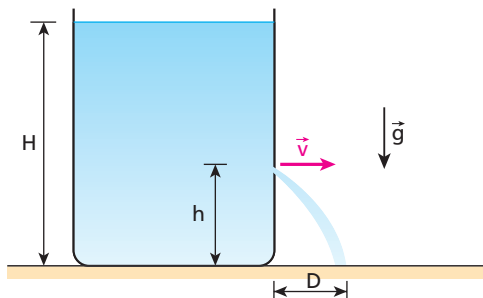
b) Alcances horizontais iguais são obtidos para um mesmo valor de **y**, isto é, quando $y_2 = y_1$.

Analisando-se o grafico anterior, vem:

$$D_2 = D_1 \Rightarrow y_2 = y_1$$

Nesse caso:

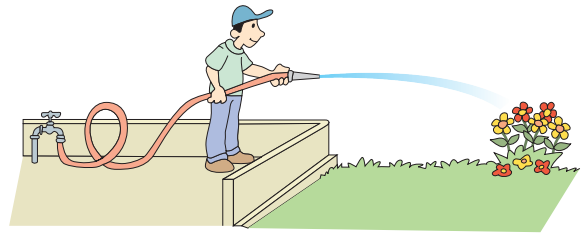
$$\boxed{h_1 = \frac{H}{2} - a \text{ e } h_2 = \frac{H}{2} + a}$$

$$\left(\text{com } 0 < a < \frac{H}{2}\right)$$

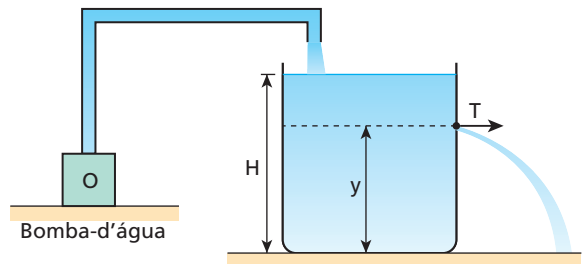
A figura a seguir ilustra o exposto.

16. Na figura a seguir está esquematizado um grande tanque aberto cheio de água até uma altura **H** apoiado sobre uma superfície horizontal.

Faz-se um pequeno furo na parede lateral do reservatório, a uma altura **h** em relação à sua base, por onde jorra um filete d'água com velocidade horizontal de intensidade **v**. No local, a resistência do ar é desprezível e a aceleração da gravidade tem módulo igual a **g**. Sendo **D** o alcance horizontal da água, determine em função de **H**, **h** e **g**:

a) o valor de **v**;

b) o valor de **D**.

17. (Unirio-RJ) Um menino deve regar o jardim de sua mãe e pretende fazer isso da varanda de sua residência, segurando uma mangueira na posição horizontal, conforme a figura abaixo.

Durante toda a tarefa, a altura da mangueira, em relação ao jardim, permanecerá constante. Inicialmente, a vazão de água, que pode ser definida como o volume de água que atravessa a área transversal da mangueira na unidade de tempo, é φ_0. Para que a água da mangueira atinja a planta mais distante no jardim, ele percebe que o alcance inicial deve ser quadruplicado. A mangueira tem em sua extremidade um dispositivo com orifício circular de raio variável. Para que consiga molhar todas as plantas do jardim sem molhar o resto do terreno, ele deve:

a) reduzir o raio do orifício em 50% e quadruplicar a vazão de água.
b) manter a vazão constante e diminuir a área do orifício em 50%.
c) manter a vazão constante e diminuir o raio do orifício em 50%.
d) manter constante a área do orifício e dobrar a vazão de água.
e) reduzir o raio do orifício em 50% e dobrar a vazão de água.

18. (Unirio-RJ) Uma bomba-d'água enche o reservatório representado na figura a seguir até a altura **H**. Assim que a água atinge esse nível, a tampa **T** de um escoadouro é aberta. A tampa está a uma altura **y** do fundo do reservatório e sua vazão é igual à da bomba, que permanece ligada o tempo todo. Sabendo que a água sai horizontalmente pela tampa, determine a expressão para o alcance máximo, $A_{máx}$, atingido pela água e a altura **y** do escoadouro.

Despreze os atritos.

a) $A_{máx} = 2\sqrt{y(H - y)}$; $y = \frac{H}{2}$

b) $A_{máx} = 2\sqrt{y(H - y)}$; $y = \frac{H}{4}$

c) $A_{máx} = 2\sqrt{y(H - y)}$; $y = \frac{H}{3}$

d) $A_{máx} = 2\sqrt{y(H - y)}$; $y = \frac{H}{6}$

e) $A_{máx} = 2\sqrt{y(H - y)}$; $y = \frac{H}{5}$

Respostas

Parte I Cinemática

Tópico 1

Bases da Cinemática escalar

1. **O**: (0 m; 0 m)
A: (4 m; 3 m)
B: (8 m; 0 m)
C: (0 m; 4 m)
D: (−5 m; 3 m)
E: (−7 m; 0 m)
F: (−4 m; −4 m)
G: (0 m; −4 m)
H: (6 m; −3 m)

2. a) E; c) A; e) B;
b) H; d) I; f) J.

3. a) (0 km; 80 km);
b) (40 km; 0 km);
c) (25 km; 30 km)

4. a) (Δx = 30 km; Δy = 20 km);
b) (Δx = 30 km; Δy = 0 km);
c) (Δx = 20 km; Δy = − 60 km)

5. a) 50 min
b) Vinte minutos antes do início; (t = 0) da contagem do tempo
c) 50 min

7. e

8. Se estivessem em um mesmo plano, os eclipses solares e lunares ocorreriam uma vez por mês, o que não é verdade.

10. d

12. a) 35 km
b) 195 km

13. a

14. c

15. c

17. 60 km/h

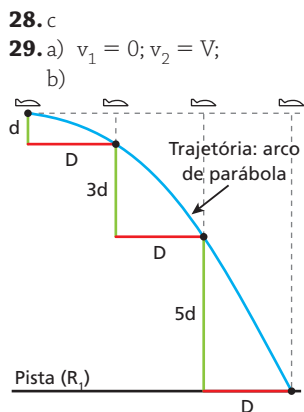
18. −84 km/h

19. a) 0,87 m/s; b) 117,45 m

20. 70 km/h

21. 36 km/h = 10 m/s
15 m/s = 54 km/h

22. $V_A = V_B = V_C$

23. a) Δt_s > 8h 18min
b) Foi menor que 1,6 m/min

24. c

25. d

27. Sim

28. c

29. a) $v_1 = 0$; $v_2 = V$;
b)

c) É um segmento de reta vertical.

30. c **31.** e

32. 400 m/s; é supersônico.

33. c **34.** 07 **35.** a

36. 90 km/h

37. 4,0 m/s

39. 48 km/h

40. 6 cm/s

41. Zero

42. e

43. a) 5 m/s²
b) Zero
c) −10 m/s²

44. a) Uniforme
b) Acelerado
c) Retardado
d) Retardado na subida e acelerado na descida.
e) Uniforme

45. 10

46. a) $10{,}8\ \frac{km/h}{s}$;
b) 3 m/s²

47. 2,4 m/s²

48. a) $\frac{v_1 + v_2}{2}$
b) $\frac{v_1}{v_1 + v_2} \cdot MQ$

49. $\frac{3v_1v_2v_3}{v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3}$

50. $v_m \leqslant 79{,}2$ km/h

51. a) 60 pessoas b) 70 m

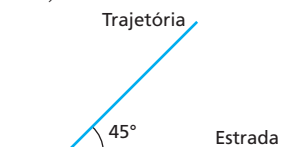
52. a) 72 km/h b) 3 m

53. Não

54. 1330 km/h

55. a) Retilínea e vertical
b)

56. a) $V_C = V_M$; c) 72 degraus
b) $V'_C = 2\ V_M$;

57. $\frac{V}{\cos \theta}$

59. a) v = 8t − 2 (SI)
b) 38 m/s

61. a) α = 10t (SI)
b) 40 m/s²

Tópico 2

Movimento uniforme

2. a) s_0 = 20m; v = 4 m/s
b) s_0 = 15 cm; v = −3 cm/s
c) s_0 = 0; v = 12 km/h

3. a) 8 m/s; x = 60 m; y = 10 s
b) 15 m/s; x = 15 m/s; y = 15 m/s
c) −2 m/s; x = 12 m; y = 10 s

4. 40 m

6. 222 m

7. 100 μs

8. a) 9,46 · 10¹² km
b) Há 170 000 anos.

9. s = 18 − 2 t (SI)

10. a) 5 s
b)

11. a) 22,5 cm ; b) 20 min

13. a) s_A = 20 + 11t (SI)
s_B = 90 + 4 t (SI)
b) 10 s
c) $s_A = s_B$ = 130 m

14. a) 1 h
b) km 110

15. 9 h 15 min

16. 20 s

18. a) 10 s b) 15 s

19. 200 m

20. b

21. c

22. a) 45 min
b) 54 min
c) A 120 km/h: 12,3 L; a 100 km/h: 10,4 L
d) A 120 km/h: 70,60 m; a 100 km/h: 50,15 m

23. 4 s

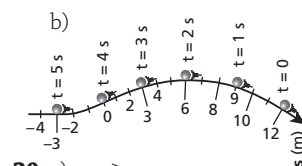
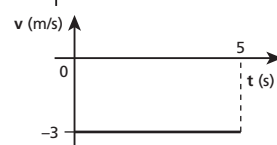
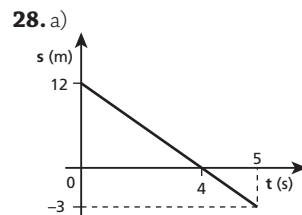
24. 2,0 mm/s **25.** 40 s

26. a) 225 km/h
b) 50 m/s

27. a) 0,5 m/s; b) 12 m; c) 0,5

28. a)

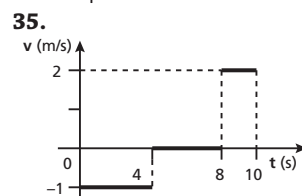
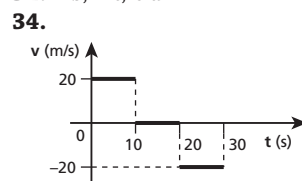
b)

t = 5 s, t = 4 s, t = 3 s, t = 2 s, t = 1 s, t = 0
−4, −2, −3, 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, s (m)

30. a) $s_{0_A} > s_{0_B}$
b) $v_A > v_B$
c) No mesmo sentido em que a trajetória está orientada.

31. a) **A** move-se no sentido da trajetória, enquanto **B** se move em sentido contrário.
b) **A** e **B** encontram-se.
c) **B** está na origem dos espaços.

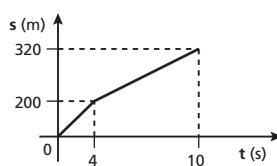
32. A-b; B-c; C-a

34.

35.

36. a) s_A = −6 + 3 t (SI);
s_B = 1,5 t (SI)
b) 4 s e 6 m

37. a) 175 cm
b) −1,5 cm/s
c) 0,41 cm/s

38. b **39.** 10 h

40. a) 32 m/s
b)

c) Não é possível, pois a velocidade não pode variar instantaneamente, como está representado em t = 4 s.

41. 80 km/h

42. 152 m

43. a) 30 s e 1 200 m
b) 10 s e 400 m

44. 200 m

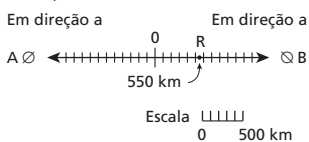
45. 36 s

46. a) 250 m/s   b) **A**

47. a) $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ s
b) 6,5 cm

48. v ⩾ 16 m/s ou v ⩽ 10 m/s

49. 421 m/s

50. a) 19 995 km
b) 555 km
c)

51. a) $s_B = 50 + 20\,t$ (SI)
$s_A = -110 + 40\,t$ (SI)
b) 8 s

52. a) 200 m^3/s
b) 5,0 m/s

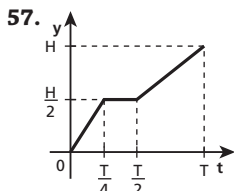
53. a) Não   b) Não

54. d

55. a) t = 1 h   b) 120 km

56. 45 km/h

57.

58. −0,5 s

59. $\dfrac{H}{H - h} \cdot v$

60. 13 h 36 min

61. $\dfrac{\sqrt{37L}}{2V}$

62. $\left(\dfrac{3L}{2V}\right)$

63. 10,9 minutos

Tópico 3 Movimento uniformemente variado

1. a) 15 m/s e 20 m/s^2 respectivamente
b) 95 m/s
c) 10 s

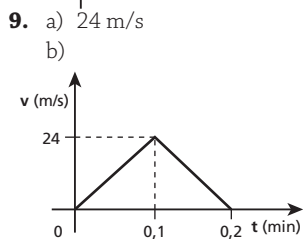
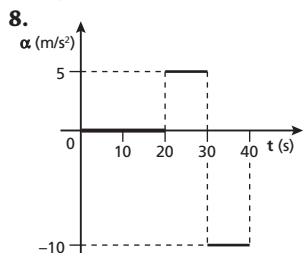
2. 3,6 m/s^2

3. a) v = 20 − 2t (SI)
b) 10 s

4. 30 m/s

6. 80 m/s

7. 9,5 m/s

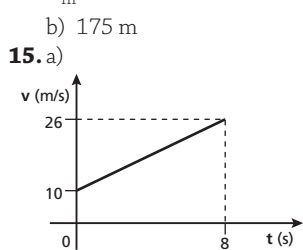
8.

9. a) 24 m/s
b)

11. a) 0 ⩽ t < 5 s
b) t > 5 s
c) t > 5 s
d) 0 ⩽ t < 5 s

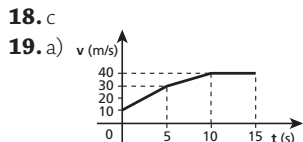
12. I — Progressivo e acelerado.
II — Progressivo e uniforme.
III — Progressivo e retardado.
IV — Repouso.
V — Retrógrado e acelerado.
VI — Retrógrado e uniforme.
VII — Retrógrado e retardado.

14. a) $\alpha_I = 0$; $\alpha_{II} = 2$ m/s^2 e $\alpha_{III} = -4$ m/s^2
b) 175 m

15. a)

b) 144 m

16. 20 m/s   **17.** 3,5 m

18. c

19. a)

b) Não

20. b

21. a) 0,4 m/s   b) 0,6 m/s

22. a) 80 m   b) 130 m

23. b

24. a) 14 s   b) 70 m

25. 8 s   **26.** km 22

27. e   **28.** c

30. a) 35 m e 10 m/s respectivamente
b) Acelerado

31. a) 4 s   b) 160 m

32. a) 3 m/s^2 b) 6 m/s

33. a) 5 m/s^2;   b) 2 250 m

34. 32 km/h;
b) 6 min e 40 s

35. 45 m

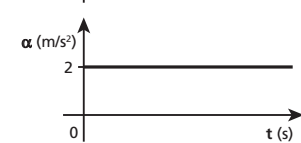
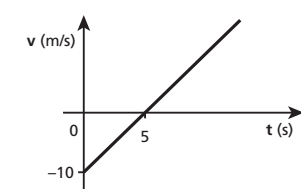
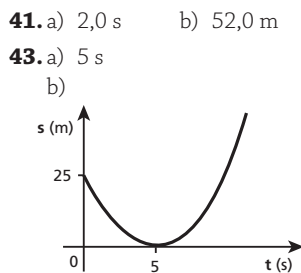
36. 5 s e 8 s

37. a) O móvel não passa pela origem dos espaços.
b) 2 s e 8 m respectivamente

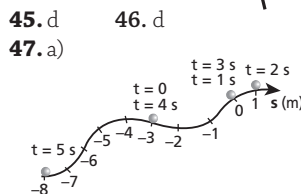
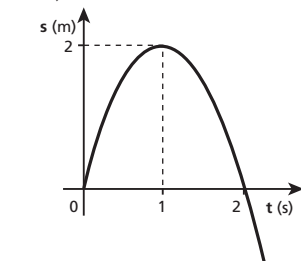
38. a) 1 s e 3 s
b) 1 m e 33 m

39. a

41. a) 2,0 s   b) 52,0 m

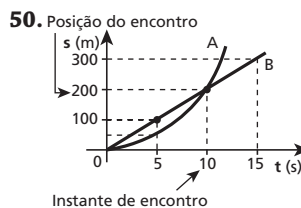
43. a) 5 s
b)

44. a) 0 e 2 s   b) 1 s e 2 m
c)

45. d   **46.** d

47. a)

b) Retardado para 0 < t < 2 s e acelerado para t > 2 s.

48. a) 4 m/s   b) −2 m/s^2

49. 12 m/s

50.

51. a

53. $1 \cdot 10^{15}$ m/s^2

54. a) 132 m/s
b) 0,3 s

55. 15 m/s^2

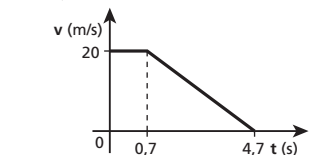
56. −4,5 m/s^2

57. 40 m e 4 s respectivamente

58. c

59. $v_0 = 108$ km/h

60. $\Delta s_{total} = 54$ m

61. a)

b) 54 m

62. d

63. a

64. e

65. 50 s

66. 40 s

67. 11 m/s

68. a) 45 m
b) 6 m/s^2
c) 18 m/s

69. a) 2,5 m
b) −1 m/s^2
c) 20,5 m

70. a) 50 m
b) Não haverá colisão.

71. 5 m/s^2

72. a) 50 m
b) 3,125 m/s^2

73. t = 6 s
A raiz t = 2 s não serve porque nesse instante o móvel 2 ainda não tinha partido.

74. $v_{mín} = 16$ m/s

75. 19,2 m

76. a) 4 m
b) Nula
c) Duas

77. a) 2,0 s; b) 1,2 m

78. e

79. −1

80. a) Demonstração
b) $\Delta s_n = (2n - 1)\,\dfrac{\alpha}{2}$

81. 60°

82. a) v = 1,0 + 2,0t (SI);
b) −10,5 s ⩽ t ⩽ −0,5 s

83. 12 m/s

84. 8 m/s < v_A < 9 m/s

85. a) 2 m/s   b) 2 m/s

86. c

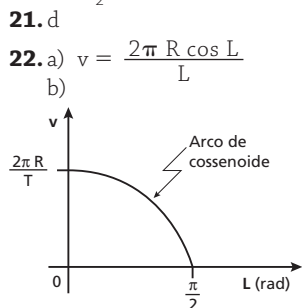
87. e

88. $x_1 > x_2$ e $a_2 > a_1$

89. t ≅ 3 s

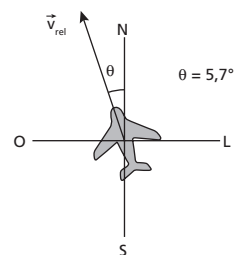
Tópico 4
Movimentos circulares

1. a) 2π rad
b) π rad
c) $\frac{\pi}{2}$ rad
d) $\frac{\pi}{3}$ rad
e) $\frac{\pi}{6}$ rad

3. 72 km/h
4. 1,8 rad
5. $\omega_{AB} < \omega_{BC} < \omega_{CD}$
6. 30 cm
7. b
9. a) 10 rad/s e 10 rad/s
b) 5,0 m/s
10. a) 60 s
b) 1h
c) 12h
11. $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ rad
12. 2 Hz e 0,5 s respectivamente
13. 0,02 s
14. $\frac{\pi}{12}$ rad/h
16. 0,12 m/s
17. $T_A = T_B$; $f_A = f_B$; $\omega_A = \omega_B$; $v_B = 2v_A$
18. a) 15 rpm
b) 31 cm/s
19. 400 Hz
20. a) 1
b) $\frac{r_1}{r_2}$
21. d
22. a) $v = \frac{2\pi\ R \cos L}{L}$
b)

23. a **24.** 5
25. De 15 Hz a 60 Hz
27. a **29.** c
30. 108 km/h
31. d
32. a) 2,4 m/s
b) 3 m/s
33. a) 2500 rpm; b) 45 rpm
34. 18
35. a) 10000 rpm
b) $\frac{1}{2}$
36. 800 m/s
37. a
38. Carro **A** — 2
Carro **B** — 3 (deve ser mais precavido)
Carro **C** — 1
39. d
40. 40 s
41. Se encontrarão 120 vezes.
42. 1h 5 min 27 s
43. 10 min
44. 8 s
45. a) 30 n voltas (n = 1, 2, 3, ...)
b) 180 rad/s
c) 54 m/s
46. 420 anos
47. 3 cm/s
48. e
49. d
50. a) 30 voltas
b) A espessura do outro disco é o quádruplo da do primeiro.
51. a) 8 voltas e 5 voltas, respectivamente
b) $\frac{80}{3}$ s $\cong$ 26,7 s
c) $2\frac{2}{3}$ voltas e $1\frac{2}{3}$ volta, respectivamente
d) $\frac{15\pi}{2}$ m/s e $\frac{29\pi}{2}$ m/s, respectivamente
52. a) $v_{M'} = v_M \cos\theta$
b) $v = \frac{\omega d}{\cos^2\theta}$
53. 60 voltas
54. 2
55. 10 s
56. 16 t (SI)

Tópico 5
Vetores e Cinemática vetorial

1. 15
2. c
3. d
4. b
6. a) 140 u c) 100 u
b) 20 u
7. 5 unidades $\leqslant s \leqslant$ 25 unidades
8. 13 u
9. 5 N
10. a) 1247 b) 3568
11. d
12. e
14. 5 u
15. d
16. e
17. b
18. 45 N
19. 39 u
20. 4
21. 120°
23. a) x
b) zero
24. a) 45 N
b) zero
26. e
28. a)

b) 13 u
29. b
30. e
31. a) $|\vec{S}| = 7{,}0$ N e $|\vec{D}| = 17$ N
b) $|\vec{S}| = |\vec{D}| = 13$ N
32. b
34. a
36. e
37. Componente horizontal: $F_x = 1{,}2 \cdot 10^3$ N
Componente vertical: $F_y = 1{,}6 \cdot 10^3$ N
38. a) 288 km/h
b) 8,0 s
c) 800 m
40. a) 100 km/h b) 50 km/h
41. a) 100 m
b) 5,0 m/s e 7,0 m/s
42. a) 3,0 min
b) 10 km/h
43. a) 4,5 km/h
b) 2,5 km/h
44. b
45. a) 2,8 m/s
b) 2,0 m/s
47. a) 12 m/s
b) 8,0 m/s
48. a) $\frac{\pi}{2}$
b) 1
49. 19
51. c
52. d
53. e
54. a
55. c
57. a) $\cong$ 108 m, zero
b) 50 m/s²
58. c
59. a) 25 m/s b) 5,0 m/s²
60. a
61. a) I e II
b) I e IV
c) I e III
62. b
63. a) 30 km/s
b) $6{,}0 \cdot 10^{-3}$ m/s²
65. 2,5 m/s²
66. a) 3,0 m/s
b) 5,0 m/s²
67. a) 12 m/s²
b) O movimento é acelerado.
68. a) 3,0 m
b) 13 m/s²
70. $v_B = 15{,}0$ km/h e D = 21,6 km
71. a) 18 km/h
b) 4,0 s
73. d
74. a) 2,5 m/s b) 5,0 m
75. b
76. 8,0 m
77. 36 h
79. a) 15 min; independe.
b) 12,5 km
80. 120°
81. a) 200 km/h
b) 100 km/h
c) Oeste
82.

83. a
85. a) 30 km/h
b) 50 km/h
87. $v_A = 200$ km/h, $v_B = 0$ e $v_C = 140$ km/h
89. 60 cm/s para a esquerda
90. a) 10,0 u
b) 6,0 u
91. a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
c) $\vec{a} - \vec{c} = \vec{b}$
92. a **93.** e
94. d **95.** b
96. a) 5,0 m
b) 2,5 m/s
97. c
98. a) 8,0 m/s²
b) 90 km/h
c) 12 m/s²
99. e
100. a) 7,5 s b) 1,5 m/s
101. c
102. a) 8,0 km b) 20 km/h
103. a
104. a) 50 cm b) 1,3 m
105. b
106. a
107. a) 6,5 m/s
b) 3,0 m/s²
108. a) v = 2,0 m/s e L = 3,0 m
b) 75 rpm
109. a) $\frac{R}{R - r}\ v$
b) $\frac{r}{R - r}\ v$
110. c

111. a

112. 10 m/s^2

113. $V_B = V_A \cdot \text{cotg}\,\theta$

114. $\dfrac{\sqrt{H^2 + D^2}}{D}\,V$

115. a) $V_A \cdot \text{sen}\,\alpha = V_B \cdot \text{sen}\,\beta$

b) b = 90° e

$V_{B_{min}} = V_A \cdot \text{sen}\,\alpha$

c) $\dfrac{D}{V_A \cdot \cos\alpha + V_B \cdot \cos\beta}$

116. b

117. b

118. d

Parte II Dinâmica

Tópico 1 Os princípios da Dinâmica

2. I e IV

3. d

4. 10 N

5. $F_1 = 300$ N e $F_2 = 400$ N ou $F_1 = 400$ N e $F_2 = 300$ N

6. e **7.** e **8.** e

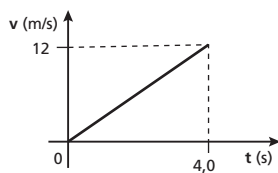
9. Não, pois ele contraria o Princípio da Inércia. Para realizar suas manobras radicais, é necessária a atuação de uma força resultante externa.

10. e **11.** a **12.** d

13. d **14.** 23 **15.** e

16. c

18. a) 3,0 m/s^2

b)

19. a) 8,0 N e 12 N

b) 10 m/s

20. $\dfrac{m_A}{m_B} = 3$

21. 4

22. a) 9,0 m/s

b) 7,2 N e zero

23. 6 F

24. 1,5 m/s^2

25. c

26. a) 5,0 m/s^2

b) 20 N

27. a) 6,0 m/s^2

b) 4,8 kN

28. 3,0 m/s^2 na direção de $\vec{F}_1$ ou $\vec{F}_2$ e no sentido de $\vec{F}_1$

29. 12 N

30. a) 1,2 m/s^2

b) 2,0 s

31. 4,0 N

32. a) 1000 N ou 1,0 kN

b) $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ m/s^2

34. $3{,}6 \cdot 10^2$ m/s

35. c

36. a

37. e

38. a

40. a) 5,0 kg b) 8,0 N

41. a) 20 kg b) 196 N

42. d

44. 60 N

45. c

46. a) $5{,}0 \cdot 10^2$ kg

b) 20 m/s^2

47. d

48. a) $6{,}0 \cdot 10^2$ N

b) $4{,}0 \cdot 10^2$ kg

49. a) 12 objetos

b) O fio se rompeu em um ponto entre a extremidade fixa e o primeiro objeto.

50. a) 60,0 N

b) 8,0 m/s^2

c) $\dfrac{1}{2}$

51. a) 6,0 m/s^2 b) 48 N

53. a) 3,0 kg

b) Tração nula

54. e **55.** d **57.** c **58.** c

60. a) 50 m/s

b) $0{,}30\,\dfrac{N \cdot s^2}{m^2}$

c) 7,5 m/s^2

61. b

62. a) $5{,}0 \cdot 10^2$ N/m

b) 25 N

63. c

64. 10 N

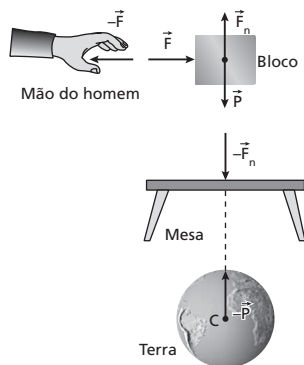
65. a) $\dfrac{1}{3}$ N/cm

b) 1,5 N/cm

66. d

67. 16,5 cm

68. 5,0 m/s^2

70.

71. c

73. 5,0 m/s^2

75. a) 2,0 m/s^2

b) 4,0 N

77. c

79. a) 2,0 m/s^2

b) 8,0 N

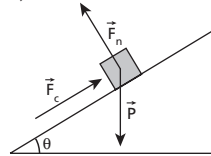
81. a) 2,0 m/s^2

b) 24 N

c) 48 N

83. a) 770 N; 700 N e 630 N

b) Peso aparente nulo

85. a)

$\vec{P}$: peso; $\vec{F}_n$: reação normal do plano inclinado

$\vec{F}_C$: reação do calço.

b) 30 N e 40 N

86. a) 5,0 m/s^2 e a aceleração independe da massa.

b) 1,0 s

c) 5,0 m/s

87. d

89. 1,0 m/s

91. D_1: 30 kgf e D_2: 20 kgf

92. a) 80 kgf

b) 70 kgf

93. $\dfrac{2}{3}$ F

94. d

95. 40 N

96. a) 2,0 m/s^2

b) Fio (1): 8,0 N

Fio (2): 4,0 N

97. a

98. $T = \dfrac{3M\,g}{2}$; $F = \dfrac{M\,g}{2}$

99. a) (I): $1\dfrac{g}{4}$

(II): $2\dfrac{g}{4}$

(III): $3\dfrac{g}{4}$

b) (I): $\dfrac{3}{4}$ Mg

(II): Mg

(III): $\dfrac{3}{4}$ Mg

101. a) 2,0 m/s^2 b) 29,4 N

102. d **104.** 1,0 cm

103. 0,60 s **105.** b

106. a) Aceleração dirigida para cima, com módulo igual a 2,5 m/s^2.

b) O elevador pode estar subindo em movimento acelerado ou descendo em movimento retardado.

107. $n_{máx} = 6$ caixas

108. a) 1,2 N b) 0,50 s

109. $8{,}00 \cdot 10^{-1}$ s

110. a) 7,0 m/s^2

b) 12 N

c) 12 N

111. a) $\dfrac{g}{10}$

b) Fio 1: $\dfrac{m\,g}{5}$

Fio 2: $\dfrac{2m\,g}{5}$

c) $\dfrac{m\,g}{2}$

113. b

114. a) 1,0 m/s^2

b) $4{,}4 \cdot 10^2$ N

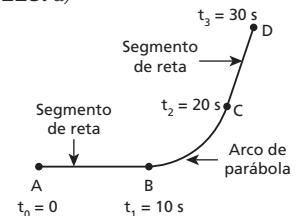
c) 55 kg

115. $1{,}6 \cdot 10^2$ N

116. a

117. b

118. a)

$t_3 = 30$ s
D
Segmento de reta
$t_2 = 20$ s
C
Segmento de reta
Arco de parábola
A
B
$t_0 = 0$
$t_1 = 10$ s

b) 5,0 m/s

119. a) $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ N

b) 100 formigas

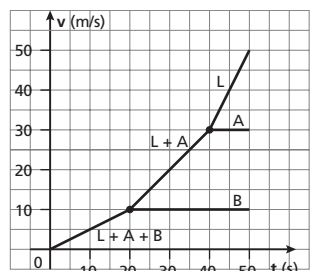
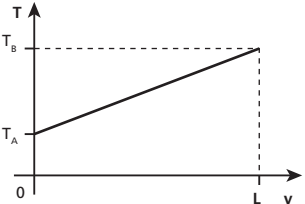
120. a) Orientação: vertical para cima; módulo: $3{,}0 \cdot 10^{-1}$ N.

b) 180 g

121. 5,0 m/s^2 e 30 N

122. d

123. a) 0,50 m/s^2; entre a locomotiva e o vagão **A**: 45 000 N; entre os vagões **A** e **B**: 30 000 N.

b)

124. a)

$\vec{F}_H$
$\vec{F}_V$
$\vec{F}$
A
$\vec{P}$
$\vec{F}_n$

b) 50 N

125. c

126. a

127. a

128. a) $4{,}0\ m/s^2$
b) $t_2 = 0{,}80$ s

129. a) 8,0 kg
b) 48 N
c) 24 N

130. a

131. a) $9{,}8\ m/s^2$ e $2{,}2\ m/s^2$
b) 588 N

132. a) 5,0 kN;
b) 180 km/h

133. c

134. b

135. a) De **A** para **B**.
b) $10\ m/s^2$
c) A orientação de $\vec{v}$ está indeterminada, podendo ser de **A** para **B** ou de **B** para **A**.

136. e

137. a) $7{,}5 \cdot 10^2$ N
b) $4{,}5 \cdot 10^2$ N

138. a) 720 N/m
b) **A**: zero, **B**: $5{,}0\ m/s^2$
Polia: $2{,}5\ m/s^2$
c) 40 N

139. d

140. e

141. a) $F = (M_A + M_B)a$
b) $N = \sqrt{M_B^2 a^2 + M_A^2 g^2}$
c) $\text{tg}\,\theta = \dfrac{M_B\ a}{M_A\ g}$

142. d

143. $1{,}20 \cdot 10^3$ N

144. $\sqrt{\dfrac{(5m + M)\,h}{2m\,g}}$

145. a) $\dfrac{4}{3}\,\pi\,\mu\,g\,R^3$
b) $\dfrac{4}{3}\,\pi\,\mu\,g\,R^3 + \dfrac{\rho\,L\,g}{2}$
c)

$T_A = \dfrac{4}{3}\,\pi\,\mu\,g\,R^3$

$T_B = \dfrac{4}{3}\,\pi\,\mu\,g\,R^3 + \rho\,L\,g$

146. a) 4,0 m/s b) 2,4 m

147. a) $g\cos\alpha$
b) $t_{AB} = t_{AC} = t_{AD}$

148. $F_{máx} = (M + m)\,g\,\text{cotg}\,\theta$

149. c

150. a) A força de atrito nos pés do garoto é horizontal e dirigida para a esquerda.
b) $\theta = 30°$

151. a) $a = \dfrac{g}{2}(\cos\theta - \text{sen}\theta)$;
$\theta_1 = 0°$ e $\theta_2 = 90°$
b) $T_1 = 10{,}0$ N e
$T_2 = 10{,}0$ N
c) $\theta = 45°$

152. Resposta: 1,2 s

Tópico 2

Atrito entre sólidos

1. a) Para a esquerda.
b) 20 N

2. 0,20

3. 28 kg

5. a) $2{,}0 \cdot 10^2$ N
b) 50 N

7. d

8. d

9. a) 3,0 N
b) 7 bloquinhos

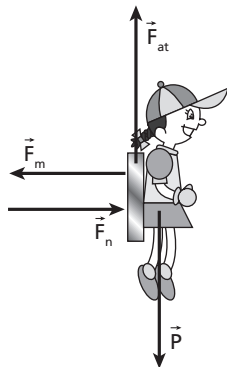
10. 10 kg

11. $\theta = 45°$

13. 50 N

14. b

16. a) 40 kgf b) 50 kgf

17. a)

$\vec{P}$ = força da gravidade (peso)
$\vec{F}_{at}$ = força de atrito
$\vec{F}_m$ = força magnética
$\vec{F}_n$ = reação normal da parede
$\vec{C} = \vec{F}_{at} + \vec{F}_n$ é a força total de contato entre a bonequinha e a porta da geladeira.
b) 0,40 N

18. 0,50

19.

F (N)	F_{at} (N)	a (m/s^2)
10	10	0
12	12	0
30	10	5,0

21. a) $2{,}0\ m/s^2$
b) 100 m e 10 s

22. a) $4{,}0\ m/s^2$
b) 30 N

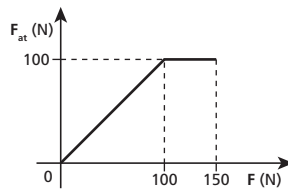
23. a) 0,60 b) 12,0 N

24. a) 0,60
b) $2{,}0\ m/s^2$

26. a

27. e

29. a) $8{,}00 \cdot 10^2$ N
b) $4{,}00\ m/s^2$

31. a)

b) 50 kg e 0,20

33. a

34. a) $1{,}0\ m/s^2$
b) 18 N

35. a) $5{,}0\ m/s^2$
b) 30 N

36. a) $\dfrac{V_0}{\mu\ g}$
b) $\dfrac{V_0^2}{2\mu\ g}$

37. a) $0{,}50\ m/s^2$
b) $4{,}0\ m/s^2$

39. a

40. a) $3{,}0\ m/s^2$
b) 0,30

41. c

42. 0,50

43. $0{,}80\ m/s^2$

44. a) $0{,}40\ m/s^2$
b) 48 N

45. e

46. c

47. a) $\dfrac{2}{3}\,\mu_e\,g$
b) $\sqrt{\dfrac{3d}{\mu_e\ g}}$

48. c

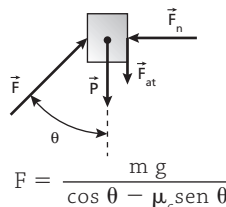
49. h = 30 cm

50. a) $6{,}5\ m/s^2$
b) 10 m

51. d

52. 1,25 N

53. a)

b) $F = \dfrac{m\ g}{\cos\theta - \mu_c \text{sen}\,\theta}$

54. e

55. 0,50 m

56. 50 N ⩽ F ⩽ 110 N

57. a) Intensidade nula
b) $1{,}8\ m/s^2$

58. a

59. a) 7,0 s b) 10 m e 25 m

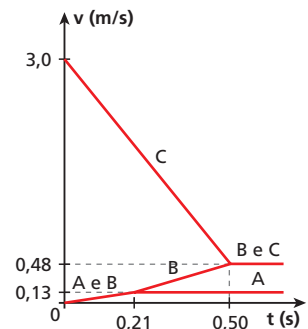
60. 25 kgf

61. $0{,}30\ N \leqslant F_{at} \leqslant 5{,}7\ N$

62. 100 N

63. a) 0,50 b) 2 kg

64. a) 22,0 N b) 1,0 s

65.

66. $a_C = \dfrac{(R + r)}{r}\,\mu\,g$

67. 37,5 N

68. a) $\mu = 0{,}25$
b) 80 N

69. e

70. a) $\theta = \text{arctg}\left(\dfrac{3}{4}\right)$
b) 21 mg;
c) ≅ 0,79

Tópico 3

Resultantes tangencial e centrípeta

1. a **2.** a **3.** e **4.** c
5. d **6.** a **7.** e
8. d **9.** d **10.** c

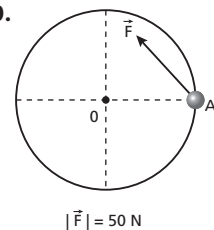
11. 72 kN

12. 90 km/h

13. c **15.** b **16.** c

17. b **18.** 21 **19.** c

20.

$|\vec{F}| = 50$ N

21. d

22. 5,0 rad/s

23. 2,0 m

24. d

26. c

27. b

28. a) Não, pois a velocidade do carro (60 km/h) é maior que a máxima permitida (43,2 km/h).
b) Não, pois a velocidade máxima independe da massa do carro.

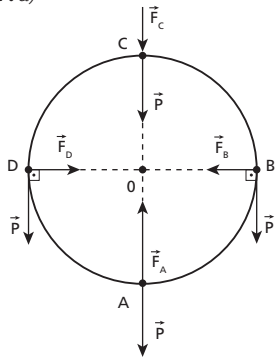
30. a) 594 N b) 360 N

31. a) 15 s b) $2{,}8 \cdot 10^3$ N

32. a) 2,0 N b) 12 N

33. $\frac{1}{2}\sqrt{g\,R}$

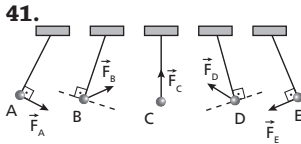
34. 30 N **36.** 15

37. a)

$\vec{F}$: força aplicada pelo apoio

$\vec{P}$: peso do conjunto

b) 6,0 m/s

38. b **39.** c **40.** d

41.

42. 20 N

43. e

44. a) 6,0 kN

b) 13,5 kN

45. b

46. 3,0 m/s

47. a) $\frac{v_A}{v_B} = 2$

b) $\frac{\mu_A}{\mu_B} = 2$

48. c

49. b

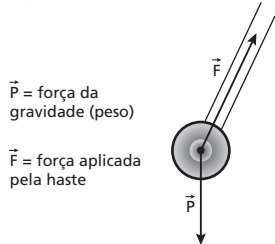
50. 0,50

51. 26 N

52. 120 m

53. a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\,tg\,\theta}}$

b) O período ficaria multiplicado por 2, já que ele é inversamente proporcional à raiz quadrada da intensidade da aceleração da gravidade.

54. a)

b) 5,5 rad/s

55. $\sqrt{\frac{g}{\mu\,R}}$

56. $\sqrt{g\,R\,tg\,\alpha}$

57. a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

b) $m\,g\,\frac{(R - h)}{R}$, e o peso aparente diminui.

58. c

59. $T_1 = 35$ N; $T_2 = 15$ N

60. $\sqrt{\frac{2g}{R}}$

61. $\sqrt{\frac{Rg\,(sen\,\theta + \mu\,\cos\,\theta)}{\cos\,\theta - \mu\,sen\,\theta}}$

62. $\omega = \sqrt{\frac{g(sen\,\theta - \mu\,\cos\theta)}{R(\cos\,\theta + \mu\,sen\theta)}}$

63. a) $F = 2{,}5$ Mg

b) $K = 2$

c) 2,5 Hz

64. $\frac{\omega_{máx}}{\omega_{min}} = \sqrt{\frac{M + \mu\,m}{M - \mu\,m}}$

65. e **66.** a **67.** 25

Tópico 4
Gravitação

1. e

2. a) $\frac{A_1}{A_2} = 1$

b) 2ª Lei de Kepler

3. e **4.** b **5.** 11

6. c **7.** c

8. a) Máxima no ponto **A** e mínima no ponto **C**.

b) $\Delta t_{DAB} < \Delta t_{ABC} = \Delta t_{CDA} < \Delta t_{BCD}$

10. 20 unidades

11. a) 9 R

b) $8\,R \leqslant d \leqslant 10\,R$

12. a) 24 h

b) $\cong 6{,}7\,R$

13. a **14.** b **15.** c

17. 20 **18.** d **20.** a

21. a) 24 h

b) Pelo fato de o satélite estar em movimento ao longo da órbita. Nesse caso, a força de atração gravitacional da Terra sobre ele desempenha a função de **resultante centrípeta**, servindo apenas para alterar a direção da velocidade vetorial.

22. b

23. 90%

24. a) 7,8 km/s

b) 89 min 33 s

25. a) 250 anos

b) $\cong 4{,}7$ km/s

26. a) 25 UA b) $\frac{1}{5}$

27. a) $\sqrt{\frac{GM}{r}}$

b) $\frac{\omega_i}{\omega_e} = \left(\frac{R_e}{R_i}\right)^{\frac{3}{2}}$

28. e **29.** 17

31. 60 kg e 600 N

32. b

33. a) $2{,}0 \cdot 10^2$ kg

b) $8{,}0 \cdot 10^2$ N

35. b

36. 25 600 km

37. d

38. c

40. 4,0 m/s^2

41. $\frac{1}{2}$

43. 3,0 m

44. 0,10 m/s^2

45. e

47. $m\,\omega^2\,R$

48. e

49. a

50. b

51. $\frac{3\pi}{G\,T^2}$

52. 18

53. c

54. a) $4{,}2 \cdot 10^{-5}$ m/s^2

b) $1{,}25 \cdot 10^{-4}$ N

55. $\frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2}$

56. a) $T_0 = 80$ min

b) $T_1 = 640$ min

57. Demonstração

58. $\left(\frac{3\pi\,r^3}{G\,\mu\,R^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

59. $\frac{16\pi^3}{3} \cdot \frac{\mu\,R^3\,r}{T^2}$

60. $\frac{3\pi}{G\,T^2}$

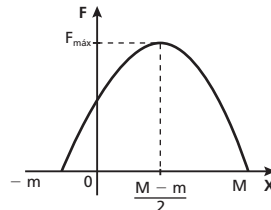
61. e

62. $2\pi R\sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{GM}}$

63. $\frac{4\pi R}{3}\sqrt{\frac{R}{GM}}$

64. c

65. 1 ano (365 dias)

66. a)

b) $\frac{M'}{m'} = 1$

Tópico 5
Movimentos em campo gravitacional uniforme

2. a) 7 s b) 70 m/s

3. a) 1,6 m/s^2 b) 10 s

4. 4,0 m

5. $\frac{v_2}{v_1} = 4$

6. $\sqrt{\frac{2d}{g}}$

7. e **8.** 8 m

10. a) 4 s b) 20 m

11. a) 20 s

b) 320 m

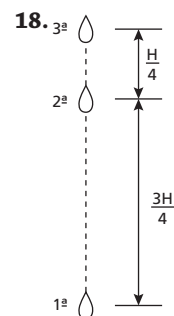
12. a) 40 m/s b) 80 m

13. 12

14. O elevador está em queda livre.

15. 30 m, 90 m e 150 m

17. 93 m

18.

19. 238 m

20. a) 500 m

b) 70 m/s ou –70 m/s

21. a) 4,9 m b) Não c) Sim

22. a) 24 m/s b) 12 m/s^2

23. a) 70 m/s b) 75 m

24. c **25.** c

26. a) 4,5 s b) 49 m

28. 32 m

29. a) 0,7 s b) 1,4 m

30. e **31.** 39 **32.** b

34. a) 24 m/s c) 16,2 m

b) 1,8 s d) 86,4 m

35. Fora do círculo de 9 km de raio e centro no ponto de lançamento.

36. e

37. a) 4,0 m/s c) 3,0 m/s

b) 1,2 s

38. 4 s **39.** 115

40. a) 4 s

b) 120 m

c) 40 m/s

d) 30 m/s e 40 m/s respectivamente

41. d

42. b = 3 m; d = 4 m

43. a) $1,6 \cdot 10^3$ m
b) $2,0 \cdot 10^3$ m
c) Em relação ao avião, segmento de reta vertical. Em relação ao solo, arco de parábola.

44. a) 3,0 m/s b) 5,0 m/s

45. O alcance horizontal é o quádruplo da altura máxima.

46. $\dfrac{h_{máx_A}}{h_{máx_B}} = 4$

47. c

49. Não aconteceu.

50. a) 40 m
b) 21 km/h

51. a) 120 m/s
b) Ascendente

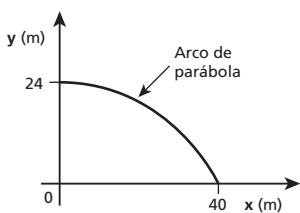
53. a) 400 m/s
b) 4,6 s

54. 50 m

56. 3,0 m/s < v < 6,0 m/s

57. 640 m

58. 9,0 m/s

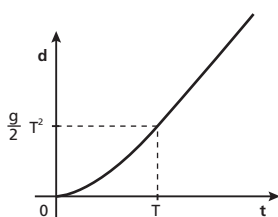
59. a) 20 m/s e 12 m/s²
b)

60. b

61. $\left(n - \dfrac{1}{2}\right)g$

62. 1 m

63. c **64.** 320 m

65.

d
$\frac{g}{2}$ T²
0
T
t

66. a) 11,25 m; 3 s
b) 2 s; 10 m

67. $v_0 \geqslant 22$ m/s

68. $2\,v_0\,t$

69. As distâncias entre pontos de impacto consecutivos são iguais a 100 m.

70. c

71. 0,25 litro

72. 60 m

73. a) 0,75 s c) 64 m/s
b) 32 m/s

74. $\text{tg}\,\theta = v\sqrt{\dfrac{2}{g\,H}}$

75. a) $\dfrac{M\,g}{k\,v}$; sentido anti-horário
b) $v\sqrt{\dfrac{2\,h}{g}}$

76. O sétimo degrau.

77. $n^2 \cdot (20 \text{ m})$, em que n = 1, 2, 3, ...

78. a) 8 m/s b) 0,8 s

79. 3,24 m

80. b

81. A trajetória é um ponto, um segmento de reta ou um arco de parábola.

82. a) 20 m/s
b) 40 m

83. $h = \dfrac{H}{2}$

84. d **85.** b **86.** c

87. 9,6 m

88. Demonstração

89. a) $\theta = \text{arc tg } 2$
b) $10\sqrt{5}$ m/s ($\cong$ 22 m/s)
c) 20 m

90. a) $\theta = \text{arctg}\,\dfrac{1}{2}$
b) $d_{PD} = 145$ m

91. Demonstração.

92. 8H sen α

93. a) $\theta_M = \text{arc tg}\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2g\,h}}$
b) $\cong 40°$

Tópico 6
Trabalho e potência

1. Trabalho nulo.

2. b **4.** 60 J **5.** c

6. a) 50 N b) Zero

7. a) 120 J c) 40 J
b) −80 J

8. $3,2 \cdot 10^3$ J

9. a) 0,15 e 0,10
b) 100 J
c) **Trabalho nulo**, pois a força não provoca deslocamento na caixa.

11. a) $1,0 \cdot 10^3$ J
b) $-1,0 \cdot 10^3$ J

12. $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 300$ J, $\tau_3 = 0$ e $\tau_4 = -250$ J

13. a) 5,0 N
b) 10 J e −6,0 J

14. $6,0 \cdot 10^2$ J

15. a) $4,0 \cdot 10^2$ J
b) $-1,0 \cdot 10^2$ J
c) $6,0 \cdot 10^2$ J

16. a) 30 N
b) 5,0 rad/s
c) Zero

17. c

18. 10 m/s

19. 1,5 m

20. a) 45 J b) 10 m/s

22. 57 J

23. d

24. 21 400 J

25. a) 20 J
b) −40 J

26. d

27. a) $-5,0 \cdot 10^2$ J
b) 5,0 s

28. a) 4,0 m/s
b) $8,0 \cdot 10^2$ J; $-8,0 \cdot 10^2$ J

29. $3,6 \cdot 10^2$ N

30. 4,0 m/s

32. −3360 J

33. 2,5 m

34. a) $V_B = 5,0$ m/s
b) 0,25

35. a) $F = \dfrac{M\,g\,H}{h}$
b) $a = \left(\dfrac{H}{h} - 1\right) g$

36. a) 5,0 J
b) −5,0 J
c) $4,0 \cdot 10^3$ N/m

37. a) 3,0 m
b) Zero

38. d

40. $2,5 \cdot 10^3$ J

41. a) $8,0 \cdot 10^2$ J
b) 32 W

42. a) $3,2 \cdot 10^3$ J
b) Ela se cansará **mais**, pois despenderá em 20 s uma potência maior que em 40 s.

43. a) $2,0 \cdot 10^4$ J
b) 1 min 40 s

44. d **45.** c **46.** c

47. a) $6,75 \cdot 10^5$ J
b) 90 cv

48. a) $5,5 \cdot 10^2$ J
b) $1,1 \cdot 10^2$ W

49. 100 m

50. 590 MW

51. 5,0 kW

52. a) 0,50 m/s²
b) 2,0 W

53. a) 300 N
b) 150 N

54. M = 2,0 kg

55. a) $4,5 \cdot 10^4$ J
b) $1,5 \cdot 10^3$ W

57. c

58. a) 40 HP
b) 4 HP

59. a **60.** b

61. a) $-6,8 \cdot 10^4$ J
b) 34 kW

62. a) 9,0 kN
b) 90 kW

63. 240 HP

65. k = 5

67. a) 16 W
b) 9,0 m/s

68. a) 2000 kW
b) 300 kN

69. $2,0 \cdot 10^2$ W

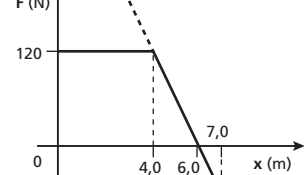
70. d **71.** e **72.** e

73. a) T = 4,5 N
b) W = 54 J
c) F = 1,5 N
d) x = 25 cm

74. a) $2,5 \cdot 10^{-1}$ N
b) $-2,4 \cdot 10^{-2}$ J

75. c **76.** a **77.** d

78. a)

F (N)
120
0
4,0
6,0
7,0
x (m)
–60

b) $\cong$ 10,7 m/s

79. 10 m/s **80.** 50 s

81. b **82.** 20 W

83. a

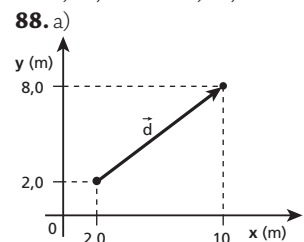
84. a) $\Delta t = 2,0 \cdot 10^2$ s
b) $F = 8,0 \cdot 10^3$ N
c) $a_t = 2,0 \cdot 10^{-1}$ m/s²

85. a) $\dfrac{\pi}{20}$ rad/s
b) 5,0 m/s²
c) 4,0 kN
d) $2,0 \cdot 10^5$ W

86. 17 J

87. a) 3,0 N b) 9,0 m

88. a)

y (m)
8,0
$\vec{d}$
2,0
0
2,0
10
x (m)

$|\vec{d}| = 10$ m

b) $4,0 \cdot 10^2$ J e 40 N

89. $p > \dfrac{V_0^2}{4g} + \dfrac{H}{2}$

90. e

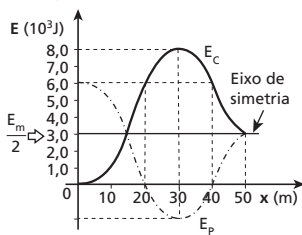
91. $\dfrac{\mu_c}{\mu_e} = \dfrac{1}{2}$

92. a) −3,6 J
b) 180 N
c) Módulo nulo

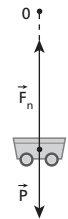
93. a) 1,0 kJ
b) 50 W

94. $\dfrac{3}{4}$

Tópico 7
Energia mecânica e sua conservação

1. $4,5 \cdot 10^{11}$ J
2. d **4.** c
5. $1,5 \cdot 10^3$ J
6. a) Zero b) 4,9 J
7. a
8. b
9. 6,4 J
10. b
11. b
12. b
13. c
14. b
16. a
17. a) $5,0 \cdot 10^3$ N/m
b) 300 N
c) 4,0 J
19. 8,0 J
20. 12 J
21. d
23. a) 400 J e zero
b) $2,0 \cdot 10^2$ m/s
24. b
25. e
27. a
28. b
29. a) 4,0 kJ
b) 20 m/s
30. a) 10 m/s
b) 3,0 kJ
31. b
33. a) 6,0 m/s
b) 1,8 m
34. a) 3,0 J b) 5,0 m
35. a
37. 13,0 m
38. b
39. a) 5,0 m e 10 m/s
b)

40. e
41. c
42. a) 20 J
b) 6,0 m/s
43. $v_B = \sqrt{v_0^2 + \frac{g\,h}{2}}$

$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$
44. 8,0 m/s
45. a) $-mgh$
b) $\frac{v_B}{v_C} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

46. 34 m/s
48. a
49. $v_0 = 2\sqrt{g\,R}$
50. a) $T_A = T_B < T_C$
b) $V_A < V_B = V_C$
51. d
52. b
54. 1,2 m
55. e
56. a) 20 m
b) 160 N/m
58. a)

$\vec{P}$ = força da gravidade (peso)

$\vec{F}_n$ = força de contato aplicada pela pista da montanha-russa

b) 4,0 kN
59. $5,0 \cdot 10^{-2}$ J
60. a) 10 m/s
b) 1,8 N
c) 10 m/s²
61. c
62. a) 10 m/s
b) 72 N
63. 10 J
64. $3,0 \cdot 10^{-1}$ J
65. 2,0 kW
66. Demonstração
67. a) 6 mg b) 5 mg
68. d
69. $V_1 = \sqrt{2g\ell}$; $V_2 = \sqrt{2,4g\ell}$
70. a) 4M g L
b) 7M g; sim
71. $x = \sqrt{\frac{3R}{g}(v^2 + gR)}$
72. a) Aproximadamente 9,2 m/s²
b) Aproximadamente 8,8 m/s
73. a
74. a) 3 816,0 J
b) 0,80 s
c) 8,4 m
75. ≅ 1,4 m/s
76. d
77. 2,0 m/s
78. $\frac{d}{h} = \frac{4}{5}$
79. c
80. a) $V_{II} = V_I =$
$= \sqrt{2gL\,(1 + \text{sen}\,\alpha)}$
b) $\Delta t_{II} < \Delta t_I$

81. a
82. $\text{tg}\theta = \sqrt{2}$
83. $h = \frac{2}{3}R$
84. $v_0 =$
$= \sqrt{gR\left[\frac{1}{\cos\theta} + 2(1 + \cos\theta)\right]}$
85. h = 24 m
87. $\sqrt{\frac{3\,G\,M}{2R}}$
88. 11,3 km/s
89. a
90. a) $\frac{GM^2}{4D}$
b) $-\frac{GM^2}{2D}$

Tópico 8
Quantidade de movimento e sua conservação

1. $1,6 \cdot 10^3$ kg $\cdot \frac{m}{s}$
2. d
4. a) 60 N
b) 2,0 cm
5. 14 s
7. 4,0 m/s, 7,0 m/s e 4,0 m/s
8. d
9. a) Sim
b) Não
10. c **11.** d **12.** e
13. $4,0 \cdot 10^2$ J
15. a) 40,5 kN
b) 10 vezes
16. 40 N
18. $2,0 \cdot 10^4$ N · s
19. a) 20 s
b) 1 250 N
20. a) 18 kg $\cdot \frac{m}{s}$
b) $3,6 \cdot 10^2$ J
21. b
22. 11
23. d
25. 0, 40 m/s
26. d
27. 2 min 30 s
28. c
29. e
30. a
32. v_G = 1,0 m/s; v_P = 10 m/s
33. a) 0,50 m/s
b) −112,5 J
34. a) 0,20 m/s
b) 20 N
36. a) $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{3}$
b) **Bloco 1**: 2,0 J
Bloco 2: 1,0 J

37. e
38. a) $\frac{t_2}{t_1} = 1$; $\frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
39. a) 58,5 km/h
b) 0,025 ou 25%
41. a) $\frac{Q_H}{Q_P} = 1$
b) 50 cm
c) 0,50 m/s e 0,75 m/s
42. $\frac{M}{m}\sqrt{2g\,L}$
43. 24 m/s
44. c
45. $-1,0 \cdot 10^3$ m/s
46. a) 4,0 m/s para cima
b) 432 J
47. (**A**): 1,0 m/s; (**B**): 4,0 m/s
48. a) 1,0 m/s b) 1,0 m/s
50. d
51. ≅ 47 km/h
52. a **53.** e
54. a) e = 0,25; parcialmente elástica
b) e = 0; totalmente inelástica
c) e = 1; elástica
d) e = 0,6; parcialmente elástica
e) e = 0; totalmente inelástica
56. a) $\frac{m_1}{m_2} = 1$
b) $\frac{m_1}{m_2} = 0,6$
58. 14,4 km/h
59. 2,5 m/s
60. a) 10 cm/s
b) 4,5 N · s
61. a) 0,6
b) 0,2 kg
62. b **63.** b
65. $v'_A = -1,0$ m/s;
$v'_B = 2,0$ m/s
66. 10 m/s
67. c
68. b
69. **Bloco A:** 1,0 m/s
Bloco B: 4,0 m/s
Bloco C: 12 m/s
71. (**A**): 6,0 m/s;
(**B**): 8,0 m/s
72. a) (1): − 4,0 m/s
(2): 1,0 m/s
b) $\frac{5}{14}$
73. a) 0,5 b) 45%
74. a) e = 0,5; parcialmente elástico
b) 8,0 kg
c) $2,8 \cdot 10^4$ N

TF1-486_496_Respostas.indd 493 16/08/12 18:22

75. a) 2,0 m/s
b) −6,0 J

76. $h = \frac{H}{9}$

77. $3{,}0 \cdot 10^{-2}$ m

79. a) 2,0 m/s
b) 20 cm

80. a) $e = \sqrt{\frac{h}{H}}$
b) h = H: elástico
0 < h < H: parcialmente elástico e
h = 0: totalmente inelástico

81. a

82. a) 10 m/s
b) $4{,}2 \cdot 10^3$ N
c) 262,5 N/cm²

83. a

84. c

85. a) 60 m/s b) $7{,}0 \cdot 10^2$ J

86. a) 1,0 m/s b) 80 J

87. ≅ 1,2 km/h

88. a

89. a) $V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}$
b) $V_N = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$
c) $V_A = (\sqrt{8} - 1)\sqrt{\frac{GM}{R_0}}$

90. ≃ 5,31 M eV

91. a **92.** d

93. a) 4,0 m/s
b) Aproximadamente 3,5 m
c) 2,0 m e a mola não será comprimida.

94. b

95. a) 2,0 m/s
b) 2,0 m/s
c) 1,0 m, e o bloco não atinge a caçapa.

96. a) $1{,}0 \cdot 10^2$ J c) 1,0 m/s
b) 6,0 m/s

97. a) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$
b) $\frac{R}{4}\left(1 + \frac{M_2}{M_1}\right)^2$

98. a) 4,5 m/s c) 40 cm
b) 5,0 cm

99. c **100.** b

101. a) A afirmação é **falsa**, pois seu veículo estava a 120 km/h.
b) 33,9 km/h

102. a) 1,0 m/s
b) ≅ $2{,}16 \cdot 10^5$ J

103. a) 3,0 m/s e 5,0 m/s
b) $\frac{9}{25}$
c) $\frac{17}{32}$

104. 5,0 cm

105. a) $h_0 = \frac{\mu^2 Mg}{2K}$
b) $x = \sqrt{\frac{MgH}{K}}$

106. a) 2,0 g
b) $5{,}6 \cdot 10^{-2}$ N

107. a) $2{,}0\ g \cdot \frac{m}{s}$
b) M = 140 g

108. D = 2,0 m

109. a) A leoa não consegue êxito em seu ataque.
b) 4,0 m
c) $640\ kg \cdot \frac{m}{s}$

110. a) 0,80 s b) 15 m/s

111. $\sqrt{\frac{(M + m)}{M}\ 2\ gL}$

112. e^{2n} H

113. a) 50,0 cm b) 390 N

114. a) Partícula 1: $2{,}0 \cdot 10^4$ m/s
b) Partícula 2: $1{,}0 \cdot 10^5$ m/s

115. a) α = 90°
b) $v = \frac{\sqrt{2}}{2}\ v_0$

117. a

118. a) $\bar{x} = \frac{20}{27}$ R
b) O centro de massa do sistema é um ponto interno à esfera terrestre, pois $\bar{x} < R$.

120. O centro de massa da barra coincide com o seu centro geométrico.

121. c

122. $\bar{x} = R$ e $\bar{y} = \frac{5R}{6}$

124. b

125. 5,0 m/s

126. Velocidade nula

127. b

Parte III Estática

Tópico 1

Estática dos sólidos

1. Elas têm intensidades iguais, direções iguais e sentidos opostos.

3. Não

4. $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

6. 80 N

7. T_B, T_A, T_C

8. d

9. 17

11. d

13. 88 N

14. T_A = 580 N, T_B = 400 N, T_C = 664 N

15. a) 300 N b) 50 N

17. a) 150 N
b) $50\sqrt{3}$ N
c) 400 N

18. 80 N na rampa (1) e 60 N na rampa (2).

19. a) 3 kg
b) 3 kg

20. a) $F_A = P$; $F_B = P$;
$F_C = \frac{P}{2}$; $F_D = \frac{P}{6}$
b) $d_A = d$; $d_B = d$;
$d_C = 2d$; $d_D = 6d$

21. a) $20\sqrt{2}$ N
b) 20 N

22. 62

24. −400 Nm, zero e 400 Nm, respectivamente.

25. $\vec{F}_4$

26. Consegue porque o torque da força de 51 kgf é mais intenso que o da força de 75 kgf.

28. 50 cm

29. a) 4 N
b) Não. A barra vai girar no sentido anti-horário.

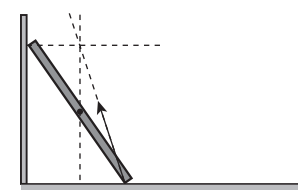
30. d

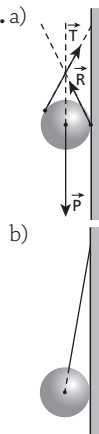
32. a) R_A = 810 N; R_B = 510 N
b) 1,2 m

33. 125 N

34. a) 85 N b) 35 N

36. d

37.

38. d

39. a)

b)

40. 135 N

41. c

42. a) Criança B;
b) $v_A = \frac{m_B v_B}{m_A}$

43. 0,36 m/s

44. a) 1,2 m b) 200 N

46. d

47. a) 45 cm b) 15 cm

48. a) Não.
b) F_n = 360 N,
F_{at} = 135 N

50. Horizontal: 200 N para a direita;
Vertical: 280 N para cima.

51. $\frac{P}{4} = \left(\frac{x - y}{x + y}\right)$

53. a

55. x_{CG} = 3,25 m;
y_{CG} = 1,25 m

56. a

57. **A**: estável; **B**: instável; **C**: indiferente.

58. b

59. 300 N

60. 14

62. d

63. 990 N

64. B

65. a) 250 N
b) Não depende.

66. a = 59 cm; b = 66 cm; c = 75 cm

67. a) $\frac{Mg\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{3Mg}{2}$
c) $\frac{Mg\sqrt{3}}{6}$

68. $\frac{P\ell}{d + R}$

69. a) 700 N b) 10 m

70. ≅ 0,58

71. a) 500 N
b) 500 N, para a esquerda

72. $\frac{P\ d\ tg\ \theta}{r}$

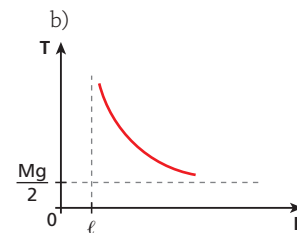
73. a

74. c

75. a) $M_P = 8 \cdot 10^{-2}$ Nm (em módulo); $M_C = 0$
b) $M_T = 16 \cdot 10^{-2}$ T Nm (em módulo); T = 0,5 N
c) C ≅ 0,87 N

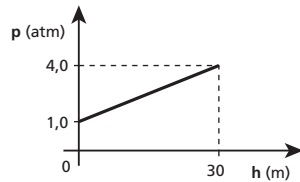
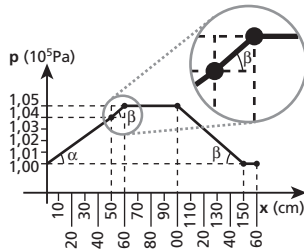
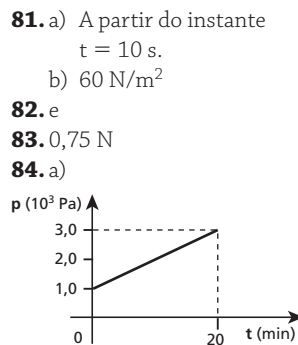
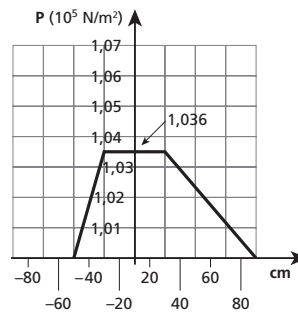
76. 25

77. e

78. a) $T = \frac{Mg}{2\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{L^2}}}$;
b)

79. a) 10 N b) 16 N

80. 72 cm
81. 2 ℓ e 32 ℓ, respectivamente.
82. 200 kgf em cada roda dianteira;
400 kgf em cada roda traseira.
83. a) 2,4 m
b) 3,0 m
84. 153 cm
85. $b < 2\mu_e h$
86. a) $F = \frac{P}{2}\left(\frac{a\cos\theta - h\,\text{sen}\,\theta}{a\,\text{sen}\,\theta + h\cos\theta}\right)$
b) $\theta_E = \text{arc tg}\ \frac{a}{h}$
87. c
88.
$D = \frac{L}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ e $D_6 = \frac{49}{40} \cdot L$
89. 9
90. a) $0 \leqslant F \leqslant \frac{m\,g\,(b - \mu\,h)}{a}$
b) $\frac{b}{h}$
c) zero
91. a
92. 2,7 m/s²

Tópico 2
Estática dos fluidos

1. d
2. a) 1,0 g/cm³
b) $1,0 \cdot 10^4$ N/m³
3. 1,26
5. a) $2,0 \cdot 10^4$ N/m²
b) $4,0 \cdot 10^5$ N/m²
6. c
8. c
9. d
10. $\frac{1}{2}$
11. b
12. $\frac{p_A}{p_B} = \frac{1}{3}$
13. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$
14. $1,2 \,.\, 10^4$ N/m² ou, aproximadamente, 0,12 atm.
15. a) $1,8 \cdot 10^3$ N
b) $1,0 \cdot 10^6$ Pa
16. c
17. e
18. a) $p_A = p_B = p_C$
b) $F_A = F_B = F_C$
20. 7,0 N
22. d
23. 60 cm Hg
24. 122 cm Hg
25. $\frac{|\vec{f}_1|}{|\vec{f}_2|} = \frac{1}{4}$
26. $2,5 \cdot 10^2$ Pa
27. a
29. $\alpha \cong 60°$
30. 0,80
31. a
32. Gás **M**: 90 cm Hg;
gás **N**: 20 cm Hg
33. 0,32 atm
34. a
35. a) 30 m b) 1,0 m/s
36. 13,6 g/cm³
37. 24,0 cm
38. 80 N
39. a) 1,0 atm ou $1,0 \cdot 10^5$ Pa
b)

40. c
41. b
42. $x = \frac{8}{3}\ h$
43. a) $2,0 \cdot 10^2$ cm³
b)

44. 786 mm Hg
46. e
47. a) $1,0 \cdot 10^3$ N
b) Os dois trabalhos valem $3,0 \cdot 10^4$ J.
48. e
49. b
50. b
52. a) L = 10 cm;
A = 20 cm
b) 2,0 g/cm³
53. a) 0,40 N
b) $8,0 \cdot 10^2$ kg/m³
54. d
56. 90%
57. a) 6,3 N
b) Glicerina
58. e
59. $\frac{3}{4}$
60. a) 0,80 N
b) 60%
61. a) Para cima
b) $1,0 \cdot 10^2$ cm³
62. a) 30 N
b) 12 N
c) 2,0 kg
63. a) 3,0 N
b) $1,0 \cdot 10^4$ kg/m³
64. a) 10 N
b) 5,0 cm
65. d **67.** e **68.** b **69.** b
70. c **71.** c **73.** c **74.** d
76. A indicação de (**B**) aumentará, enquanto a indicação de (**b**) diminuirá.
77. a
78. 5,0 s
79. a) 20 m b) $4\sqrt{2}$ s
80. c
81. a) A partir do instante t = 10 s.
b) 60 N/m²
82. e
83. 0,75 N
84. a)

b) **Parede do fundo:**
$3,0 \cdot 10^3$ N
paredes laterais:
$4,5 \cdot 10^2$ N
85. 1,2 g/cm³
86. a) $6,0 \cdot 10^2$ kg/m³
b)

87. b
88. c
89. a) 50 N/m
b) 30 N
c) 107,5 cm
90. c
91. a) 1,5 cm
b) $2,2 \cdot 10^{-2}$ N
92. h' = h, pois o volume imerso é o mesmo em ambos os casos.
93. c
94. b
95. d
96. 3,0 cm³
97. 15 kg
98. n = 10 barras
99. a) 17,6 kgf; 42,4 kgf
b) 60,0 kgf
100. d
101. 50 cm/s
102. a) $1,0 \cdot 10^3$ kg/m³
b) **Líquido 1:** 2
Líquido 2: 1
103. b
104. b
105. **Fio 1**: $T_1 = 0,2\ \rho Ahg$
Fio 2: $T_2 = 0,3\ \rho Ahg$
y = 0,6 h
106. c
107. b

Apêndice
Hidrodinâmica

2. 72 s ou 1 min 12 s
3. d **4.** e
5. c **7.** b
8. d
9. a) $1,5 \cdot 10^3$ N/m²
b) 810 toneladas
c) Aproximadamente 100 km/h
10. Princípio de Bernoulli e aproximadamente 79,6 N/m²
11. $4,2 \cdot 10^5$ Pa
12. a **14.** $1,1 \cdot 10^4$ N/m²
16. a) $v = \sqrt{2g\,(H - h)}$
b) $D = 2\sqrt{g\,(H - h)h}$
17. c
18. a

Siglas

Acafe-SC Associação Catarinense das Fundações Educacionais
AFA-SP Academia da Força Aérea
Aman-RJ Academia Militar de Agulhas Negras
Cefet-MG Centro Federal de Educação Tecnológica
Cesesp-PE Centro de Seleção ao Ensino Superior de Pernambuco
Cesgranrio-RJ Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
EEM-SP Escola de Engenharia Mauá
EFOMM-RJ Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante do Rio de Janeiro
Enem Exame Nacional de Ensino Médio
ENRJ Escola Naval do Rio de Janeiro
ESPCEX-SP Escola Preparatória de Cadetes do Exército
Faap-SP Fundação Armando Alvares Penteado
Fatec-SP Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FCC-SP Fundação Carlos Chagas
FCM-MG Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais
FEI-SP Faculdade de Engenharia Industrial
Fesp-SP Faculdade de Engenharia de São Paulo
FGV-SP Fundação Getulio Vargas
FMABC-SP Faculdade de Medicina do ABC
FMJ-SP Faculdade de Medicina de Jundiaí
FMPA-MG Faculdade de Medicina de Pouso Alegre
FMTM-MG Faculdade de Medicina do Triângulo Mineiro
Fuvest-SP Fundação Universitária para o Vestibular
IME-RJ Instituto Militar de Engenharia
ITA-SP Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mack-SP Universidade Mackenzie
Puccamp-SP Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-MG Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
UCDB-MT Universidade Católica Dom Bosco
UCG-GO Universidade Católica de Goiás
UEL-PR Universidade Estadual de Londrina
UEPA Universidade Estadual do Pará
UEPB Universidade Estadual da Paraíba
Uerj Universidade Estadual do Rio de Janeiro
Uespi Universidade Estadual do Piauí
Ufac Universidade Federal do Acre
Ufal Universidade Federal de Alagoas
Ufam Universidade Federal do Amazonas
UFBA Universidade Federal da Bahia
UFC-CE Universidade Federal do Ceará
UFF-RJ Universidade Federal Fluminense
UFG-GO Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG Universidade Federal de Juiz de Fora
Ufla-MG Universidade Federal de Lavras
UFMG Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UFMT Universidade Federal do Mato Grosso
Ufop-MG Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA Universidade Federal do Pará
UFPB Universidade Federal da Paraíba
UFPE Universidade Federal de Pernambuco
UFPel-RS Universidade Federal de Pelotas
UFPI Universidade Federal do Piauí
UFPR Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFSC Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP Universidade Federal de São Carlos
UFSE Universidade Federal de Sergipe
UFSM-RS Universidade Federal de Santa Maria
UFU-MG Universidade Federal de Uberlândia
UFV-MG Universidade Federal de Viçosa
Umesp-SP Universidade Metodista de São Paulo
Unama-AM Universidade da Amazônia
UnB-DF Universidade de Brasília
Unesp-SP Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Unicamp-SP Universidade Estadual de Campinas
Unifei-MG Universidade Federal de Itajubá
Unifesp-SP Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE Universidade de Fortaleza
Unip-SP Universidade Paulista
Unirio-RJ Universidade do Rio de Janeiro
Unisa-SP Universidade de Santo Amaro
USF-SP Universidade São Francisco
Vunesp-SP Fundação para o Vestibular da Unesp